应用型本科数学基础课程教材

高等数学

（下册）

Advanced Mathematics

主　编　翁连贵　吴钦宽

高等教育出版社

应用型本科数学基础课程教材

高等数学

（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编　翁连贵　吴钦宽
副主编　孙福树　高安力
　　　　吴　莉　尤兴华

高等教育出版社·北京

内容简介

本书参照教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成。全书分上、下两册出版．下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程等内容，书末还附有部分习题答案与提示。本书配有适当习题，每章总习题分为 A、B 两组．A 组题以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；B 组题有一定难度，具有综合性、论证性强等特点，以适应日益增多的考研学生的需求，也便于教师使用。

本书主要针对应用型本科学生编写，注意强化基本概念、基本理论、基本计算；注重应用数学知识解决实际问题的能力的培养；注重数学思想方法的培养和数学思维的训练；注重自学能力的培养和提高。

本书可供普通高等学校非数学类专业学生使用，也可供自学者及有关教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册 / 翁连贵，吴钦宽主编．-- 北京：高等教育出版社，2016.1

ISBN 978-7-04-044221-2

Ⅰ．①高… Ⅱ．①翁… ②吴… Ⅲ．①高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ．① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 272764 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 杨 波　　特约编辑 师钦贤　　封面设计 李小璐
版式设计 马敬茹　　插图绘制 邓 超　　责任校对 刁丽丽　　责任印制 耿 轩

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 大厂益利印刷有限公司
开　　本 787 mm × 960 mm 1/16
印　　张 22.5
字　　数 410 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2016年1月第1版
印　　次 2016年1月第1次印刷
定　　价 35.10 元

物 料 号 44221-00

目　　录

第 8 章　空间解析几何与向量代数

解析几何是以代数作为主要研究工具的几何学,并将代数和几何中最基本的概念数和点,通过坐标建立对应,将高等数学中许多抽象的数学概念及原理与几何直观有机地结合起来.这不仅有助于人们对问题的理解,而且能提高人们的想象力和创造力.

本章首先介绍向量的概念和运算,然后介绍空间解析几何,主要包含常见的空间曲面和曲线以及平面与直线.

8.1　向量及其线性运算

通过本节的学习,应理解向量的概念,掌握向量的线性运算,会用向量的坐标进行向量的相关运算.

8.1.1　向量的概念

在物理学中,经常会遇到两类量,一类如长度、质量、温度等,这种只有大小,没有方向的量称为数量(或标量);另一类如力、位移、速度、加速度等,这种既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).在数学上,向量通常用一条有向线段来表示,有向线段的长度表示**向量的大小**,有向线段的方向表示**向量的方向**.例如以 A 为起点,B 为终点的向量可记为$\overrightarrow{AB}$,也可用$\vec{a}$或者黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示(见图 8.1).

图 8.1

向量 $\boldsymbol{a}$ 或$\overrightarrow{AB}$的大小称为向量的**模**,记为$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$.模等于 1 的向量称为**单位向量**,模等于零的向量称为**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$ 或$\vec{0}$.零向量可取任意方向.

在实际问题中,有些向量与起点有关,有些向量与起点无关,本书只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**(以后简称为**向量**),自由向量在空间可自由平行地移动.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,我们就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,这就是说,经过平移后能完全重合的向量是相等的.

如果向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小相等,且方向相反,我们就称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,

记作 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同或相反,则称这两个向量**平行**(或**共线**),记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,规定零向量和任意向量都平行.

对于 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点平移到同一个点时,如果它们的终点和公共起点在一个平面上,则称这 k 个向量**共面**.

8.1.2 向量的线性运算

线性运算是向量的一种主要运算,它包括向量的加减法和向量与数的乘法.

1. 向量的加减法

定义 8.1.1 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有共同的起点 O,以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$(见图 8.2),则称对角线向量 $\boldsymbol{c}(\overrightarrow{OC})$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这样得到两向量和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

两向量的和也可用**三角形法则**:先作出向量 $\boldsymbol{a}$,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为 $\boldsymbol{b}$ 的起点(见图 8.3),则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点,$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点所构成的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

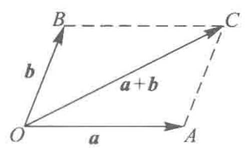

图 8.2

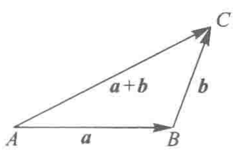

图 8.3

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为向量,向量的加法满足以下运算律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

利用向量加法的交换律和结合律,按向量相加的三角形法则,n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可得 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 方法如下:将前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,所得向量即为所求向量的和(**多边形法则**).

定义 8.1.2 向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 差,记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

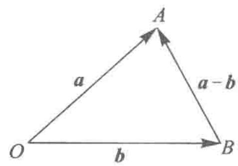

图 8.4

向量减法也可用三角形法则(见图 8.4),先作向量 $\boldsymbol{a}$,以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点作向量 $\boldsymbol{b}$,则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

向量的加减法还满足

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号分别在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

定义 8.1.3 向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的**乘积**仍是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,方向任意.

向量与数的乘法满足以下运算律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时,$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记为 $\boldsymbol{e}_a$(或 $\boldsymbol{a}^0$),即

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

定理 8.1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是:存在唯一实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 充分性由向量数乘的定义容易得出,下证必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$,取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,则

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时 λ 取负值,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,因此 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证数 λ 的唯一性.

设有两个数 λ,μ 满足 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,则有

$$\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a},$$

于是 $0=|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|$. 因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,所以 $|\lambda-\mu|=0$,即有 $\lambda=\mu$.

例 8.1.1 已知 D,E,F 分别是三角形 ABC 三边 AC,BC,AB 的中点,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,

(1) 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{FC}$;

(2) 证明 $DE \underline{/\!/} \dfrac{1}{2}AB$.

解 (1) $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

（2）因为$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，由定理 8.1.1 知$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{AB}$，且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$，即$DE \underline{/\!/} \frac{1}{2}AB$.

8.1.3　空间直角坐标系

在中学数学中，通过建立坐标系，可以用代数的方法来研究平面上的几何问题，同样，可以通过建立空间直角坐标系，利用代数的方法来研究空间上的几何问题.

1. 坐标系的建立

在空间取定一点 O，过 O 点作三条相互垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，各轴的方向按右手规则确定：右手握住 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（见图 8.5）. 这样就建立了一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$，其中 O 为坐标系原点，Ox，Oy，Oz 为**坐标轴**，分别称为 ***x* 轴**、***y* 轴**、***z* 轴**. 每两个坐标轴确定一个平面，称为**坐标面**，分别称为 ***xOy* 面**，***yOz* 面**，***zOx* 面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**，含有 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限，第二、三、四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定；第五卦限在第一卦限下方，第五至第八卦限在 xOy 面的下方，按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用罗马数字Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ来表示（见图 8.6）.

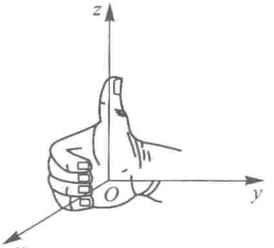

图 8.5

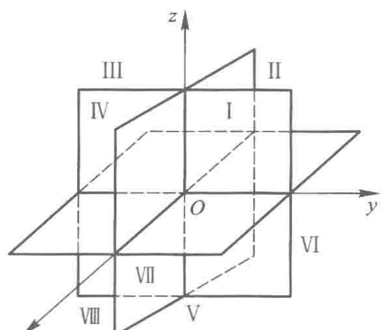

图 8.6

建立了空间直角坐标系后，就可以确定空间点的坐标. 如图 8.7 所示，M 为空间一点，过 M 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，设它们和三个坐标轴的交

点为 P,Q,R. P,Q,R 称为 M 在三个坐标轴上的**投影点**. 设这三点关于所在坐标轴的坐标分别为 x,y,z,这样 M 就确定了一个有序的三元数组(x,y,z). 反之,已知一个有序的三元数组(x,y,z),就可以在 x,y,z 轴上找到三个对应点 P,Q,R,过这三点分别作垂直于三个坐标轴的平面,得到唯一交点 M,于是 M 和三元有序数组(x,y,z)一一对应,有序数组(x,y,z)也称为点 M 的**坐标**(分别称为**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**),记为 $M(x,y,z)$.

坐标轴和坐标面上的点的坐标各有一定的特征:坐标轴上点的坐标至少有两个坐标等于0,而坐标面上点的坐标至少有一个坐标等于0. 如 z 轴上的点的坐标为$(0,0,z)$,xOy 平面上的点的坐标为$(x,y,0)$,而原点的坐标为$(0,0,0)$.

2. 向量和空间中的点与三元有序数组的对应

x 轴、y 轴、z 轴上的基本单位向量分别记为 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. 任给向量 $\boldsymbol{r}$,有对应点 M,使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点的**向径**,以 OM 为对角线,三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK\text{-}OPNQ$,如图 8.7 所示. 设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$, 于是由定理 8.1.1 有

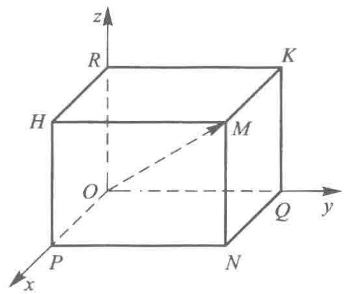

图 8.7

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{8.1.1}$$

式(8.1.1)称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**,$x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

显然,点 M,向量 $\boldsymbol{r}$ 与有序三元数组(x,y,z)建立了一一对应的关系

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z). \tag{8.1.2}$$

有序数组(x,y,z)称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$或$\{x,y,z\}$.

一般地,将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点平移到坐标原点,若终点的坐标为(a_x,a_y,a_z),则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标就是(a_x,a_y,a_z),即 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

8.1.4 向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,可以得到

(1) $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z);\end{aligned} \tag{8.1.3}$$

(2) $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z);\end{aligned} \tag{8.1.4}$$

(3) $$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\ (\lambda\ 为实数); \tag{8.1.5}$$

(4) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$存在实数 λ，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \tag{8.1.6}$$

在关系(4)中，若 a_x,a_y,a_z 中有一个为 0，不妨设 $a_x=0,a_y\neq0,a_z\neq0$，则(8.1.6)应理解为

$$\begin{cases}b_x=0,\\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z};\end{cases}$$

若 a_x,a_y,a_z，中有两个为 0，不妨设 $a_x=a_y=0,a_z\neq0$，则(8.1.6)应理解为

$$\begin{cases}b_x=b_y=0,\\ b_z\neq0.\end{cases}$$

例 8.1.2　设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,-4)$，$\boldsymbol{c}=(1,-1,2)$求 $-2\boldsymbol{a}$，$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$.

解

$$-2\boldsymbol{a}=(-4,2,-6),\quad 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(10,3,1),\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}=(2,-6,11).$$

例 8.1.3　已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，求$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标表示式.

解　作向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，由三角形法则可知

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

例 8.1.4　已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，如果直线 P_1P_2 上的点 P 满足$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2}(\lambda\neq-1)$，则称点 P 为分 P_1P_2 成定比 λ 的定比分点，求分点 P 的坐标(x,y,z).

解

$$\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$\overrightarrow{PP_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$
$$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2},$$

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

于是 P 点的坐标为

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right). \tag{8.1.7}$$

式(8.1.7)称为空间的**定比分点坐标公式**. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，P 为 P_1P_2 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{8.1.8}$$

8.1.5 向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，如图 8.7，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}.$$

由于 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，代入上式，得到向量模的坐标表达式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{8.1.9}$$

设点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，则点 P_1 与 P_2 间的距离 $|P_1P_2|$ 就是 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模，因为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

于是得到 P_1,P_2 两点间的距离公式

$$|P_1P_2|=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{8.1.10}$$

例 8.1.5 已知空间两点 $A(1,-2,3)$ 和 $B(3,0,-1)$，求

(1) A,B 中点 M 的坐标；

(2) A 关于 yOz 平面对称点 C 的坐标；

(3) 在 z 轴上求一点 P，使得 $|PC|=|PB|$.

解 (1) 由中点坐标公式，A,B 之间的中点 $M(x,y,z)$ 的坐标为

$$x=\frac{1}{2}(1+3)=2,y=\frac{1}{2}(-2+0)=-1,z=\frac{1}{2}[3+(-1)]=1,$$

故所求中点为 $M(2,-1,1)$.

(2) A 关于 yOz 平面对称点 C 的坐标为 $C(-1,-2,3)$.

(3) 设 P 点坐标为 $P(0,0,z)$，由于 $|PC|=|PB|$，因此

$$\sqrt{(-1-0)^2+(-2-0)^2+(3-z)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2+(-1-z)^2}.$$

解得 $z=\frac{1}{2}$，故所求点为 $P\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.

例 8.1.6 已知两点 $A(2,1,-1)$ 与 $B(4,0,-2)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-1)$，所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$，于是

$$\boldsymbol{e}=\pm\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1).$$

2. 方向角与方向余弦

定义 8.1.4　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,空间取定一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定在0到 π 之间的角 $\varphi=\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**(见图8.8),记为$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$或$(\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{a})$,即$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\varphi$.

如果$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$ 或 π 时,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**;由于零向量的方向可以任取,于是可以认为零向量和任何向量都平行. 如果$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**(或**正交**),记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,同样,也可以认为零向量和任何向量都垂直.

定义 8.1.5　非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**,它们的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 见图8.9.

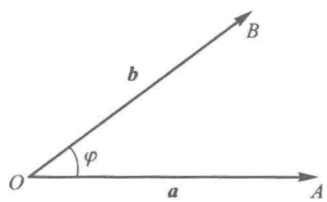

图8.8

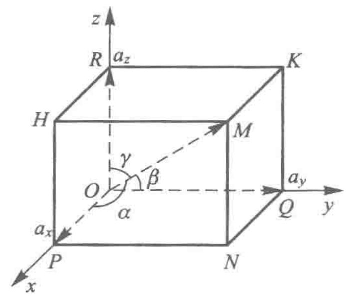

图8.9

易知

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

其中$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. 容易得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

由此可得与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

即与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量就是以 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标构成的向量.

例 8.1.7　已知两力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 作用于同一点,$\boldsymbol{F}_1=(-4,-\sqrt{2},2)$,$\boldsymbol{F}_2=(3,0,-1)$,求合力 $\boldsymbol{F}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(-1,-\sqrt{2},1)$,$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=2$,$\boldsymbol{F}$

的方向余弦分别为 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，方向角分别为 $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$，$\beta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

例 8.1.8 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点是 $B=(3,0,-1)$，$|\boldsymbol{a}|=14$，其方向与向量 $\boldsymbol{b}=(-2,3,6)$ 的方向一致，求 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标.

解法一 设 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(x,y,z)$，由题意，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向一致，其方向余弦也应相同，从而 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+3^2+6^2}}=-\frac{2}{7},\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{(-2)^2+3^2+6^2}}=\frac{3}{7},$$

$$\cos\gamma=\frac{6}{\sqrt{(-2)^2+3^2+6^2}}=\frac{6}{7},$$

因此

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a=14\left(-\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)=(-4,6,12).$$

又 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(3-x,0-y,-1-z)$，所以

$$\begin{cases}3-x=-4,\\0-y=6,\\-1-z=12,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x=7,\\y=-6,\\z=-13,\end{cases}$$

故向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(7,-6,-13)$.

解法二 设 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(x,y,z)$，因为 $|\boldsymbol{b}|=7$，由题可知，$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，即

$$(3-x,0-y,-1-z)=2(-2,3,6),$$

解得

$$x=7,\ y=-6,\ z=-13.$$

所以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(7,-6,-13)$.

3. 向量在轴上的投影

定义 8.1.6 设数轴 l 由点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定（见图 8.10）. 任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，过点 M 作 l 轴的垂直平面 π，π 与 l 轴交于点 M'，点 M' 称为点 M 在 l 轴上的投影，向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 l 轴上的分向量，设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 l 轴上的**投影**，记为 $\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_l$.

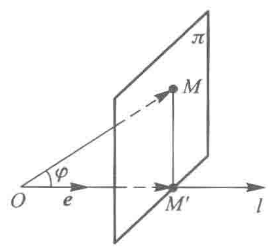

图 8.10

由定义 8.1.6 易知，向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 x,y,z. 即有 $x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{r}$，$y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{r}$，$z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{r}$.

向量在轴上的投影具有以下性质：

性质 8.1.1 $\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$,其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 l 轴的夹角;

性质 8.1.2 $\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{b}$;

性质 8.1.3 $\mathrm{Prj}_l(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}$.

习题 8.1

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$M$ 是平行四边形对角线交点,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

2. 利用向量证明梯形中位线定理.

3. 利用向量证明四边形是平行四边形的充要条件是对角线互相平分.

4. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限.

   $A(3,1,-3)$;$B(1,-3,8)$;$C(1,-3,-6)$;$D(-5,-2,2)$.

5. 在空间直角坐标系中,求 $A(a,b,c)$ 在下列各种情况下的对称点的坐标:

   (1) 各坐标面;(2) 各坐标轴;(3) 原点.

6. 求点 $P(3,1,-1)$关于 xOz 平面的对称点与点$(1,-1,2)$之间的距离.

7. 在 xOz 平面上求一点,使其与三点 $P(1,1,2)$,$Q(2,-2,1)$,$R(-1,3,0)$的距离相等.

8. 证明以 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

9. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(-3,4,-12)$的单位向量.

10. 下列各组角是否为某个向量的方向角:

    (1) $\alpha=90°$,$\beta=150°$,$\gamma=60°$;(2) $\alpha=60°$,$\beta=135°$,$\gamma=45°$.

11. 一非零向量与 x 轴,y 轴的夹角相等,而与 z 轴的夹角是前者的两倍,求该向量的方向角.

12. 已知两点 $M_1(-1,2,2)$,$M_2(1,3,0)$,求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦.

13. 设点 A 位于第 Ⅰ 卦限,向径$\overrightarrow{OA}$与 x 轴、y 轴的夹角分别为$\dfrac{\pi}{4}$和$\dfrac{\pi}{3}$,且$|\overrightarrow{OA}|=8$,求 A 点的坐标.

14. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为 6,它与 l 轴的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 l 轴上的投影.

15. 已知点 $M_1(1,4,1)$和 $M_2(-1,0,-3)$,求点 M_0 使:

    (1) M_0 是线段 M_1M_2 的中点;(2) M_0 在线段 M_1M_2 上,且 $2|M_1M_0|=|M_0M_2|$.

16. 已知有向线段$\overrightarrow{M_1M_2}$的长度为 6,方向余弦为 $-\dfrac{2}{3}$,$\dfrac{1}{3}$,$\dfrac{2}{3}$,点 M_1 坐标是

$(-3,2,5)$,求点 M_2 的坐标.

17. 一向量的起点坐标 $A(1,2,3)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影分别为 2,-2 和 6,求这个向量的终点 B 的坐标.

18. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-2,3)$,$\boldsymbol{\beta}=(0,2,-1)$,$\boldsymbol{\gamma}=(3,-1,1)$,求向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$ 在 x 轴上的投影和在 z 轴上的分向量.

19. 已知 $\triangle ABC$ 一个顶点 $A(2,-5,3)$,两边向量为 $\overrightarrow{AB}=(4,1,2)$,$\overrightarrow{BC}=(3,-2,5)$,求三角形其余顶点坐标及向量 $\overrightarrow{CA}$.

20. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(3,1,2)$,$B(0,1,6)$,$C(8,-1,-12)$,求与 $\angle BAC$ 角平分线平行的单位向量.

8.2 数量积 向量积 *混合积

通过本节的学习,应理解向量的数量积、向量积和混合积的概念,掌握数量积和向量积的计算方法,了解混合积的计算,会利用数量积、向量积和混合积来解决有关问题.

8.2.1 两向量的数量积

在力学上,一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移到点 M_2 时,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\theta$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的夹角(图 8.11).

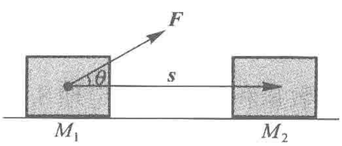

图 8.11

物理学中还有不少这样的例子,为此,抽去其具体背景,引入数量积的概念.

定义 8.2.1 两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的模与它们的夹角余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b}).\tag{8.2.1}$$

数量积也称**点积**或**内积**.

由定义可知上述问题中力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}.$$

由数量积的定义易知下列结论:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$; $\quad$ (8.2.2)

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$; $\quad$ (8.2.3)

(3) 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角满足

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}; \tag{8.2.4}$$

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. (8.2.5)

向量的数量积具有如下性质：

定理 8.2.1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ 为实数，则

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 数乘结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(3) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，等式显然成立；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，按式(8.2.3)和投影性质8.1.3，可得

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

同理可得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

(3) 当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，等式显然成立；当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，按式(8.2.3)和投影性质8.1.2，可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

由数量积的定义和定理8.2.1，可得向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积以及其夹角余弦的坐标表达式.

定理 8.2.2　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$; (8.2.6)

(2) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$　$(|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0)$. (8.2.7)

证　(1) 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+\\&\quad a_yb_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+\\&\quad a_zb_x(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两正交的单位向量，所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

因而得