时代教育·国外高校优秀教材精选

PEARSON

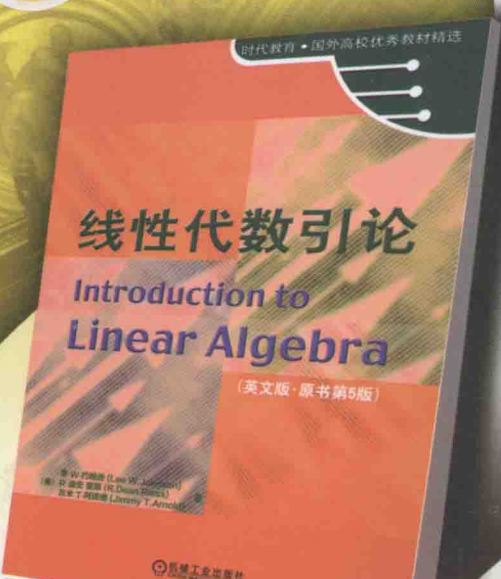
线性代数引论

（翻译版·原书第5版）

Introduction to Linear Algebra

（美）李 W·约翰逊 (Lee W.Johnson)
R·迪安 里斯 (R.Dean Riess) 著
吉米 T·阿诺德 (Jimmy T.Arnold)

孙瑞勇 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

PEARSON

时代教育·国外高校优秀教材精选

线性代数引论

Introduction to Linear Algebra

（翻译版·原书第5版）

李 W. 约翰逊（Lee W. Johnson）
［美］ R. 迪安 里斯（R. Dean Riess） 著
吉米 T. 阿诺德（Jimmy T. Arnold）
孙瑞勇 译

机械工业出版社

本书内容包括矩阵与线性方程组，二维空间和三维空间中的向量，向量空间 $\mathbf{R}^n$，特征值问题，向量空间与线性变换，行列式，特征值及其应用，MATLAB 介绍等. 适合作为理工类、经管类，甚至社会科学各学科的低年级本科线性代数教材，也可作为需要系统学习线性代数的本科高年级或研究生的入门教材，特别适合自学.

图字 01-2014-1605

图书在版编目（CIP）数据

线性代数引论：翻译版：原书第 5 版/(美)约翰逊(Johnson, L. W.)等著；孙瑞勇译. —北京：机械工业出版社，2015. 4
(时代教育：国外高校优秀教材精选)
书名原文：Introduction to Linear Algebra, 5/E
ISBN 978－7－111－50848－9

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①约…②孙…　Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 157279 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫
责任校对：胡艳萍　陈秀丽
责任印制：乔　宇
北京京丰印刷厂印刷
2016 年 1 月第 1 版 · 第 1 次印刷
184mm × 260mm · 32 印张 · 1 插页 · 794 千字
标准书号：ISBN 978－7－111－50848－9
定价：88.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88361066	机 工 官 网：www. cmpbook. com
读者购书热线：010-68326294	机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
010-88379203	金 书 网：www. golden-book. com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www. cmpedu. com

译者序

线性代数作为大学数学的主干课程，其重要性不用赘述．在国内外众多中规中矩的线性代数教材中，约翰逊等人的这本《线性代数引论》可以说是取材新颖、独树一帜．

着手翻译这本教材的时候，我刚从国外做完博士后回来不久，雄心勃勃，又恰好在大学中讲授这门课程，于是在这本书上投入了全部的精力，几乎演算了书中所有的习题．在惊叹于原作者的精湛构思和巧妙设计的同时，也发现了一些笔误和不足之处．这本书的写作非常精良，是一本不可多得的优秀教材．体会之深，在此不妨与读者分享一二．

首先，在内容安排上，三位原作者可以说是煞费苦心．为了尽快引入线性组合和线性无关，第 1 章就使用了把矩阵写成列向量的方式，从而自然地引出了这两个概念．为了避免从线性方程组到一般向量空间的难度落差，还刻意安排了第 2 章作为过渡．介绍完一般向量空间以后，紧接着就进入了特征值问题，这样的安排既符合学生的认知规律，又强调了全书的两个重点——向量空间和特征值问题．

其次，这本教材所列举的各类应用例题是一大亮点，从数据拟合到最小二乘问题的全面介绍，从差分方程到微分方程，种群模型、马尔可夫链、基尔霍夫定律……各个学科的学生都能在这本教材中找到自己熟悉的领域．而且，对于线性代数的应用，作者一直在引导读者使用 MATLAB、Derive 这些强大的数学软件，特别是 MATLAB，有专门的附录介绍．在计算机如此普及的今天，这应该成为数学教育的必备内容．

最后，这本教材的习题设计十分精妙．很多习题都是前后关联，几个习题串起来构成了一个完整的课题，或者完成了一个极难定理的分步证明，当你做完这一连串习题的时候，一定会有豁然开朗的感觉．另外，习题中有大量的补充内容，让你在练习本节所学的同时，不自觉间已经在推导新知了．如果你使用这本教材而不做习题，那么你就失去了这本书一半的价值——虽然剩下一半的价值已经比其他教材更高了．

这么厚的一本教材，面面俱到，难免也会出现错漏之处．笔误之处主要是编号和下标等问题，我发现的都不加说明地做了修改．后面的答案也有一点小错误，这类问题我都尽量做了修改，之所以出现这样的问题，只是因为作者采用的是手动编号，而不是 LATEX 的自动编号．另外，这本书把很多重要的概念都放在了习题中，这种做法的好处在上一段已经说明，但是对于不准备认真做习题的读者来说，这样做的利弊得失是值得商榷的．

这本书适合作为理工类、经管类，甚至社会科学各科的低年级本科教材，也可以作为准备系统学习线性代数的高年级本科生或研究生的入门教材．对于想要自学线性代数的读者，这本书也是再合适不过了．

本书的翻译得以完成，要感谢我的爱人唐雯女士，是她的支持和鼓励让我一点一滴地完成了这个庞大的工程．为了让我有时间静下心来翻译，她独自承担了各项琐事．

仅凭一己之力和疏浅的学识完成这本教材的翻译工作，难免错漏，请读者不吝赐教．

孙瑞勇

前　　言

线性代数是大学教学的重要组成部分，特别是对于专业为理科、工科以及社会科学的这些学生. 从实际层面上来看，矩阵理论和相关的向量空间概念为提出并解决重要问题提供了一种语言和有力的计算框架. 除此之外，初等线性代数是对数学抽象和逻辑推理的重要介绍，因为其理论发展是自洽的、相容的并且对大多数学生都是可接受的.

因此，这本书既强调实际计算也强调理论基础，并且重点放在了前 4 章的主要内容上：

矩阵理论和线性方程组，向量空间的基本概念，以及特征值问题.

这些核心内容可以用于大一下学期或大二的一门简明课程. 对于更高级的课程或者时间更充裕的课程，第 5 ~ 7 章有足够多的额外内容.

特点

为大一新生和大二学生讲授线性代数的经验让我们谨慎地确立了这本教材的特点. 我们的方法是基于学生的学习方式，以及他们要在线性代数和相关课程中取得成功所需要的工具.

我们发现当内容难度一致的时候，学生学习的效率会更高. 因此，在第 1 章，我们很早就有目的地讨论了诸如线性组合和线性无关这样的话题. 这种方法帮助学生顺利地实现了从求解线性方程组到使用基和生成集合这些概念的巨大跳跃.

学生需要的工具（当他们需要的时候）

下面的例子说明了我们是如何为学生提供他们成功所需要的工具的.

特征值的尽早引入. 在第 3 章，我们在熟悉的 $\mathbf{R}^n$ 情形下介绍了向量空间的基本概念（子空间、基、维数等）. 因此，有可能很早就讨论特征值问题，并且比通常可能的讨论要深入得多. 对行列式的一个简明介绍在第 4.2 节给出，这是为了方便特征值的提早处理.

线性组合的尽早引入. 在第 1.5 节，我们注意到矩阵与向量乘积 $\boldsymbol{Ax}$ 可以表示成 $\boldsymbol{A}$ 的列的线性组合 $\boldsymbol{Ax}=x_1\boldsymbol{A}_1+x_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{A}_n$. 这个观点导致了线性方程组相关理论的一个简单而自然的发展. 例如，方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是相容的当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 可以表示成 $\boldsymbol{A}$ 的列的线性组合. 同样，相容的方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列是线性无关的. 这种方法对诸如子空间、基、维数这样的向量空间概念（在第 3 章中介绍）给出了一些早先的理由. 这种方法还简化了秩和零化度的概念（这些概念随即用适当的子空间的维数自然给出了）.

在不同研究领域的应用. 一些应用是源自差分方程和微分方程. 另外一些应用则涉及数据插值和最小二乘逼近. 特别地，来自各种不同学科的学生都遇到过画曲线来拟合实验或经验数据的问题. 因此，他们可以领会线性代数中能够应用于这些问题的技术.

计算机意识. 就像影响微积分课程一样，计算机（特别是个人计算机）的不断普及也

正在影响着线性代数课程. 因此，这本教材有点数值的风格，而且（适当的时候）我们会评述在计算机环境中求解线性代数问题的各个方面.

暴风雨中的慰藉

我们试图提供给学生的支持是这种类型的：它将促进线性代数学习的成功——这门课程是学生所修的最重要的大学数学课程之一.

难度的循序渐近. 在典型的线性代数课程中，学生感到高斯消元和矩阵运算非常简单. 然后，接踵而至的有关向量空间的概念突然难住了他们. 我们做三件事情来减缓中间难度的急剧增长：

1. 我们在第 1.7 节很早就引入了线性无关.
2. 我们包含进了新的第 2 章，“二维空间和三维空间中的向量”.
3. 我们在第 3 章中开始学习诸如子空间、基、维数这些向量空间概念，并且是在熟悉的 $\mathbf{R}^n$ 几何情形下.

阐述的清晰性. 对于许多学生来说，线性代数是他们自中学几何以来所修的最严格且最抽象的数学课程. 我们努力把这本教材写得易懂一些，但同时还要展示出它的几分数学抽象的力量. 为了达到这个目的，在内容的安排上，我们从具体的、可实际计算的内容自然而又合乎逻辑地过渡到更加抽象的内容. 为了说明概念，我们列举了大量的例子，很多都是非常详尽地提出的. 章节也被分成了黑体标题的小节，这样可以使读者在头脑中形成一个内容梗概，并且可以看出细枝末节是如何组成整体的.

丰富的习题集. 我们提供了大量的习题，范围从常规练习题到有趣的应用和理论性质的习题. 困难一些的理论性习题都有非常实质性的提示. 计算性习题采用易于计算的数，这样重点就不会被大量繁琐的算术细节掩盖.

可靠的习题答案. 除了理论性习题，奇数编号习题的解已在教材后面给出. 我们花费了大量精力来确保这些解答是正确的.

螺旋上升的习题. 很多章节都包含了一些习题来提示后面将要探讨的概念. 这样的习题有助于学生对已学的内容进行扩展. 由此学生可以悟出一点门道. 这个特性有利于内容的统一和凝聚.

历史评注. 书中有许多历史的评注，这可以帮助学生获得线性代数思想和概念的一个历史和数学的视角.

补充习题. 在每一章的末尾，我们包含了一个补充习题集. 这些习题用来检验学生对于重要概念的理解，其中一些是判断题. 它们通常需要学生使用几个不同章节的思想.

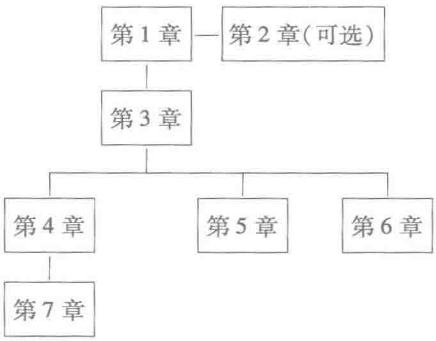
整合 MATLAB. 我们在每一章的末尾都包含了一些 MATLAB 课题. 对于对计算感兴趣的学生，这些课题提供了 MATLAB 的实际动手经验.

简短的 MATLAB 附录. 许多学生对 MATLAB 并不熟悉. 因此，我们包含了一个非常简明的附录，要让学生自如地运用 MATLAB 来解决线性代数中出现的典型问题，这个附录已经足够了.

通解的向量形式. 为了对线性组合和生成集做一个尽早的附加介绍，我们在第 1.5 节介绍了 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 通解的向量形式这一概念.

组织

为了提供更大的灵活性，第 4、5、6 章本质上是独立的. 读者只要学习完第 1 章和第 3 章，这几章就可以按照任意顺序来学. 第 7 章是有关特征值问题的一个大杂烩：二次型、微分方程组、QR 分解、豪斯霍尔德变换、广义特征向量，等等. 第 7 章各节可以用各种顺序学习. 下面给出了说明章节依赖性的一个示意图. 注意到第 2 章“二维空间和三维空间中的向量”可以不失连贯性地被省略掉.



我们特别注明，第 6 章（行列式）可以在第 4 章（特征值）之前学习. 但是，第 4 章包含了对行列式的一个简明的介绍，对于不打算学习第 6 章的读者，这应该已经足够了.

一门对初学者水平的简单而有用的课程可以围绕下面的章节构建：

第 1.1 ~1.3，1.5 ~1.7，1.9 节

第 3.1 ~3.6 节

第 4.1 ~4.2，4.4 ~4.5 节

整合抽象向量空间的教学提纲. 第 3 章在熟悉的 $\mathbf{R}^n$ 情形中介绍了向量空间的基本概念. 我们这样设计第 3 章是为了尽可能更早的讨论特征值问题，并且比通常可能的讨论更深入. 但是，很多教师更喜欢向量空间整合的方式，即把 $\mathbf{R}^n$ 和抽象向量空间结合起来. 下面的教学提纲，类似于在一些大学成功使用过的提纲，考虑到了整合抽象向量空间到第 3 章的课程. 这个教学提纲还涉及了行列式的详尽处理：

第 1.1 ~1.3，1.5 ~1.7，1.9 节

第 3.1 ~3.3，5.1 ~5.3，3.4 ~3.5，5.4 ~5.5 节

第 4.1 ~4.3，6.4 ~6.5，4.4 ~4.7 节

核心章节的扩展. 如果时间和兴趣允许，可以通过包含进下面章节的各种组合，来扩展核心章节 1.1 ~1.3，1.5 ~1.7，1.9，3.1 ~3.6，4.1 ~4.2，4.4 ~4.5：

(a) 数据拟合和逼近：第 1.8，3.8 ~3.9，7.5 ~7.6 节.

(b) 特征值应用：第 4.8，7.1 ~7.2 节.

(c) 向量空间理论的更深入：第 3.7 节，第 5 章.

(d) 特征值理论的更深入：第 4.6 ~4.7，7.3 ~7.4，7.7 ~7.8 节.

(e) 特征值理论：第 6 章.

为了使尽快接触特征值成为可能，第 4 章包含了行列式的一个简明介绍. 如果时间允许

且合乎需要，可以在第 3 章以后学习一下第 6 章（行列式）. 在这样的课程中，第 4.1 节可以快速学习，而第 4.2 ~4.3 节则可以跳过.

最后，为了培养学生的数学头脑，我们提供了几乎所有定理的证明. 但是，一些非常有技巧性的证明(例如证明 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$)被推迟到了章节的末尾. 一如既往地，时间和课堂教学成熟程度的限制决定了哪些证明可以被省略.

目　录

第 1 章

矩阵与线性方程组

概述

这一章我们讨论线性方程组及其解法(例如高斯-约当消元法). 作为描述方程组和高斯-约当解法的便捷语言，我们引入了矩阵的概念.

接下来我们介绍了矩阵的加法和乘法运算，并指出了怎样利用这些运算把线性方程组表示成如下的矩阵-向量形式：

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示成列的形式 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n)$后，我们进一步指出，方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 等价于

$$x_1\boldsymbol{A}_1+x_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{b}.$$

上述方程自然而然地引出线性组合和线性无关的概念. 反过来，这些概念使我们可以着手解决 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的存在性和唯一性问题，以及引入逆矩阵的概念.

核心章节

1.1 矩阵与线性方程组简介

在现实世界中，很少有问题会简单到仅依赖于一个输入变量。例如，一个生产厂商的利润毫无疑问要依赖于原材料成本，但也同时依赖于其他输入变量如劳动力成本、运输成本以及工厂费用. 对利润的实际表示应该包含所有这些变量. 用数学的语言，我们说利润是一个**多变量函数**.

在线性代数中我们研究最简单的多变量函数，即线性函数. 我们的研究从考虑线性方程入手. 举例来说，方程

$$x_1+2x_2+x_3=1$$

是线性方程的一个例子，而 $x_1=2$，$x_2=1$，$x_3=-3$ 是该方程的一个解. 一般而言，一个关于 n 个未知数的线性方程，是指可以写成下列形式的方程：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b. \tag{1}$$

在方程(1)中，系数 a_1，a_2，…，a_n 以及常数项 b 是已知的，x_1，x_2，…，x_n 表示未知数. 方程(1)的一个**解**，是指任意这样的数列 s_1，s_2，…，s_n，当代入 $x_1=s_1$，$x_2=s_2$，…，$x_n=s_n$ 时，可以满足该方程.

方程(1)被称为线性的，是因为它的每一项关于变量 x_1，x_2，…，x_n 都是一次的.（另外，也可以参见习题 37.[⊖]）

例 1 判断下列哪些方程是线性的.

(i) $x_1+2x_1x_2+3x_2=4$ (ii) $x_1^{1/2}+3x_2=4$

(iii) $2x_1^{-1}+\sin x_2=0$ (iv) $3x_1-x_2=x_3+1$

解 只有方程(iv)是线性的. x_1x_2，$x_1^{1/2}$ 以及 $\sin x_2$ 这几项都是非线性的.

线性方程组

我们的目标是找到由一个或多个线性方程构成的方程组(即一组方程)的联立的解. 下面是三个线性方程组的例子.

(a) $\begin{aligned}x_1+x_2&=3\\x_1-x_2&=1\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned}x_1-2x_2-3x_3&=-11\\-x_1+3x_2+5x_3&=15\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}3x_1-2x_2&=1\\6x_1-4x_2&=6\end{aligned}$

关于这些方程组的解，不难验证 $x_1=2$，$x_2=1$ 是方程组(a)的一个解. 实际上，可以证明这也是该方程组的**唯一**解.

另一方面，$x_1=-4$，$x_2=2$，$x_3=1$ 以及 $x_1=-2$，$x_2=6$，$x_3=-1$ 都是方程组(b)的解. 实际上，通过直接代入检验可以证明，任选一个 x_3，令 $x_1=-3-x_3$，$x_2=4-2x_3$，都可以得到方程组(b)的一个解. 因此，这个方程组有无穷多个解.

最后，注意到方程组(c)中给出的方程可以看成是表示平面上的两条平行直线. 因此，方程组(c)无解.（可以得出方程组(c)无解的另一种方法是，观察方程组(c)中的第二个方

⊖ 习题 37 给出了线性的更形象化的解释，即“线”可解释成“直线”. ——译者注

程，两边同时除以 2，化简成 $3x_1-2x_2=3$. 因为第一个方程要求 $3x_1-2x_2=1$，所以没有办法同时满足这两个方程.）

一般地，一个$(m\times n)$**的线性方程组**是指如下形式的一组方程：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m. \end{aligned} \tag{2}$$ [⊖]

例如，(3×3)线性方程组的一般形式为

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3. \end{aligned}$$

方程组(2)的一个**解**，是指一个数的序列 s_1，…，s_n，它同时是方程组中每个方程的解. 为了给每个系数提供一个“名称”，系数中采用双下标的记号是很有必要的. 例如，a_{32}作为 x_2 的系数出现在第三个方程.

例 2‖　(a) 写出系数为 $a_{11}=2$，$a_{12}=-1$，$a_{13}=-3$，$a_{21}=-2$，$a_{22}=2$，$a_{23}=5$，且常数项为 $b_1=-1$，$b_2=3$ 的线性方程组.

(b) 验证 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=1$ 是该方程组的一个解.

解　(a) 方程组为

$$\begin{aligned} 2x_1-\ \ x_2-3x_3&=-1\\ -2x_1+2x_2+5x_3&=\ \ 3. \end{aligned}$$

(b) 代入 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=1$ 得到

$$\begin{aligned} 2\times1-\quad 0-3\times1&=-1\\ -2\times1+2\times0+5\times1&=\ \ 3. \end{aligned}$$

解集的几何解释

运用几何上的例子，我们可以得到关于线性方程组解集性质的一个初始印象. 比如，考虑一个一般的(2×2)线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1(a_{11},\ a_{12}\text{不同时为 }0)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2(a_{21},\ a_{22}\text{不同时为 }0). \end{aligned}$$

从几何上看，每个方程的解集都可以用平面上的一条直线来表示. 因此，方程组的一个解，对应于这些直线的一个交点$(x_1,\ x_2)$. 根据这一几何解释，可确知有三种可能：

1. 两条直线重合(同一条直线)，所以有无穷多个解.
2. 两条直线平行(永不相交)，所以没有解.
3. 两条直线相交于一点，所以有唯一解.

图 1.1 和例 3 阐明了这三种可能.

⊖ 为了使表述更清楚，我们在这一章始终假设常量 a_{ij} 和 b_i 为实数，虽然所有的论述对于复数常量也是同样适用的. 当考虑特征值问题的时候，我们会不时地碰到含有复系数的线性方程组，但是求解的方法并没有什么不同. 在第 4 章中我们将讨论求解复系数线性方程的方法细节.

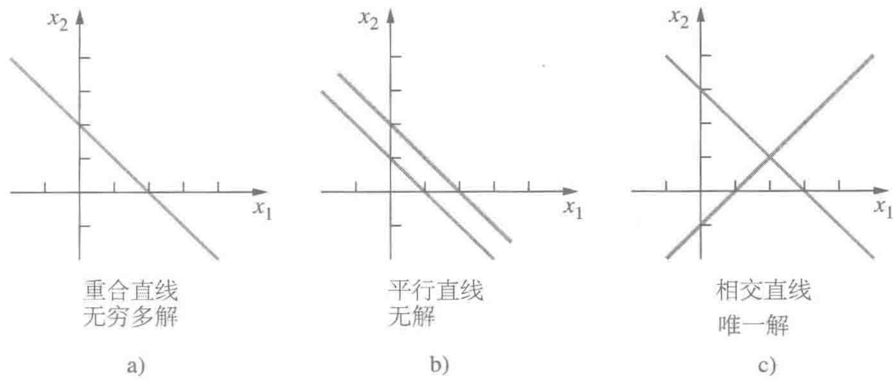


图 1.1　(2×2)方程组解集的三种可能

例 3 ‖　给出下列每个线性方程组的几何表示.

(a) $x_1 + x_2 = 2$　　(b) $x_1 + x_2 = 2$　　(c) $x_1 + x_2 = 3$

$2x_1 + 2x_2 = 4$　　$x_1 + x_2 = 1$　　$x_1 - x_2 = 1$

解　这些几何表示分别显示在图 1.1a ~ c 中.

三变量的线性方程 $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ 的图像，是三维空间中的一个平面(只要 a，b，c 中有一个非零). 因此，作为另一个例子，我们来考虑一般的(2×3)方程组：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2.$$

因为每个方程的解集都可以用一个平面表示，所以有两种可能：

1. 两个平面可能重合，或者可能交于一条直线. 这两种情况下，方程组有无穷多个解.
2. 两个平面可能平行. 在这种情况下，方程组无解.

注意，对于一般的(2×3)方程组来说，唯一解的可能性已经被排除.

作为最后的例子，考虑一个一般的(3×3)方程组：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

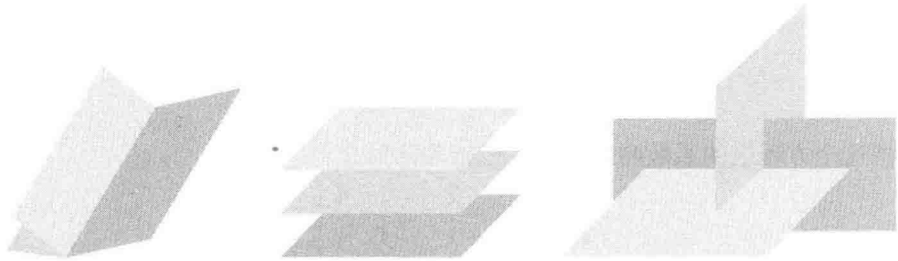
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

如果我们把这个(3×3)方程组看作是表示三个平面，从几何的角度很容易看出，有三种可能的结果：无穷多个解、无解、唯一解(见图 1.2a ~ c). 注意图 1.2b 并没有画出(3×3)方程组无解的所有可能情形. 例如，如果三个平面中只有两个平行，那么即使第三个平面有可能跟两个平行平面的每一个都相交，方程组仍然无解.

我们用以下的一个备注来结束本小节，我们将在第 1.3 节正式表述它(见定理 3 的推论). 这个备注是说，图 1.1 和图 1.2 的几何解释所显示的可能结果，对于任意的线性方程组都具有代表性.

备注　一个($m \times n$)的线性方程组或者有无穷多个解，或者无解，或者有唯一解.



a) 无穷多个解　　b) 无解　　c) 唯一解

图 1.2　一般的(3×3)方程组解集的三种可能

一般地，一个方程组被称为**相容的**，如果它至少有一个解. 如果该方程组无解，则它被称为是**不相容的**. 根据前面的备注，相容的方程组或者有一个解，或者有无穷多个解；例如，一个线性方程组不可能恰好有 5 个解.

矩阵

通过把矩阵与求解线性方程组的问题相关联，我们开始矩阵理论的介绍. 一开始我们指出矩阵理论为描述线性方程组提供了一套方便而又自然的符号语言. 接下来我们说明矩阵理论还是一个既合适又强大的体系，在此体系下，我们可以分析和解决更一般的线性问题，例如最小二乘近似、线性变换的表示以及特征值问题.

矩形的阵列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

是矩阵的一个例子. 更一般地，一个$(m \times n)$**的矩阵**是指一个矩形的数的阵列，形如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

从而，一个$(m \times n)$的矩阵有 m 行 n 列. 元素 a_{ij}的下标表明该数出现在 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列. 例如，a_{32}是 $\boldsymbol{A}$ 的第三行第二列的元素. 我们会经常使用记号 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$来表示元素为 a_{ij}的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

例 4‖　写出(2×3)的矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 $a_{11}=6$，$a_{12}=3$，$a_{13}=7$，$a_{21}=2$，$a_{22}=1$，$a_{23}=4$.

解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

线性方程组的矩阵表示

为了阐明如何用矩阵来表示线性方程组，考虑(3×3)的方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

如果把这个方程组的系数和常数项写成矩阵的形式，

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

那么我们就已经把所有重要的信息都完整而自然地表示出来了. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 被称为该方程组的**增广矩阵**.

一般地，对于$(m \times n)$的线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{3}$$

我们关联两个矩阵. 方程组(3)的**系数矩阵**是一个$(m \times n)$的矩阵 $\boldsymbol{A}$，这里

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

方程组(3)的**增广矩阵**是一个$[m \times (n+1)]$的矩阵 $\boldsymbol{B}$，这里

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

注意到 $\boldsymbol{B}$ 只不过是将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 增加了一列：这多出来的一列正是方程组(3)的右侧.

增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 通常记成$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是系数矩阵，而

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

例 5 写出下列方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\boldsymbol{B}$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5. \end{aligned}$$

解 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$由下式给出

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

初等变换

正如我们将要看到的，求解一个$(m\times n)$的方程组涉及两个步骤. 这些步骤是：

1. 方程组的化简(即消去变元).
2. 解集的描述.

这两步的细节我们留到下一节来介绍. 这一节的剩下部分，我们将重点给出化简步骤的一个概述.

化简过程的目标是通过消去未知数来化简给定的方程组. 当然，化简后的方程组要与原来的方程组有相同的解集，这一点很重要.

定义 1　包含 n 个未知数的两个线性方程组称为**同解的**，假如它们有相同的解集.

因此化简过程必须要得到同解的方程组. 下面的定理提供了三种变换，称为**初等变换**，可以用于化简.

定理 1　如果对一个线性方程组施以如下的初等变换之一，那么得到的方程组与原来的方程组同解.

1. 交换两个方程.
2. 用非零的数量乘一个方程.
3. 把一个方程的常数倍加到另一个方程.

(在定理 1 的第 2 条中，数量这个词指的是常数，也就是一个数.)定理 1 的证明包含在第 1.1 节的习题 41 中.

为了方便使用上面列举的初等变换，我们采用如下记号：

记号	**所施初等变换**
$E_i\leftrightarrow E_j$	第 i 个和第 j 个方程交换.
kE_i	用非零数量 k 乘第 i 个方程.
E_i+kE_j	第 j 个方程乘 k 加到第 i 个方程.

下面这个简单的例子展示的是用初等变换来求解一个(2×2)的方程组. (对一般的$(m\times n)$方程组的完整求解过程，将在下一节详细描述.)

例 6‖　用初等变换求解方程组

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2&=5\\ -x_1+2x_2&=4. \end{aligned}$$

解　初等变换 E_2+E_1 得如下同解的方程组：

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2&=5\\ 3x_2&=9. \end{aligned}$$

然后由变换$\frac{1}{3}E_2$ 推出

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=5\\ x_2&=3. \end{aligned}$$