21世纪高等院校教材

应用概率论

（第三版）

孙荣恒　编著

科学出版社

21世纪高等院校教材

应用概率论

(第三版)

孙荣恒　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为高等院校理工科教材，内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、特征函数与概率母函数、极限定理等. 本书内容丰富，有大量的例题和适量的习题，书后附有部分习题答案.

本书适于高等院校理工科的数学、应用数学、概率统计、信息与计算科学等专业和财经类大学的大学生、教师和研究生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

应用概率论/孙荣恒编著. —3 版. —北京：科学出版社，2016. 1
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-046863-5

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①概率论-应用-高等学校-教材 Ⅳ. ①O211. 9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 308749 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：霍 兵 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998年10月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006年1月第 二 版 印张：20
2016年1月第 三 版 字数：403 000
2016 年 1 月第九次印刷

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第三版序言

作者认为教材应该不断吐故纳新，尤其是纳新. 根据这个精神，本书在第一版中，利用 Dirac 函数，给出离散型随机变量密度函数定义，从而使随机变量（无论是连续型的还是离散型的）的密度函数与特征函数构成一傅里叶变换对，且其数学望与特征函数都可用一个式子给出；利用詹生不等式给出二维詹生不等式；利用分赌注问题给出在不同比赛规则中获胜的概率计算；还在文献[2]的基础上给出引理5.2.1及其证明. 在第二版中，给出连续随机变量的函数的两个母公式（例2.7.10），这两个母公式不仅涵盖了四则运算，还能进行其他很多运算；还给出了彩票获奖概率计算公式（(1.5.1)式）. 在这一版中，给出了频数分布与频数母函数定义及其应用；S 矩阵定义及其应用；纸上作业法及其应用；三事件之一先发生的概率计算公式；还以习题的形式给出了 S 分布的定义. 此外，增加了 3.4 节与 3.5 节两节，前者讨论了离散型随机变量与连续型随机变量的四则运算与函数，后者利用概率模型证明了近一百个组合公式，这些组合公式几乎涵盖了数学手册中常见的组合公式.

上述给出和增加的内容绝大部分是本书首次给出的.

在这一版中，还增加了一些例题和习题，增加了例 3.4.9 与例 4.4.3 的另一解法. 删去了超要求的内容，和给一些复杂的内容加了“*”. 这些加了“*”的内容仅作参考. 本书内容极其丰富，涉及多方面的应用，它也是教师、研究生和工程技术人员的一部参考书.

最后，由于作者水平所限，虽然经过多次修改，书中可能还有不少缺点和疏漏，恳请读者批评指正.

作　者

2014 年 4 月

第二版序言

本书是1998年科学出版社出版的《应用概率论》的修改本.除尽可能改正原书的印刷错误和删去一些超要求的内容外,还增加了一些推导的说明、一些例题的解法和几个应用例题.这样,不仅便于读者理解与自学,而且也有利于初学者启迪思维与开阔视野.

科学出版社对本书第二版的出版给予了大力支持,作者表示衷心感谢.

本书虽然经过多次修改,多年使用,但是,由于作者水平所限,书中一定还存在不少缺点和错误,恳请读者批评指正.

作　者

2005年3月

第一版序言

概率论起源于机会游戏. 它的某些思想在公元前 220 年就已在中国出现. 不过它的真正历史被公认为从 17 世纪中叶开始. 1654 年法国有个叫 De Méré 的赌徒向数学家 Pascal(1623～1662)提出了一个如何分赌注的问题(也叫分点问题),简略地说,就是甲、乙两个赌徒下了赌注后就按某种方式赌了起来,规定甲胜一局甲就得一分,乙胜一局乙也得一分,且谁先得到某个确定的分数谁就赢得所有赌注. 但是,在谁也没获得确定的分数之前赌博因故中止了. 如果甲需得 n 分才获得所有赌注,乙需得 m 分才获得所有赌注,问该如何分这些赌注呢? 为解决这一问题, Pascal 与当时享有很高声誉的数学家 Fermat(1601～1665)建立了联系,从而使当时很多有名的数学家对这一问题产生了浓厚的兴趣,并使得概率论这个新学科得到了迅速的发展. 对概率论的发展作出杰出贡献的还有:17～18 世纪的惠更斯(Huyghens)、伯努利(Bernoulli)、棣莫弗(De Moivre)、辛普森(Simpson)、蒲丰(Buffon),19 世纪的拉普拉斯(Laplace)、高斯(Gauss)、泊松(Poisson)、切比雪夫(Chebyshev)、马尔可夫(Markov),20 世纪的柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)、辛钦(Khinchine)等.

本书是为应用数学、数学、概率统计、信息与计算科学等专业的大学生学习概率论而编著的教材,曾在重庆大学使用多年. 撰写过程中参考了教育部 1980 年颁布的综合大学数学专业《概率论与数理统计教学大纲》. 本书的特点是:概念的直观背景较强,材料系统丰富,理论推导严谨,同时注意实际应用. 书中有大量的应用例题,故它既可作为教材,也可作为参考书. 本书的另一特点是起点低,一般只需具有数学分析或高等数学知识就可阅读,因此便于初学者自学. 经适当选择后,也可作为理科其他专业和工科有关专业的教材.

全书共 5 章,每章后附有适量的习题,书后附有答案.

初稿完成后,李虹、刘琼荪、何良材仔细览阅了全书,提出了许多宝贵意见;李幼英为初稿的打印出了不少力. 作者在此向他们表示衷心感谢.

由于作者水平所限,书中不足之处在所难免,恳请读者批评指正.

作　者

1998 年 4 月于重庆

目　录

第 1 章 随机事件及其概率

随机事件与随机事件的概率都是概率论中最基本的概念，它们是逐步形成与完善起来的. 本章先给出它们的描述性定义，然后再给出它们的严密的数学定义.

1.1 随 机 事 件

1.1.1 随机现象

在自然界中人们碰到的现象大体上可分为两类. 一类是当某些条件实现时必然发生和必然不发生的现象. 例如，“纯水在一个大气压下加热到 100℃就沸腾”、“同性电荷必然不互相吸引”、“在恒力作用下质点作等加速运动”等，这一类现象称之为确定性现象或必然现象. 但是，人们还碰到另一类现象，这一类现象在相同一组条件实现时它可能发生也可能不发生，事前不能准确预言它是否发生. 例如，“抛一枚硬币，每次抛掷之前无法肯定正、反面哪一面会出现”. 又如，“同一人用同一支枪射击同一目标，每次射击的击中点不尽相同”、“同一地区同一日期可能下雨，也可能不下雨”等. 这一类现象称之为随机现象. 随机现象虽然在相同条件实现时可能的结果不止一个，以及每次事前不能准确预言哪一种结果会出现，但是经过长期的观察或实践，人们逐步发现所谓随机现象不可预言，只是对一次或少数几次观察或实践而言，当在相同条件下进行大量的观察或实践时，不确定现象的每个可能的结果都呈现出某种规律性. 例如，多次抛一枚均匀的硬币，正、反面出现的次数大致相等. 又如，在相同条件下多次射击同一目标，击中点在目标附近就形成某种明显的规律性. 综上所述，随机现象是具有如下特征的现象：在一定条件实现时，有不止一种结果会出现，对每一次来说，事前人们不能准确预言哪一种结果会出现，但是进行大量的重复观察或实践时，每一种结果又呈现出某种规律性. 这种规律性称之为随机现象的统计规律性. 概率论就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1.2 随机试验

由于随机现象的统计规律性在大量重复试验中才能呈现出来，故概率论的研究与应用跟试验是分不开的. 所谓试验，就是实现一定的条件而观察其结果. 而随机试验是具有如下特性的试验：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但是能事先明确确定所有可能结果的

范围;

(3) 每次试验之前不能准确预言哪个结果会出现.

例如,E_1(重复摸球试验):设一袋中有编号分别为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个同类球,从中任摸一球,观察其号码后又放回袋中,然后再从中任摸一球,观察其号码后又放回袋中(这样的摸球方法称为“有放回”).多次重复这一试验,各次摸得的球的号码未必全同.虽然每次摸得的球的号码总是 $1,2,\cdots,n$ 之一,但是每次摸球前却不能准确预言哪个球被摸得.

E_2(旋转均匀陀螺的试验):在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间 $[0,3)$ 上的诸数字.多次旋转这个陀螺,当它停下时其圆周与桌面接触处的刻度未必全同.虽然每次总是区间 $[0,3)$ 上一个点与桌面接触,但是每次旋转之前却无法准确预言哪个点与桌面接触.

E_3(射击试验):多次用步枪射击靶上的目标,由于各种因素的影响,子弹击中的位置未必一样.虽然每次击中的位置总是靶平面上的一点,但是每次射击前也不能准确预言击中的位置.

E_4(抛一枚均匀硬币的试验):多次抛一枚均匀的硬币,出现的结果未必会全同.虽然每次出现的结果不是正面 h,就是反面 t,但是每次抛前也不能准确预言哪个面会出现.

上述的四个试验都是随机试验.随机试验简称为试验.

1.1.3　随机事件

随机试验的每个可能的结果称为该试验的随机事件,简称为事件.一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示.

例如,在试验 E_1 中,“摸得球的号码小于3”是试验 E_1 的一个可能结果,故它是 E_1 的一个随机事件.在试验 E_2 中,“陀螺圆周与桌面接触处的刻度在区间 $[1,2)$ 中”是试验 E_2 的一个可能的结果,故它是 E_2 的一个随机事件.在试验 E_4 中,“正面出现”是试验 E_4 的一个可能结果,故它是 E_4 的一个随机事件.

对于一个试验来说,在每次试验中必然要发生(出现)的结果称为此试验的必然事件,记为 Ω;在每次试验中必然不发生(出现)的结果称为此试验的不可能事件,记为 $\varnothing$.例如,在 E_1 中,“摸得的球的号码大于0”是 E_1 的必然事件,而“摸得的球的号码小于1”是 E_1 的不可能事件.

必须指出,必然事件与不可能事件都没有随机性,但是为了讨论问题方便起见,我们把它们当作一种特殊的随机事件.

1.1.4　基本事件空间

对一个试验来说,我们把其最简单的不能再分的事件称为该试验的基本事件,

常以小写字母 $e, w, \cdots$ 来表示. 而把由所有基本事件组成的集合称为该试验的基本事件空间, 记为 Ω.

例如, 在 E_1 中, "摸得号码为 i 的球", $i=1,2,\cdots,n$, 均为 E_1 的基本事件, 有 n 个. 在 E_2 中, 设 $x\in[0,3)$, 则"陀螺圆周与桌面接触处的刻度为 x"是 E_2 的基本事件, 有无穷不可数多个. 在 E_3 中, 设 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 则"击中点 (x,y)"是 E_3 的基本事件, 有无穷不可数多个. 在 E_4 中, "出现正面"与"出现反面"都是 E_4 的基本事件, 有两个. 如果设 Ω_i 为 E_i 的基本事件空间, $i=1,2,3,4$, 则有

$$\Omega_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\},$$

其中 e_i 表示"摸得号码为 i 的球", $i=1,2,\cdots,n$;

$$\Omega_2 = \{x : x\in[0,3)\};$$

$$\Omega_3 = \{(x,y) : x,y\in(-\infty,+\infty)\};$$

$$\Omega_4 = \{h,t\},$$

其中 h,t 分别表示"出现正面"与"出现反面".

因为随机事件是由基本事件组成的集合, 所以引入基本事件空间 Ω 后, 随机事件就是基本事件空间的子集(注意, 反之不成立, 即基本事件空间的子集不一定是随机事件). 而一个事件 A 出现当且仅当 A 中一个基本事件出现. 基本事件空间又叫做样本空间, 所以基本事件又叫做样本点.

1.2 事件之间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集, 所以事件之间的关系就是集合之间的关系, 事件的运算就是集合的运算, 只是术语不同和赋予概率的含义罢了.

1.2.1 事件之间的关系与简单运算

(1) 子事件. 如果属于事件 A 的样本点也属于事件 B, 则称 A 为 B 的子事件或 A 为 B 的特款, 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 其概率含义是: A 出现 B 必出现. 对任意事件 A, 显然有

$$A\subset\Omega, \quad \varnothing\subset A, \quad A\subset A.$$

设 A,B,C 均为事件, 如果 $A\subset B$, 且 $B\subset C$, 则 $A\subset C$.

(2) 事件相等. 如果事件 A 与事件 B 满足: $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$. 其概率含义是: A,B 中有一个出现, 另一个也必出现.

(3) 和(并)事件. 事件 A 与事件 B 的和事件定义为: 由至少属于 A,B 之一的样本点全体组成的集合, 记为 $A\cup B$. 其概率含义是: A,B 至少一个出现. 事件 A_1, $A_2,\cdots,A_n$ 的和事件定义为: 由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之一的样本点全体组成的

集合,记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件$A_1,A_2,A_3,\cdots$的和事件定义为:由至少属于$A_1,A_2,A_3,\cdots$之一的样本点全体组成的集合,记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$与$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$的概率含义与$A\cup B$的概率含义类似.

(4) 积(交)事件. 事件A与B的积事件定义为:由既属于A又属于B的样本点全体组成的集合,记为$A\cap B$或AB. 其概率含义是:A与B同时出现. 事件A_1, $A_2,\cdots,A_n$的积事件定义为:由属于所有事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的样本点全体组成的集合,记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$或$A_1A_2\cdots A_n$. 事件$A_1,A_2,A_3,\cdots$的积事件定义为:由属于所有事件$A_1,A_2,A_3,\cdots$的样本点全体组成的集合. 记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$与$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$的概率含义类似于$A\cap B$的概率含义.

如果事件A与B满足:$AB=\varnothing$,则称A与B为互斥(或互不相容)事件. 其概率含义是:A,B不同时出现.

如果事件A与B满足:$AB=\varnothing$且$A\cup B=\Omega$,则称A与B为对立(或互逆)事件. 其概率含义是:A,B中有且仅有一个出现.

如果事件A与B互斥,则记$A\cup B$为$A+B$,即$A+B=A\cup B$.

由上述知,两事件对立则它们一定互斥;反之,未必成立.

(5) 差事件. 属于事件A而不属于事件B的样本点全体组成的集合称为A与B的差事件,记为$A\setminus B$. 其概率含义是:A出现而B不出现. 如果$B\subset A$,则称$A\setminus B$为A与B的正常差,记为$A-B$,即$A-B=A\setminus B$.

记$\Omega-A$为$\overline{A}$,即$\overline{A}=\Omega-A$. 显然有

事件A与B对立$\Leftrightarrow A=\overline{B}$.

$\overline{A}=\Omega-A$为事件A的对立事件.

(6) 对称差. 设A,B为两个事件,记$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$,则称$A\Delta B$为$A$与$B$的对称差事件. 其概率含义是:仅能出现$A,B$之一.

因为事件是集合,所以由集合运算的性质与关系式不难证明事件运算的性质与关系式. 设$A,B,C,A_1,A_2,A_3,\cdots$均为事件,Ω为必然事件,$\varnothing$为不可能事件,则有如下关系:

(1) $A\cup A=A, A\cap A=A, A\cup\varnothing=A$,

$A\setminus A=\varnothing, A\cap\varnothing=\varnothing$;

(2) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A, A\Delta B=B\Delta A$;

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C), (AB)C=ABC=A(BC)$,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap C),$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup C = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \cup C);$$

(4) $AB\subset A, AB\subset B, A\subset A\cup B, A\subset A, A\setminus B\subset A$;

(5) $A\subset B\Leftrightarrow AB=A\Leftrightarrow A\cup B=B$;

(6) $\overline{\overline{A}}=A, \overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

$A\setminus B=A\,\overline{B}=A-(AB)$;

(7) $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$;

(8) $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}, \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$;

(9) $A\Delta B=A\,\overline{B}+B\overline{A}=(A\cup B)-AB=(A\cup B)\overline{AB}$.

上述关系式的证明留给读者自己去完成.

1.2.2 事件序列的极限

设$\{A_n\}$为样本空间Ω中的事件序列,我们定义:

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ 为$\{A_n\}$的上极限,记为$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k;$$

(2) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ 为$\{A_n\}$的下极限,记为$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$,即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k;$$

(3) 如果$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$,则称事件序列$\{A_n\}$的极限存在且称$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 为其极限,记为$\lim_{n\to\infty}A_n$,即

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

定理 1.2.1 设$\{A_n\}$为样本空间Ω中的事件序列,则

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{e:e$ 属于无穷多个 $A_n\}$;

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{e:e$ 属于几乎一切 $A_n\}$,

其中"e 属于几乎一切 A_n"意思是除事件序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$中的有限个事件外,e属于其余一切事件.

证明 (1)设 $e_0\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$,则对任意正整数 n,$e_0\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$,所以 e_0 属于无穷多个 A_n. 如果不然,则必存在 n_0,使得当 $m>n_0$ 时均有 $e_0\overline{\in}\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k$,矛盾. 于是证得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \{e: e\text{ 属于无穷多个 }A_n\}.$$

反之，设 $e_0\in\{e:e$ 属于无穷多个 $A_n\}$，则对任意正整数 n 有 $e_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，从而 $e_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$. 于是得$\{e:e$ 属于无穷多个 $A_n\}\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，从而(1)得证.

(2) 设 $e_0\in\{e:e$ 属于几乎一切 $A_n\}$，则存在正整数 m，使得 $e_0\in\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}A_k$，故$e_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，即

$$\{e:e\text{ 属于几乎一切 }A_n\}\subset \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

反之，设 $e_0\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，则至少存在一个正整数 m 使 $e_0\in\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}A_k$，故对一切 $k\geqslant m$，均有 $e_0\in A_k$，即 e_0 属于几乎一切 A_n，所以有$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\{e:e$ 属于几乎一切 $A_n\}$，从而(2)得证.

推论 1.2.1 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

推论 1.2.2 改变事件序列$\{A_n\}$中的有限多项不影响$\{A_n\}$的上下极限.

推论 1.2.3 (1) $\left(\overline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}\right)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \overline{A_n}$；

(2) $\left(\overline{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}\right)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \overline{A_n}$.

证明 (1) 由德摩根对偶定律[即 1.2.1 节的(8)式]得

$$\left(\overline{\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n}\right)=\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_n}\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k}\right)$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\overline{A_k}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{A_n}.$$

同理可证(2).

定理 1.2.2 设$\{A_n\}$为样本空间 Ω 中的事件序列.

(1) 如果$\{A_n\}$单调不减，即 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

(2) 如果$\{A_n\}$单调不增，即 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

证明 (1) 设 $e_0\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，由定理 1.2.1 知 e_0 属于无穷多个 A_n，故总存在正整数 m，使得 $e_0\in A_m$. 因为$\{A_n\}$单调不减，所以当 $k\geqslant m$ 时均有 $e_0\in A_k$，即 e_0 属于几乎一切 A_n，所以 $e_0\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 由此说明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 又由推论 1.2.1 知 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，所以证得(1).

(2) 因为$\{A_n\}$单调不增，所以$\{\overline{A_n}\}$单调不减，由(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{A_n}$ 存在且

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{A}_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{A}_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n.$$

由定理 1.2.1 的推论 1.2.3,对上式两边取逆得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

为了便于学习,现把概率论中与集合论中的一些术语对照列成表 1.1 所示.

表 1.1

符　号	集 合 论	概 率 论	概率含义
Ω	空间	基本事件(样本)空间,必然事件	
$\varnothing$	空集	不可能事件	
e(或 ω)	元素	基本事件(样本点)	
A	子集	事件	
$\overline{A}$	A 的余集	A 的对立(逆)事件	$A,\overline{A}$ 中有且只有一个出现
$A\subset B$	A 为 B 的子集	A 是 B 的子事件	A 出现 B 必出现
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 相等	A,B 中一个出现另一个也出现
$A\cup B$	A 与 B 的并	A 与 B 的和(并)事件	A,B 中至少一个出现
$A\cap B$	A 与 B 的交	A 与 B 的积事件	A 与 B 同时出现
$A\setminus B$	A 与 B 的差	A 与 B 的差事件	A 出现而 B 不出现
$A\cap B=\varnothing$	A 与 B 不相交	A 与 B 为互斥(互不相容)事件	A 与 B 不同时出现
$A\Delta B$	A 与 B 的对称差	A 与 B 的对称差事件	A 与 B 仅能有一个出现

1.3 事件的概率及其计算

随机事件有其偶然性的一面,即在一次试验中它可能出现也可能不出现. 但是在大量重复试验中它又呈现出内在的规律性,即它出现的可能性大小是确定的,且是可以度量的. 所谓随机事件的概率,概括地说就是用来描述随机事件出现的可能性大小的数量指标. 它是概率论中最基本的概念之一,且是逐步形成完善起来的. 我们先介绍在简单情形下,如何合理地定义概率的方法,然后,从这些定义出发,引出一般情形下概率的严密的数学定义.

1.3.1 古典概型

最初人们研究的试验是一类很简单的试验,其特征如下:

(1) 基本事件总数有限;

(2) 每个基本事件等可能出现.

我们称具有这两个特征的试验是古典概型的. 如 1.1.2 节中的试验 E_1 与 E_4 都是古典概型的.

定义 1.3.1 设试验 E 是古典概型的,其样本空间为 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,其一事件 $A=\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_r}\}$,其中 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中任意 r 个不同的数,$r\leqslant n$,则定义事件 A(出现)的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点数}}=\frac{r}{n},$$

并称这样定义的概率为古典概率.

由定义知,事件$\{e_1\},\{e_2\},\cdots,\{e_n\}$的概率为

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}.$$

例 1.3.1 从一批 1250 件正品 10 件次品组成的产品中任抽一件,求抽得次品的概率.

解 设 A="抽得次品". 因为抽得的一件产品只能是 1260 件产品之一,所以样本点总数为 1260. 又因每件产品都等可能被抽得,故此抽样试验是古典概型的. "抽得次品"只能是 10 件次品之一,故 A 中基本事件数为 10,从而 $P(A)=\frac{10}{1260}=\frac{1}{126}$.

例 1.3.2 设一袋中有 85 个白球,8 个黑球,接连无放回地从袋中摸取 3 个球,求下列事件的概率:

(1) A="摸得的 3 个球依次为黑白黑";

(2) B="摸得的 3 个球都是黑球";

(3) C="摸得的 3 个球中有两个是黑球".

解 设想球都是编了号的.

(1) 由排列组合知识知,从 93 个不同的球中任取 3 个排成一列,有 P_{93}^3 种不同的排列方式,故基本事件总数为 P_{93}^3. 而要使 A 出现,第一、二、三次应分别摸得黑球(有 P_8^1 种方式实现)、摸得白球(有 P_{85}^1 种方式实现)、摸得黑球(有 P_7^1 种方式实现),由排列组合的乘法原理,A 中含有 $\mathrm{P}_8^1\mathrm{P}_{85}^1\mathrm{P}_7^1$ 个基本事件,再由定义得

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_8^1\mathrm{P}_{85}^1\mathrm{P}_7^1}{\mathrm{P}_{93}^3}=0.0061.$$

(2) **解法一** 类似于(1)得

$$P(B)=\frac{\mathrm{P}_8^3}{\mathrm{P}_{93}^3}=0.0004;$$

解法二 因为事件 B 与顺序无关,且因为

$$\frac{\mathrm{P}_8^3}{\mathrm{P}_{93}^3}=\frac{\mathrm{P}_8^3/3!}{\mathrm{P}_{93}^3/3!}=\frac{\mathrm{C}_8^3}{\mathrm{C}_{93}^3},$$

所以可以把从 93 个球中摸取三个的组合数 C_{93}^3 当成(2)中基本事件个数,故

$$P(B)=\frac{C_8^3}{C_{93}^3}=0.0004.$$

(3) 因事件 C 与摸球次序无关,类似于(2)的解法二,得

$$P(C)=\frac{C_8^2C_{85}^1}{C_{93}^3}=0.0183.$$

如果用排列知识来解(3),则类似于(1),基本事件总数为 P_{93}^3. C 含基本事件数可这样来计算:三次摸球中有两次摸得黑球有 C_3^2 种摸取方式. 对某种固定的摸取方式(如前两次均摸得黑球,最后一次摸得白球)有 $P_8^2P_{85}^1$ 种方式实现,故 C 含基本事件数为 $C_3^2P_8^2P_{85}^1$,从而得

$$P(C)=\frac{C_3^2P_8^2P_{85}^1}{P_{93}^3}=0.0183.$$

由(2)与(3)可知,对于同一试验中同一问题,样本空间可以取不同. 在有限抽样中,如果抽取是无放回的且所论事件与顺序有关,则所论事件的概率必须用排列知识来求. 如果抽取是无放回的且所论事件与顺序无关. 这时所论事件的概率可以用排列知识来求,也可以用组合知识来求. 但是必须注意,基本事件总数与有利场合数(即所论事件含基本事件数)要么都用排列数来计算,要么都用组合数来计算,两者必须一致.

(3)的一般情况是:从装有 M 个黑球与 N 个白球的袋中无放回任摸 n 个球,正好摸到 k 个黑球的概率为

$$\frac{C_M^kC_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}=\frac{C_n^kP_M^kP_N^{n-k}}{P_{M+N}^n},\qquad k=0,1,2,\cdots,\min(M,n),$$

我们称此概率为超几何概率.

例 1.3.3 一袋中有 M 个黑球与 N 个白球,现有放回从袋中摸球,求下列事件的概率:

(1) A=“在 n 次摸球中有 k 次摸得黑球”;

(2) B=“第 k 次摸球首次摸得黑球”;

(3) C=“第 r 次摸球得黑球是在第 k 次摸球时实现”.

解 设想球都是编了号的.

(1) 从 $M+N$ 个不同的球中有放回摸取 n 个球排成一列有 $(M+N)^n$ 种不同的排列方式,故基本事件总数为 $(M+N)^n$. 在 n 个位置上有 k 个黑球有 C_n^k 种不同情况,对于某个固定的情况(如前 k 个位置上都是黑球,后 $n-k$ 个位置上都是白球)可能的排列种数是 M^kN^{n-k},故有利场合数为 $C_n^kM^kN^{n-k}$,从而得

$$P(A)=\frac{C_n^kM^kN^{n-k}}{(M+N)^n}=C_n^kp^kq^{n-k},\qquad k=0,1,2,\cdots,n,$$