奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

奥林匹克数学中的组合问题

张垚 沈文选 冷岗松 / 编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

专 题 研 究 系 列

湖　南　省　数　学　会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 | 组编

奥林匹克数学中的组合问题

张　垚　沈文选　冷岗松／编著

湖 南 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克数学中的组合问题 / 张垚，沈文选，冷岗松编著. —修订本.
—长沙：湖南师范大学出版社，2014.12
ISBN 978-7-5648-1993-4

Ⅰ.①奥… Ⅱ.①张… ②沈… ③冷… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 288717 号

奥林匹克数学中的组合问题

张　垚　沈文选　冷岗松　编著

◇策　　划：廖小刚　颜李朝
◇责任编辑：廖小刚　刘亮前
◇责任校对：施　游
◇出版发行：湖南师范大学出版社
　　　　　地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
　　　　　电话/0731.88873071　88873070　传真/0731.88872636
　　　　　网址/http：//press.hunnu.edu.cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：长沙超峰印刷有限公司
◇开本：787mm×1092mm　1/16
◇印张：27.5
◇字数：732 千字
◇版次：2015 年 1 月第 3 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978-7-5648-1993-4
◇定价：44.00 元

◆张 垚

男，1938年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，中国数学奥林匹克高级教练，湖南省数学奥林匹克主教练，美国《数学评论》评论员。1987～1999年任湖南省数学会副理事长兼普及工作委员会主任，负责全省数学竞赛的组织及培训工作，并主持了1989年全国初中数学联赛和1997年全国高中数学联赛的命题工作。

已出版图书《数学奥林匹克理论、方法、技巧》等17部，发表学术论文80余篇。从1992年起享受国务院颁发的政府特殊津贴。曾荣获湖南省优秀教师，全国优秀教师，曾宪梓教育基金高等师范院校教师奖三等奖，湖南省教委科技进步奖二等奖等多项表彰和奖励。所培训的学生有100余人进入全国中学生数学冬令营，其中有40余人进入国家集训队，14人进入国家队，在国际中学生数学竞赛(IMO)中，共夺得10枚金牌和3枚银牌。

沈文选

男，1948年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，硕士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所副所长，中国数学奥林匹克高级教练，全国初等数学研究会理事长，全国高等师范院校数学教育研究会常务理事，《数学教育学报》编委，湖南省高师教育研究会理事长，湖南省数学会初等数学委员会副主任，湖南省数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者，湖南师大附中、长沙市一中数学奥林匹克培训主要教练。

已出版著作《走进教育数学》、《单形论导引》、《矩阵的初等应用》、《中学数学思想方法》、《竞赛数学教程》等30余部，发表学术论文《奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育》等80余篇，发表初等数学研究、数学思想方法研究和数学奥林匹克研究等文章200余篇。多年来为全国初、高中数学联赛，数学冬令营提供试题20余道，是1997年全国高中数学联赛，2002年全国初中数学联赛，2003年第18届数学冬令营命题组成员。

冷岗松

男，1961年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院、上海大学数学系教授，博士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所所长，中国数学奥林匹克委员会委员，美国《数学评论》评论员。从2000年起参加中国数学奥林匹克国家集训队的教练工作和上海市数学奥林匹克选手的培训工作。2001～2004年，多次参加国家集训队，中国数学奥林匹克(CMO)，西部数学竞赛，女子数学竞赛的命题工作。1991～2004年担任湖南省数学奥林匹克培训主要教练，为湖南师大附中、长沙市一中前后10位同学在IMO中获取金牌做了大量培训工作。

已出版专著《高中数学竞赛解题方法研究》，在国内外重要数学学术期刊发表论文30余篇。先后承担国家自然科学基金项目，教育部博士点基金项目等多项。曾获湖南省教委科技进步奖二等奖。

奋发图强，力争上游，为提高我国数学水平而共同努力。

王梓坤敬书

▲王梓坤：中国科学院院士

湖南中学生在国际数学奥林匹克中的获奖情况

届　次	获奖情况
第28届（1987）	刘　雄（湖南湘阴一中）金牌
第32届（1991）	郭早阳（湖南师大附中）银牌
第34届（1993）	刘　炀（湖南师大附中）金牌
第35届（1994）	彭建波（湖南师大附中）金牌
第39届（1998）	艾颖华（湖南师大附中） 进国家队，该届国家队未参赛
第40届（1999）	孔文彬（湖南师大附中）银牌
第41届（2000）	刘志鹏（长沙市一中）金牌
第42届（2001）	张志强（长沙市一中）金牌 余　君（湖南师大附中）金牌
第43届（2002）	肖　维（湖南师大附中）金牌
第44届（2003）	王　伟（湖南师大附中）金牌 向　振（长沙市一中）金牌
第45届（2004）	李先颖（湖南师大附中）金牌
第48届（2007）	胡　涵（湖南师大附中）银牌
第52届（2011）	龙子超（湖南师大附中）金牌
第55届（2014）	谌澜天（湖南师大附中）金牌

前　言

组合数学历史悠久，几千年前，我国的《河图》、《洛书》就已经涉及一些简单有趣的组合问题. 近 20 年来，由于计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展，提出了一系列需要离散数学解决的理论和实际问题，加上组合数学的自身的逻辑要求提出的问题以及其他数学分支向组合数学提出的问题，促进了组合数学的研究十分活跃而富有成果，解决问题的方法和技巧更富有变化，使这一古老的数学分支成为了一门充满了活力的学科.

数学竞赛中出现的组合问题往往在表达形式上简单明了，而求解这些问题却需要敏锐的洞察力、丰富的想象力和必要的技巧，通常没有一个固定的解题模式可遵循，而且各种难易程度不同的问题都非常富有，所以在各类不同程度的智力训练和数学竞赛中，大都离不开组合问题.

本书分为 7 章，每章重点讨论和研究了一类在数学竞赛中经常出现的组合问题. 除了介绍必要的组合数学的有关知识外，着重介绍了解这类问题的一些基本方法. 在介绍解题方法时，配备了一些相当于全国高中数学联赛水平的例题(个别例题为中国数学奥林匹克(CMO)和国际中学生数学奥林匹克(IMO)中较易的问题). 每章最后一节为典型例题解题分析，所配备的例题相当于 CMO 和 IMO 的水平.

每章配备有一定数量的习题，A 类习题相当于高中联赛水平，B 类习题相当于 CMO 和 IMO 的水平.

在例题、习题的选择方面，我们尽可能选编一些较新颖的，尤其是近几年国内外数学竞赛中有关组合数学的试题，也包括少量作者自己编拟的问题. 在本书中我们特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结，希望通过这部分内容的学习，能使读者的数学修养以及解决有关数学竞赛中组合问题的能力有所提高.

编　者

2004 年 3 月

再版前言

第二版与第一版比较，主要作了如下的一些修改和补充：

(1)补充了近几年国内外数学竞赛中出现的一些有代表性的试题作为例题和习题，同时也删去了部分陈旧的例题和习题.

(2)增加了第一章§2—6，第二章§2—3以及第三章§2—4，同时将原书第二章§1—4移至第一章§1—7.

(3)改正了原书中出现的一些错误.

本书出版以来，很多参加竞赛培训的老师和学生热心地指出其中的一些错误并提出一些宝贵意见，这对提高本书的质量有极大的帮助.借此机会致以深深的谢意，并热诚欢迎广大读者给本书提出批评和指正.

编　者

2009 年 7 月

第三版前言

第三版与第二版比较，主要作了如下的一些修改和补充：

（1）补充了近几年内国内外数学竞赛中出现的一些有代表性的试题以及编者进行数学竞赛培训时编拟的少量有启发性的问题作为例题和习题，同时也删去了部分陈旧的例题和习题，从而使本书在内容上更加新颖和实用.

（2）改正了本书中出现的一些错误.

本书出版以来一直得到广大读者的关心和爱护，他们不仅对本书的编写提出了一些宝贵的意见和建议，而且对其中一些的解法与作者进行了有益的探讨和交流，在此我们表示深深的感谢，并希望广大读者继续对本书提出批评和指正.

编　者
2014 年 5 月

目　录

第一章　组合数学中的计数问题

§1　基础知识

1. 加法原理与乘法原理

如果完成一件事情的方法可分成 n 个互不相交的类，且第一类中有 m_1 种方法，第 2 类中有 m_2 种方法，…，第 n 类中有 m_n 种方法，那么完成这件事一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法. 这就是加法原理，简称为分类相加.

如果完成一件事要分 n 步，且第 1 步有 m_1 种方法，第 2 步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事一共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种方法. 这就是乘法原理，简称为分步相乘.

2. 无重复的排列与组合

(1)无重复的排列

从 n 个不同元素中，任取 $m(\leqslant n)$个不同元素，按照一定的顺序排成一列(或者从 n 个不同元素中，有序地任取 $m(\leqslant n)$个不同元素)，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个排列.

从 n 个不同元素中取出 $m(\leqslant n)$个不同元素的排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列数，用符号 P_n^m 或 A_n^m 表示. 由乘法原理得

$$P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1).$$

(取第 1 个元素放在第 1 个位置有 n 种方法，取定第一位后，由于元素不允许重复，选择第二位有 $n-1$ 种方法，…，选择第 m 位有 $n-m+1$ 种方法).

特别 $m=n$，就得到 n 个不同元素的全排列数公式

$$P_n^n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!.$$

为了方便起见，约定 $0!=1$，则上面的公式可写为　$P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

(2)无重复的组合

从 n 个不同元素中任取 $m(\leqslant n)$个不同元素并成一组(或者从 n 个不同元素中，无序地任取 $m(\leqslant n)$个不同元素)，叫做从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的组合.

从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的组合数，用符号 C_m^n 表示，其计算公式为

$$C_m^n=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}.$$

事实上，对于每一个从 n 个不同元素取 m 个不同元素的组合，将其元素作全排列可产生 $m!$ 个不同的排列. 显然不同的组合产生的排列互不相同，且每个排列都可以分 2 步得

到. 由乘法原理可得 $P_n^m=C_n^m\cdot m!$，于是 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{m!}$.

3. 可重复的排列与组合

(1)可重复的排列

从 n 个不同元素中任取(允许重复)$m(\geqslant1)$个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复排列.

由乘法原理易知，从 n 个不同元素中取 $m(\geqslant1)$个元素的所有可重复排列个数为 n^m(选第 1 位元素有 n 种方法，选定第 1 位后，选第 2 位仍有 n 种方法，…，最后，选第 m 位也有 n 种方法).

(2)有限个重复元素的全排列

设 n 个元素由 k 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 组成，其中 a_1 有 n_1 个，a_2 有 n_2 个，…，a_k 有 n_k 个($n_1+n_2+\cdots+n_k=n$)，那么这 n 个元素的全排列称为有限个重复元素的全排列，其排列数为 $\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$.

事实上，若 n 个元素互不相同，则全排列数为 $n!$，但其中 a_i 有 n_i 个，它们之间任意交换顺序(共有 $n_i!$ 种交换顺序的方法)，得到的是同一排列($i=1,2,\cdots,k$). 故不同的排列个数为 $\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$.

(3)可重复的组合

从 n 个不同元素中，任意可重复地选取 $m(\geqslant1)$个元素，称为 n 个不同元素取 m 个元素的可重复的组合，其不同组合的个数为 C_{n+m-1}^m.

事实上，不妨设 n 个元素为 $1,2,\cdots,n$，设取出的 m 个元素为

$(1\leqslant)a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m(\leqslant n)$,

则显然 $(1\leqslant)a_1+0<a_2+1<\cdots<a_m+m-1(\leqslant n+m-1)$.

将 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 与 $(a_1+0,a_2+1,\cdots,a_m+m-1)$ 对应，后者为从 $n+m-1$ 个不同元素 $1,2,3,\cdots,n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合，且不同的 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 对应的 $(a_1+0,a_2+1,\cdots,a_m+m-1)$ 是不同的. 反过来，从 $1,2,\cdots,n+m-1$ 中任取 m 个不同的数的组合

$(1\leqslant)b_1<b_2<\cdots<b_m(\leqslant n+m-1)$

也恰好对应于一个从 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 中取 m 个可重复元素的组合

$(1\leqslant)b_1-0\leqslant b_2-1\leqslant\cdots\leqslant b_m-m+1(\leqslant n)$.

因此，上面所说对应是一一对应，故所求组合数等于从 $n+m-1$ 个不同的元素 $1,2,\cdots,n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合数，即 C_{n+m-1}^m.

4. 圆排列与项链数

从 n 个不同元素中取 m 个不同元素排在一个圆周上，称为从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的圆周排列，其排列数为

$$\frac{P_n^m}{m}=\frac{n!}{m\cdot(n-m)!}.$$

事实上，对每一个固定的 m 个元素的圆排列，在任意两个元素之间将圆周剪开，沿顺

时针方向拉直恰产生 m 个直线排列，且不同的圆排列所产生的直线排列互不相同. 又易见从 n 个不同元素取 m 个不同元素的排列都可以这样从圆排列中得到，所以，所求圆排列数的 m 倍恰是从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的排列数 P_n^m，由此得出上述结论.

特别地，将 n 个不同元素排成一个圆周的圆排列数为 $\frac{P_n^n}{n}=(n-1)!$.

若将 n 粒不同的珍珠，用线串成一根项链的不同方法数记为 D_n，则

$$D_n=\begin{cases}1(n=1\text{ 或 }2),\\ \frac{1}{2}(n-1)!\ (n\geqslant 3).\end{cases}$$

这是因为将一个按顺时针方向排列的 $n(\geqslant 3)$ 个不同元素的圆排列，改为逆时针方向排列时，得到的是不同的圆排列，而项链则没有顺时针方向与逆时针方向排列的区别，故 $n\geqslant 3$ 时，n 粒不同珠子的项链数等于 n 粒不同珠子的圆排列数的一半. 而 $n=1$ 或 2 时，显然项链数等于 1.

5. 容斥原理

对于有限集合 S，我们用 $|S|$ 表示 S 中元素的个数，若 S_1 是 S 的子集，则 $\overline{S}_1=S\backslash S_1$ 表示 S_1 在 S 中的补集.

定理 1(容斥原理) 设 S 是有限集合，$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是 S 的子集，则

$$\begin{aligned}|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n|=&|S|-\sum_{i=1}^{n}|S_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j|-\cdots+\\&(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}|+\cdots+\\&(-1)^n|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|.\end{aligned}\quad ①$$

证明(贡献法) 只要对任意 $x\in S$，证明①式两边计算 x 的次数是相同的即可.

若 x 不属于 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 中任何集合，则 x 在①式左边计算了 1 次，x 在①式右边第 1 项 $|S|$ 中计算了 1 次，而在①式右边其余各个和式项中计算的次数都为 0，故 x 在①式右边计算的总次数也为 1.

若 x 恰属于 $S_1,\cdots,S_n$ 中 k 个集合，这里 $k\geqslant 1$，则 x 在①式左边计算的次数为 0，而在右边的第一项，第二项，$\cdots$，第 $k+1$ 项，$\cdots$，最后一项中，x 计算的次数分别为 $1,C_k^1,C_k^2,\cdots,C_k^k,0,0,\cdots,0$. 故 x 在①式右边计算的总数为

$$1-C_k^1+C_k^2-\cdots+(-1)^kC_k^k+0+\cdots+0=(1-1)^k=0.$$

综合上面的讨论，我们知道对任意 $x\in S$，①式两边计算 x 的次数(即 x 对等式两边所作的贡献)相等. 故①式成立.

对 S 的任意子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，因

$$\overline{S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n}=\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n,$$

故 $|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n|+|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n|=|S|$. 于是，由定理 1 可推出下面定理 2.

定理 2(容斥原理的对偶形式) 对任意有限集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，我们有

$$\begin{aligned}|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n|=&\sum_{i=1}^{n}|S_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j|+\cdots+\\&(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}|+\cdots+\end{aligned}$$

$$(-1)^{n-1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|.$$

注　有的书中称定理 1 为包含排斥原理，而将定理 2 称为容斥原理. 本书中将定理 1 和 2 都称为容斥原理.

6. 算二次原理(富比尼原理)

所谓算二次原理(又称富比尼原理)就是对同一个量，如果用两种不同的方法去计算，所得的结果应相等.

例如一个 $m\times n$ 的数表(数学中称之为 $m\times n$ 矩阵)：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

若先算第 i 行元素之和 $r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(i=1,2,\cdots,m)$，再把各行的和加起来，得到表内各数的总和为 $\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=\sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij})$.

另一种算法是先算出第 j 列元素之和 $l_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$，再把各列的和加起来，也得到表内各数的总和 $\sum\limits_{j=1}^{n}l_j=\sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij})$. 于是，我们有 $\sum\limits_{i=1}^{m}r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}l_j$. 即

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}).$$

一般说来，设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 是两个有限集合，我们称 $S=A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡尔乘积. 对任意 $a_i\in A$，设 $C_i=\{(a_i,b)|b\in B\}(i=1,2,\cdots,m)$，对任意 $b_j\in B$，设 $D_j=\{(a,b_j)|a\in A(j=1,2,\cdots,n)$. 于是 $|S|=\sum\limits_{i=1}^{m}|C_i|=\sum\limits_{j=1}^{n}|D_j|$.

计数中的富比尼原理是富比尼(G. Fubini)最先证明的关于测度空间中二重积分交换次序的富比尼定理之特例. 在应用富比尼定理时，关键在于按照适当的条件，选择集合 A 和 B 并将 A 中元素与 B 中元素配对，然后用两种不同的方法进行计算，故又称为算二次原理.

7. 母函数

定义　我们称形式幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 为数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n\cdots$ 的母函数，当且仅当 $a_n=b_n(n=0,1,2,\cdots)$ 时，称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，且还有下列定义：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,$$

$$\alpha(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\cdot a_nx^n,$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k})x^n.$$

母函数方法是计数的一种重要方法，在应用母函数方法解题时，除了应用二项式定理外，还要用到下列公式：