物　理　实　驗

（非物理系用）

上　册

物理系电子技术教研室编

中　山　大　学

一九八一年十二月·广州

目录（上册）

绪论

物理学是一门实验的科学．一切物理理论都必须通过实验的检验，才能得到公认和发展．普通物理实验是学生今后实验工作的基础，学好这个基础课程，对于进一步学习专业实验和工作极为重要．

（一） 物理实验教学的目的和要求

（1）学习与掌握进行科学实验的基础知识．掌握一些常用的基本物理量的测量方法，对测量结果的处理方法．培养初步的实验工作能力．

（2）训练与培养进行科学实验的基本技能与技术，掌握各种物理仪器~~和装置的使用．能够正确地使~~用物理仪器和工具进行观察、测量，计算从得到较准确的结果。

（3）培养学生严肃认真，实事求是的学风，良好的科学实验工作习惯和爱护国家财产的道德品质．

（二） 测量概说

所有的物理定律，都从一定的物理量之间的数量关系来表出．物体的一切物理性能，也必须用一定的量值来表示．因此，在进行物理实验时，不仅要对物理现象作定性的观察，更重要的是对各物理量进行定量测量。

所谓测量，就是一个（被测）量和另一个作为（基准）单位的同类量进行比较，从而得出该（被测）量为（基准）单位量的若干倍的过程．

从获得该物理量的方式来看，可以分为直接测量和间接测量两大类，（从不同的角度考虑，还可以分为：绝对测量和相对测量，接触测量和非接触测量．等精度和不等精度等测量）：

（1）直接测量：用一定的仪器直接与被测之量进行比较，确定是仪器上定作单位的量的多少倍，例如用米尺测量长度，用天平称衡质量等．

（2）间接测量：在进行测量时直接测量的不是该量的本身，而是一些与被测量有一定数学关系的量．我们要通过这些数学关系式才能求出被测量．例如，测量重力加速度，可以根据直接测量出单摆的

摆长 l 和摆动周期T，并利用公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 而间接地求得重力加速度 g。

这里值得指出的是，对某一特定物理量的测量，究竟是采用那一种测量方式，并不是一成不变的。随着科学技术的发展，有些物理量起初只能用间接测量，后来也可用直接测量了。

（3）如何进行测量

测量一个物理量，一般应该完成如下步骤：检查和调整仪器装置，观测现象，读数和记录数据，计算测量结果。

认真进行检查、调整仪器，使仪器设备处于正确的使用条件，是获得正确的测量结果的必要条件。进行测量前，首先要检查仪器设备是否符合使用条件，如游标尺、螺旋测微计的零线是否对"0"，电表的指针是否指"0"，放置方式是否符合仪器的标志（水平或垂直）；测量望远镜目镜或测微目镜是否聚焦于十字叉丝上等等。仪器的调整主要是将仪器按说明书或附文规定进行细心调节，使得要研究的现象准确地出现。然后，对要研究的现象进行观察，判断、测量。有时候调整和观测要交互进行。调整好仪器即可进行测量读数（读取仪器的示数）。无疑地，由于仪器精确度和实验者判断能力的限制，对于一个直接测量的量，观察和读数都要重复若干次（误差理论的研究指出5～10次为宜）。但如果测量结果是通过测绘函数关系（作曲线）而求得时，直接测量就不必重复多次。

进行同一量的重复测量时，凡是可能，需要把观测对象或仪器稍为作些改变然后重新观测，判断和读数。例如，用毫米刻度尺测量某物体的长度，为减少米尺刻度不均匀造成的误差，用米尺的不同位置进行测量，测量数据记录如下：

读数 a 为物体左端在量尺的位置，读数 b 为物体右端的位置读数，物体长度 $l=b-a$。

读数 a（毫米）	读数 b（毫米）	l（毫米）
147.8	158.6	10.8
224.7	235.4	10.7
289.3	300.0	10.7

经过观测而读取的示数要准确地记录下来。记录的数据要反映仪器的精密度（即读数应该有仪器最小分度值的几分之一的估计值，如上例中，米尺刻度的最小分度为毫米，小数点后的数字就是估计值）。同时要把所得数据的单位记下来。

以上步骤完成后，即可按有关公式计算出所求的测量结果。

（三）误差基础知识

1、测量值和误差

我们所要测量的物理量，它的大小是客观存在的。这个客观存在的量值，称为该物理量的真值。但是由于实验测量设备（仪器、工具等）、测量技术的不完善，人们认识事物的局限性（如眼睛的分辨能力，手的灵活性等），任何测量结果只是一个近似值，而被测量的真值是无法准确测得的。测量结果（测量值）与真值之间存在着一个差值（可能很小）。为了表示（或估计）测量值与真值的接近程度（或说测量值的准确程度，可信赖程度）需要定义误差的概念。

假定物理量的真值为X，它的测量值为M，则测量值的误差为

$$\Delta X = M - X \qquad \text{（绝对误差）}$$

$$E = \frac{\Delta X}{X} \times 100\% \qquad \text{（相对误差）}$$

例如，工厂生产标定值为100.00厘米长的米尺，检定时测得长度为100.15厘米，则绝对误差为$\Delta X = 0.15$厘米，相对误差为0.15%。

可见，误差越小，测量值愈接近真值，测量的准确度愈高。说某个物理量的测量准确度有多大，用ΔX或E表示均可以。但是，当比较两个或两个以上测量结果的准确度好坏时，则要用相对误差。

例如，100千赫的标准频率源用频率计测得值为101千赫，另有1M赫的标准频率源，测得值为1.001M赫。两者的绝对误差均为1千赫。究竟那一个测量准确度高呢？单看绝对误差不能说明问题，若用相对误差就很明显了。前者相对误差为1%，后者仅为0.1%。

2、误差的分类

根据误差产生的原因和它的性质，误差可分为系统误差、偶然误差和过失误差三类。

系统误差——它的产生可能是由于实验理论本身不够严密，测量仪器的不准确和实验条件的变化以及实验者个人的某些习惯或偏向。系统误差的量值和符号在同一测量中不变，不能用增加测量次数的办法来减少。但若用更准确的仪器来对所用仪器进行校准，或用不同测量方法不同实验者进行测量同一量，可以发现或修正系统误差。采用特殊的测量步骤可以减少系统误差。

偶然误差——由于实验环境和测量对象的无规则变化，实验者本人感觉不敏锐程度等原因引起。偶然误差是无法控制的，它的量值和符号也是不确定的。但对同一量反复进行多次测量时，偶然误差服从统计分布规律，其要点是：

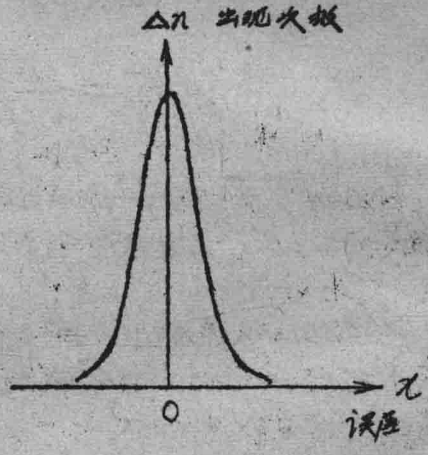
i，一定测量条件下，偶然误差的绝对值不大于某一限度；

ii，绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的可能性（数学语言称为几率或概率）要大，最接近真值的测量值（误差最小）出现的几率最大；

iii，绝对值相等的正误差与负误差出现的几率相等；

iv，在一系列等精度的测量中，测量的次数越多，偶然误差的算术平均值越小（趋于零），即测量值的算术平均值越接近真值。

综合以上几点，偶然误差出现的分布规律可用正态分布曲线表示如图一。



图一

过失误差——实验者的错误引起，如读错数，记错数等。只要实验者小心谨慎、严肃认真，过失误差是可以避免的。

（3）误差的计算

由以上的分析表明，系统误差和疏失误差在实验中是可以排除的。但偶然误差的产生原因比较复杂，在实验中无法完全消除，而只能用一定的处理方法使其对结果的影响最小。实验者的任务就是避免疏失误差并极力减低实验中的系统误差不占优势。于是决定实验结果的质量就是偶然误差了。因此在误差计算中所讨论的都是指偶然误差。

误差的表示方法有多种：算术平均误差、标准误差和可几误差。下面我们着重讨论算术平均误差和简单介绍一下标准误差。

A）算术平均值和残余误差的定义及性质。

①　算术平均值、

设要测量的物理量的真值是 X，我们对它进行 n 次测量，每次测量的结果是 M_1 M_2 M_3 --- M_n。每次测量值与真值之差为：

$\varepsilon_1 = M_1 - X$，$\varepsilon_2 = M_2 - X$，$\varepsilon_3 = M_3 - X$ ---- $\varepsilon_n = M_n - X$。

ε_1 ε_2 --- ε_n 为各次测量的偶然误差。（设系统误差和疏失误差已

经排除）。

n次测量的算术平均值$\overline{M}$为：

$$\overline{M}=\frac{M_1+M_2+M_3---M_n}{n}=\frac{\sum_1^n M_i}{n} \quad ----------(1)$$

而 $X=M_1-\varepsilon_1=M_2-\varepsilon_2=M_3-\varepsilon_3---=M_n-\varepsilon_n$

$$\therefore\ nX=\sum_1^n M_i-\sum_1^n \varepsilon_i$$

$$X=\frac{\sum_1^n M_i}{n}-\frac{\sum_1^n \varepsilon_i}{n}=\overline{M}-\frac{\sum_1^n \varepsilon_i}{n} \quad ----------(2)$$

根据偶然误差的性质（iV）可得：当$n\rightarrow\infty$时 $\frac{\sum_1^n \varepsilon_i}{n}\Rightarrow 0$

$$\therefore\ X=\overline{M} \quad ----------(3)$$

(3) 式表明测量次数n为无限多次时，其算术平均值$\overline{M}$便是真值X了。所以说算术平均值是最可信赖的。这就是平常进行物理实验时，测量结果要由算术平均值来表示的理由。

但事实上，进行无限多次测量是不可能的，因此，真值也不能得到。而测量误差是对于真值而言的，故测量误差也无法求出。虽然如此，但我们还必须想办法来表征"测量误差"这个量的。

② 残余误差

为了寻找一个可以代替偶然误差以表征测量时所产生误差的量，在误差理论中人们引进了"残余误差"的概念（也有人称之为"偏差"）。所谓残余误差就是指各次测量值与其算术平均值之差。

表示为：$\Delta M_1=M_1-\overline{M}$　$\Delta M_2=M_2-\overline{M}$　$---\Delta M_n=M_n-\overline{M}$ 它具有以下两个性质：ⓐ当测量次数n足够多时，各测量值的残余误差的代数和等于零。ⓑ各测量值的残余误差的平方和为最小。（证明略）

当$n\rightarrow\infty$时　据(3)式可得：

$\overline{M}$（算术平均值）$\Rightarrow$ X（真值）

而 $\Delta M_n = M_n - \overline{M}$ $\quad \varepsilon_n = M_n - X$

则 $\Delta M_n \Rightarrow M_n - X$

$\therefore \quad \Delta M_n \Rightarrow \varepsilon_n$

即是说，当测量次数 n 增大时，算术平均值 $\overline{M}$ 趋近于真值 X，则各残余误差也趋近于相应的偶然误差。这便是我们可用残余误差代替偶然误差来描述测量误差的理由，我们在进行误差计算时，不论是算术平均误差，标准误差或是可几误差，它们都是用残余误差来表示的，在不少场合往往不称"残余误差"而叫"误差"。实际它们是一样的。这一点读者要特别注意。

要反复强调的是，虽然有系统误差，疏失误差和偶然误差三类，但系统误差和疏失误差是可以想办法排除的，所以我们研究的只是偶然误差，而真正理论上的偶然误差是无法测量出的。故我们在进行误差计算时引入残余误差来代替偶然误差。平时我们在进行的误差计算都是指残余误差的。

B，直接测量的误差计算

设每次测量值为 M_1 M_2 M_3 --- M_n，首先是求算术平均值 $\overline{M}$。

$$\overline{M} = \frac{M_1 + M_2 --- M_n}{n}$$

第二步便是求出各次测量的残余误差

$$\Delta M_1 = M_1 - \overline{M} \quad \Delta M_2 = M_2 - \overline{M} \quad \Delta M_3 = M_3 - \overline{M} \; --- \; \Delta M_n = M_n - \overline{M}$$

第三步，对残余误差取绝对值，称之为绝对残余误差。

$$|\Delta M_1| = |M_1 - \overline{M}|, \quad |\Delta M_2| = |M_2 - \overline{M}| \quad |\Delta M_3| = |M_3 - \overline{M}| ---$$

$$|\Delta M_n| = |M_n - \overline{M}|。$$

第四步，对绝对残余误差取算术平均值，称作单次测量的平均绝对残余误差，它是用来表征一系列测量的重复性。（即精密度）。

$$\Delta M=\frac{|\Delta M_1|+|\Delta M_2|+|\Delta M_3|----|\Delta M_n|}{n} \quad ------(4)$$

第五个步骤是求平均值的平均绝对残余误差也是用来表征结果的精密程度的.

$$\eta=\frac{\Delta M}{\sqrt{n}}=\frac{|\Delta M_1|+|\Delta M_2|---|\Delta M_{n-1}|+|\Delta M_n|}{n\sqrt{n}} \quad ----(5)$$

最后，是结果的表示：

$$\boxed{X=\overline{M}\pm\eta} \quad ---------------------(6)$$

这里$\pm\eta$表示测量值$\overline{M}$与"真值"可能发生的误差范围．用"$\pm$"（不确定符号）的意义在于考虑到最不利情况下，正确地估计测量结果的最大误差范围．

例一．用毫米分划的尺测量一根金属丝的长度．得到如下数据

各次测量值（mm）	各次测量的绝对残余误差（mm）
$M_1=625.8$	$\lvert\Delta M_1\rvert=0.3$
$M_2=625.4$	$\lvert\Delta M_2\rvert=0.1$
$M_3=625.6$	$\lvert\Delta M_3\rvert=0.1$
$M_4=625.4$	$\lvert\Delta M_4\rvert=0.1$
$M_5=625.2$	$\lvert\Delta M_5\rvert=0.3$
平均值 $\overline{M}=625.5\,mm$	平均值的平均绝对残余误差

$$\eta=\frac{0.9}{5\sqrt{5}}\approx 0.1\,mm$$

因此，最后结果应表示为

$$X=625.5\pm0.1\,mm$$

例二，用螺旋测微计测量一金属片的厚度得到数据如下：

各次测量值（mm）	各次测量的绝对残余误差（mm）
$M_1=3.615$	$\lvert\Delta M_1\rvert=0.017$
$M_2=3.650$	$\lvert\Delta M_2\rvert=0.018$
$M_3=3.606$	$\lvert\Delta M_3\rvert=0.026$
$M_4=3.655$	$\lvert\Delta M_4\rvert=0.023$
平均值 $\bar{M}=3.632$	平均值的平均绝对误差 $\eta=\frac{0.084}{4\sqrt{2}}\approx0.01\text{mm}$

最后结果表示为 $\bar{X}=3.63\pm0.01$ 毫米。

在例一中是不到100厘米长的物体，我们测量的误差范围是0.01厘米，而在例二中是不到4毫米厚的物体，测量时的误差范围是0.01毫米。那么，我们测量工作的质量究竟是那一次较好？事实平均值和绝对残余误差是不能完全表达实验结果的优劣的，特别是对于一些具有不同量纲的物理量的测量（例如，一个是长度，一个是时间）来说，就更是如此，为此，人们就引入了相对误差的概念

各次测量的绝对残余误差与各次测量值之比：

$$\frac{\Delta M_1}{M_1};\ \frac{\Delta M_2}{M_2};\ \frac{\Delta M_3}{M_3}\ \cdots\cdots\ \frac{\Delta M_n}{M_n},$$

叫做各次测量的相对残余误差（简称各次测量的相对误差）。平均值的平均绝对残余误差与算术平均值之比：

$$E=\frac{\eta}{M}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

叫为平均值的平均相对残余误差，通常用百分比来表示。

在例一中测量结果的平均相对残余误差（相对误差）

$$E=\frac{0.1}{625.5}\approx0.02\%$$

在例二中：

$$E=\frac{0.01}{3.63}\approx0.3\%$$

这两个例子说明，在例一的测量中虽然有较大的绝对或余误差，但在测量的质量上还是优于例二中的测量。计算相对误差能很直观地表示测量的好坏，因此，在所有的测量中通常都是计算结果的相对误差。由于相对误差是两个同类量之比，所以其结果是没有量纲的数，这样我们便能够比较各种不同量纲的物理量的测量结果的好坏。

C、间接测量的误差计算

前面我们已经说过，在大多数的情况下，要得到实验结果，必须先对一些独立量进行直接的测量，然后再根据一定的公式来计算才能得到间接的测量结果。我们把这些直接测量的独立量称做辅助量。由于在直接测量时，各量都不可避免地含有误差，所以可肯定被这些方法计算而来的间接测量的量也会含有误差。这就是说，误差是由直接测量中传播到间接测量中去了。我们现在就来研究各个直接测量的误差对间接测量最后结果的影响，分别就辅助量多少不同情况进行讨论。

@ 单辅助量：

设辅助量 x 与间接测量量 N 二者的关系为：

$$N=f(x)$$

由直接测量得到辅助量的值为 x，其误差为 $\pm\Delta x$，将 x 之值代入 $N=f(x)$ 即可求得间接测量的值。设 N 的误差为 ΔN，显然 ΔN 是由直接测量的误差 Δx 所引起的。

$$N\pm\Delta N=f(x\pm\Delta x) \qquad (8)$$

将（8）式的右边函数按泰勒公式展开，

$$N\pm\Delta N=f(x)\pm\frac{df(x)}{dx}\cdot\Delta x\pm\frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\cdot\Delta x^2\pm\cdots$$

因误差是一个微小量，故可将 Δx^2 以上的诸项略去，得

$$N\pm\Delta N=f(x)\pm\frac{df(x)}{dx}\cdot\Delta x$$

两边比较可得

$$\Delta N=\left|\frac{df(x)}{dx}\cdot\Delta x\right| \text{------}(9)$$

而相对误差为：$$E=\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{1}{N}\cdot\frac{df(x)}{dx}\cdot\Delta x\right| \text{---}(10)$$

b 多辅助量：

为简单起见只讨论两个辅助量的情形，设 $N=f(x_1, x_2)$，而各辅助量 x_1，x_2 是可以直接测量到的，其误差分别 $\pm\Delta x_1$，$\pm\Delta x_2$，由上述，N之值不外是用 x_1，x_2 之值代入函数关系式而求得。但N的误差包含两部分，即 $\Delta N=|\Delta N_1|+|\Delta N_2|$，其中 ΔN_1 为暂不考虑 Δx_2 的影响而仅是由 Δx_1 所引起的误差。

$$\Delta N_1=\left|\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1\right|$$

同理

$$\Delta N_2=\left|\frac{\partial f(x_1,x_2)\,\Delta x_2}{\partial x_2}\right|$$

$$\therefore\quad \Delta N=\Delta N_1+\Delta N_2=\left|\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1\right|+\left|\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2\right| \text{---}(11)$$

而相对误差为

$$E=\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{1}{N}\cdot\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1\right|+\left|\frac{1}{N}\cdot\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2\right| \text{---}(12)$$

为了便于查阅，下面表中列出单辅助量和多辅助量的一些重要误差计算公式，它们是由几个测得量的加减乘除，以及单个测得量的幂函数或三角函数等代入（9）.（10）（11）（12）式而求得相应的间接测量的绝对误差或相对误差公式的具体情形。

必须指出的是表中的 Δx、Δy、Δz --- 都是指各直接测量平均值的平均绝对残余误差，而 x、y、z --- 是各直接测量的算术平均值。ΔN 就是表示间接测量的平均值的平均残余误差。在平时一般省去"残余"两字，而称"误差"。

表1 间接测量误差计算公式

名称 内容 序号	数学关系式	绝对误差 ΔN	相对误差 $\frac{\Delta N}{N}$
1	$N=x+y+z$	$\pm(\Delta x+\Delta y+\Delta z+----)$	$\pm\frac{(\Delta x+\Delta y+\Delta z--)}{(x+y+z+---)}$
2	$N=x-y$	$\pm(\Delta x+\Delta y)$	$\pm\frac{(\Delta x+\Delta y)}{(x-y)}$
3	$N=x\cdot y$	$\pm(x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x)$	$\pm(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y})$
4	$N=\frac{x}{y}$	$\pm\frac{(x\cdot\Delta y+y\cdot\Delta x)}{y^2}$	$\pm(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y})$
5	$N=x\cdot y\cdot z$	$\pm(y\cdot z\cdot\Delta x+x\cdot z\Delta y+x\cdot y\cdot\Delta z)$	$\pm(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z})$
6	$N=x^n$	$\pm n x^{n-1}\cdot\Delta x$	$\pm n\cdot\frac{\Delta x}{x}$
7	$N=\sqrt[K]{x}$	$\pm\frac{1}{K}x^{\frac{1}{K}-1}\cdot\Delta x$	$\pm\frac{1}{K}\cdot\frac{\Delta x}{x}$
8	$N=\sin x$	$\pm\cos x\cdot\Delta x$	$\pm\mathrm{ctg}\,x\cdot\Delta x$
9	$N=\cos x$	$\pm\sin x\cdot\Delta x$	$\pm\mathrm{tg}\,x\cdot\Delta x$
10	$N=\log x$	$\pm 0.4343\frac{\Delta x}{x}$	$\pm 0.4343\frac{\Delta x}{x\log x}$

注：$N=\log x=0.4343\ln x$.

D. 标准误差的计算、

标准误差也是一种比较常用的偶然误差的表示方法，它的定义是：

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}} \quad ---（对单次测量值）$$

$$\sigma(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}\quad ----（对平均值）$$

当n足够大时，在$\bar{x}-\sigma(\bar{x})$和$\bar{x}+\sigma(\bar{x})$范围内包含真值X的几率为68.3%；而且$\sigma(\bar{x})$与η有如下关系：

$$\eta=0.7978\sigma(\bar{x})$$

这些处理方法比较复杂可作为今后实验工作中的参考，本课程不作要求。

必须指出标准误差也称"均方误差"或"方差"。

《四》 准确度和精密度的概念

由于物理量的真值是不可能准确测出的，测量的结果只是近似值。所以在物理实验中经常用到准确度和精密度的概念。准确度和精密度也是说明测量结果的，前面（三）已经提到，它们是和误差联系在一起的。

准确度表示一组测量值与真值的接近程度，测量值与真值愈接近，其准确度愈高，它是由系统误差所决定的。

精密度表示一组测量值对平均值的偏离程度，或者说进行多次测量时的重复性，如果多次测量时的值彼此很接近，则称之为精密度高。它是由偶然误差决定的。

仪器的准确度和精密度

仪器的准确度是指仪器在正常使用条件下可能出现的最大绝对误差或这个误差与该仪器的最大量限的百分比。仪器的准确度标明在仪器或仪器说明书上，它表示该仪器的测量指示值与被测量的真值的接近程度。如1.5级的电表，其准确度为±1.5%，仪器的准确度必须用同类型的标准仪表校准才能确定。

仪器的精密度是测量仪器标度中能正确读出的最小单位值。如最小分度为毫米的尺，精密度为1毫米，可准确读出1/100毫米的螺旋测微计，其精密度为0.01毫米。精密度由仪器本身就能确定。最小分度的单位值愈小，精密度愈高。

在读数时，关于估计仪器最小分划的问题，一般有这样的常规：一般读数需要目测估计到最小分划的十分之一；若仪器分划的刻线或指针很粗，可估计到最小分划的一半为止。

（五） 有效数字

（1） 有效数字的意义

在测量和数据处理时，确定用多少位有效数字来表示测量和计算的结果，是一个十分重要的问题。因为它应该正确地反映测量仪器的精密度和测量结果准确性。例如，用一以毫米分划的尺去测量一物体的长度，如图2所示，其长度在5.4厘米与5.5厘米之间，再估计小数点后第二位数，得其长度为5.44厘米。其中5.4厘米是准确数，而最后的"4"已经是靠估计读出的，有误差了。但它还有参考的价值，如果我们再估计出"4"以下的一位数，那就再没有参考意义了。

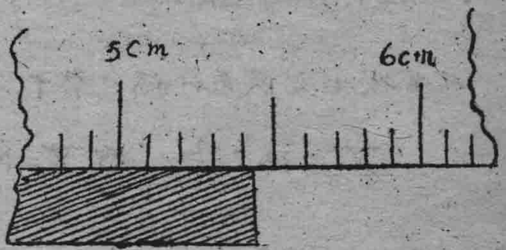


图2、长度测量

因此，所有的测量值都应读到第一位有误差的数字为止。也就是说最后一位数是估计得来的，是可疑数字。这样只允许一位可疑数字的表示方式称为有效数字。

为了正确表示实验数据的有效数字，需要注意几点：

1、作测量记录时，每一数据只保留一位可疑数字（这位数字一般等于仪器最小分度的分数），此位数字前的所有数字都应是确切可靠的。计算结果也只保留一位可疑数字。此位数字的位数一般由结果的误差的数量级决定。

2、可疑数字表示该位数有±1个单位或下一个数有±5个单位的误差。

3、数字"0"可以是有效数字也可以不是有效数字。图三为用50伏量程的电压表三次测量中的指针指

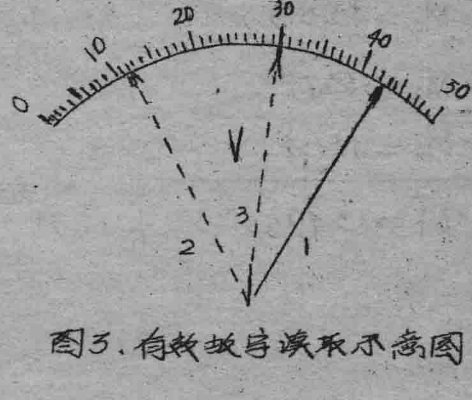


图3、有效数字读取示意图

示情况，其读数的有效数字应表示为42.5伏，12.0伏和30.0伏。若后两种情况的示数读为12伏和30伏，则把测量准确度降低了（没有反映仪器的精密度）。又如测量两地的距离为86千米，以米为单位表示此距离时，应表示为86×10³米，而不能表成86000米。因为这里的三个“0”都不是有效数字。

（2）有效数字的运算

测量所得的读数，应该反映仪器的精密度，而数据的运算结果则应反映误差。这是实验工作的基本原则之一，本节内容主要是研究数字的取舍问题。

A，求算术平均值

在直接测量误差计算一节中，我们已经知道，测量结果应写为

$$X = \overline{M} \pm \eta \qquad 即 \ X = \overline{M} \pm \frac{\Delta M}{\sqrt{n}}$$

但是η和$\overline{M}$究竟应取多少位有效数字呢？在记录数据时，我们已经知道其读数M_1、M_2---M_n应该估计到最后一位有误差的数字（可疑数字）为止；在计算η时，它的有效数字通常也要用四舍五入法截取为一位，只有在特别精密的测量中才保留两位，而平均值$\overline{M}$的有效数字位数，是由误差η来决定的，通常也是写到第一位有误差的数字为止。在前面我们所举的各例，都是已经按这个原则去处理的。为了进一步阐明这个问题，现再举一个例子。

设用一以毫米分划的尺测量一物体的长度所得数据以厘米为单位表示如下：

$$
\begin{array}{ll}
M_1 = 13.25 & |\Delta M_1| = 0.24 \\
M_2 = 13.58 & |\Delta M_2| = 0.09 \\
M_3 = 13.77 & |\Delta M_3| = 0.28 \\
M_4 = 13.54 & |\Delta M_4| = 0.15 \\
\hline
\overline{M} = 13.49\,cm & \eta = \dfrac{0.76}{4\sqrt{4}} = 0.1\,cm
\end{array}
$$

各测量读数估读到小数点后两位，它正确地反映了米尺的精密度 0.01cm，且小数点后一位数之前均属可靠，只有小数点后的第二位数属于可疑数字。但从上面的计算可知，测量出现的误差为 $\eta=0.1cm$。由误差 η 表明测量结果小数点后第一位数已经属于可疑，所以算术平均值 M 不能取 13.49cm，而应取为 13.5cm。其最后结果则表示为 13.5±0.1cm。这就是说，平均值的有效数字位数是由误差 η 来截取的，计算结果，得数仅保留一位可疑数字，以下的数则四舍五入。

B，加减运算

有效数字的加减运算所得的和或差，其小数点后的有效数字的位数应以参加运算的各数中，小数点后位数最少者为准。

例： 13.65+0.0823+1.634＝？

其中 13.65 小数点后只有两位，是小数点后位数最少者，必须以它为准。

故取　0.0823 → 0.082 （保留多一位数字）

1.634 → 1.634

13.65+0.082+1.634＝15.366

对结果进行修正，使之与 13.65 的小数点后位数相同。所以最后结果是 15.37。

C，乘除运算

乘除运算所得的积或商，其有效数字位数跟参加运算中有效数字位数最少的那一个数相同，（有时会多一位或少一位）。

求 $2.321\underline{2} \times 0.3\underline{4}$＝？　　求 $1.\underline{4} \div 3.14\underline{2}$＝？

例一

$$\begin{array}{r} 2.321\underline{2} \\ \times\ 0.3\underline{4} \\ \hline \underline{9}\,\underline{2}\,\underline{8}\,\underline{4}\,\underline{8} \\ 6\,9\,6\,3\,\underline{6} \\ \hline 0.7\underline{8}\,\underline{9}\,\underline{2}\,\underline{0}\,\underline{8} \end{array}$$

最后结果应是 0.79

例二

$$\begin{array}{r} 0.44\underline{5} \\ 3.14\underline{2}\ \overline{)\ 1.\underline{4}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}} \\ 1.2\,5\,6\,8 \\ \hline \underline{1}\,\underline{4}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{0} \\ 1\,2\,5\,6\,8 \\ \hline \end{array}$$

最后结果应是 0.44