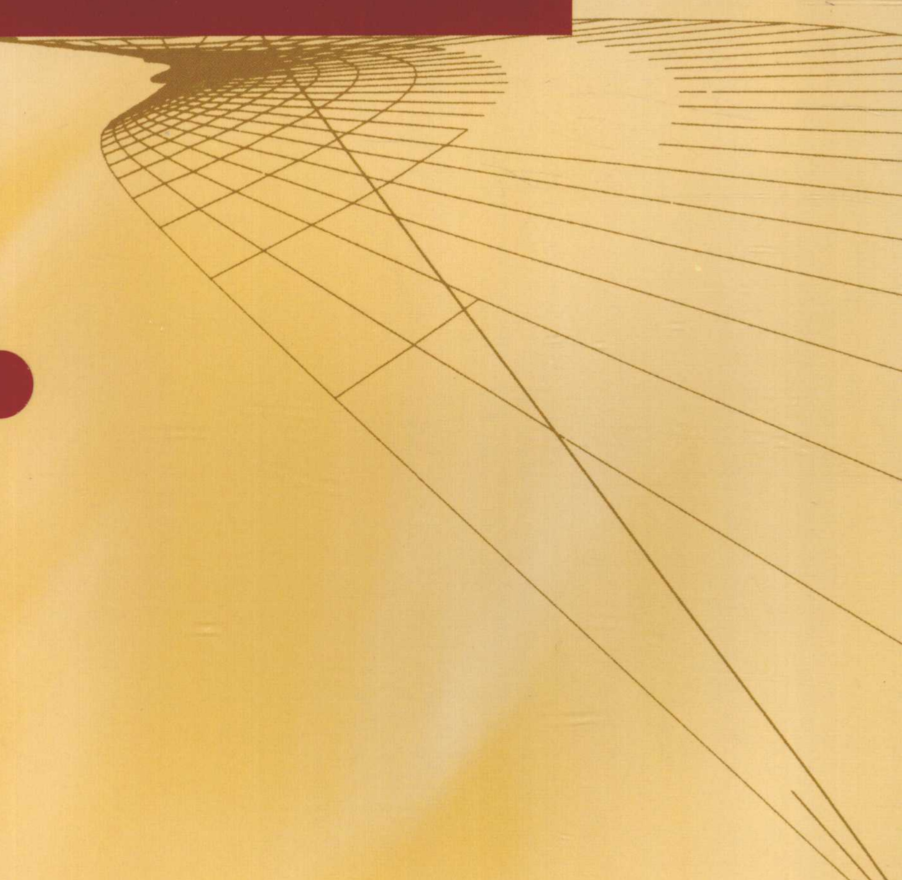
STML 大学生数学图书馆 6

STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY

平面代数曲线

□ Gerd Fischer 著

□ 胥鸣伟 译



高等教育出版社

平面代数曲线

PINGMIAN DAISHU QUXIAN

Gerd Fischer 著

胥鸣伟 译

高等教育出版社·北京

International Press

图字：01-2013-5231 号

Translation from the German language edition:
Ebene Algebraische Kurven
by Gerd Fischer

图书在版编目（CIP）数据

平面代数曲线 /（德）费舍尔 (Fischer, G.) 著；胥鸣伟译. -- 北京：高等教育出版社，2015. 11
（大学生数学图书馆；6）
书名原文：Plane Algebraic Curves
ISBN 978-7-04-032290-3

Ⅰ. ①平… Ⅱ. ①费… ②胥… Ⅲ. ①代数曲线 Ⅳ. ① O187.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 245734 号

策划编辑 赵天夫　责任编辑 赵天夫　封面设计 赵 阳　版式设计 张 杰
责任校对 刘 莉　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	889 mm × 1194 mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	8	版　　次	2015 年 11 月第 1 版
字　　数	210 千字	印　　次	2015 年 11 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00元

物 料 号　32290-00

《大学生数学图书馆》丛书序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流. 无论到国外留学或邀请国外学者到中国访问的学者每年都有增长，这对中国的科学现代化大有帮助. 但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多. 基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了. 很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益. 高等教育出版社和美国国际出版社在征求海内外众多专家学者的意见的基础上，组织了《大学生数学图书馆》丛书，这套丛书选取海内外知名数学家编写的数学专题读物，每本书内容精炼，涵盖了相关主题的所有重要内容.

我们希望这套翻译书能够使我们的大学生从更多的角度来看数学，丰富他们的知识. 本丛书得到了作者本人及海外出版公司的诸多帮助，我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2013 年 6 月

序言

"代数基本定理" 给出了关于单变量多项式零点问题的一个终结性的答案. 然而转到两个变量的情形时, 这些零点的集合一般地说是无限的, 人们可以将这个集合看成是一个几何图形, 更准确地说是条平面代数曲线. 这里成了代数和几何处理方式的交汇地, 难怪几个世纪来人们一直都在研讨这些代数曲线的性质. [III]

在关于这个主题的浩如烟海的书籍中又加进一本, 总需要一个理由, 至少要一个有特别意义的解释吧. 公开的动机是, 许多年前我曾被鼓动去写点关于代数曲线的东西. 我瞬间的反应是, 已经有许多, 也许是过多的关于它们的书了. 但我控制不了对此课题进行讲课的诱惑并且写了讲义. 请让我简短地解释一下它到底讲了些什么吧.

它包含了两个截然不同的部分. 从第零章到第五章是以尽可能初等的方式讲解曲线的几何: 切线、奇点、拐点等. 最重要的技术工具是基于结式的相交重数, 而中心结果则是关于两条曲线的相交点数的贝祖 (Bézout) 定理. 第五章的普吕克 (Plücker) 公式是这部分的最高点. 这些公式将前面章节研讨过的不变量联系了起来.

普吕克公式可以由初等方式虽然不是完全准确地却是几乎准确地给出. 所缺失的是对于对偶性更为深刻的理解, 以及对所出现的相交重数的有效计算. 分析所能提供的局部和整体的技术将由后面的第六章到第九章给出. 尽管这些结果的陈述和应用相对容易,

但要打好一个完善的基础则还是需要做一些工作的.

因此, 第六章到第八章含有对局部复分析的介绍. 依照每个人所喜好的观点不同, 这既可以看成是收敛幂级数的理论, 也可以看成是多变量全纯函数的理论. 我们这里所着重的是幂级数和幂级数环的代数性质; 这种处理方法一直可追溯到吕克特 (Rückert) 的开创性的工作 [R].

在最后一章里, 这些局部参量化被拼成了一个黎曼面. 借用克莱因 (Klein) 的一句名言则可以说成是, 曲线从视为它们牢笼的射影平面中解脱了出来, 游荡在一个固定空间之外了. 亏格公式归根结底则是初等普吕克公式的一个推广.

[VI] 附录包括了来自代数和拓扑中被反复用到的技术工具, 也是对于前面章节的一个补充.

本书从头至尾力图保持极为具体的风格, 尽可能详细解说用多项式和幂级数进行计算的方法. 大量的例子和图形也有助于许多东西的具体化. 这样, 长期被视为十分老派的那种代数几何又重新显示出它的重要性.

如人们所预计到的那样, 这里的几乎所有东西都可以在其他什么地方找到与其相同的形式. 对此, 我要特别提到沃克 (Walker)[Wa], 布豪 (Burau)[Bu] 以及布里斯科恩 – 克诺尔 (Brieskorn–Knörrer) [B-K] 的书. 但我的目的是要写出一本供一或两学期用的, 尽可能简明的导引式教材. (按照克诺尔的评论, 人们可以将这本小书描述为固定模型 [B-K] 的袖珍版.) 我们假定了一些基本的背景知识, 特别是在初等代数和复函数论方面. 大量的努力只是加强了我的信念: 不存在比通过代数曲线来处理代数几何和复分析更加漂亮的方法. 几何直观与 “解析” 方法在这里依然紧密地在一起, 而每一个新的技术则完全由明显的几何问题所激发. 这种场景仿佛是重返了因多次堕落而失去了的乐园.

感谢对成就本书有所帮助的所有人: 给予我鼓励的我的老师 R. Remmert; 对此书提出改进意见的我在杜塞尔多夫和在加州大学戴维斯分校的学生们; 对于无数细节不知疲倦地给予我帮助并打出

TeX 文稿的 H.-J. Stoppel 先生; 绘制插图初稿的 U. Daub 先生, 以及给出最终插图的 C. Töller 先生; 最后, 还有愿意以德文出版并以学生优惠价出售此书的出版者 Vieweg.

G. 费舍尔 (Gerd Fischer)
1994 年 6 月于杜塞尔多夫

目录

第零章

导引

设想一个物体随时间在空间中运动. 曲线论的任务便是抽象地描述并非常细致地研究上述的这个过程. 在今天已进一步从它拓展出许多分支, 然而我们无意在这里给出与此相关的各种问题的概述, 取而代之的倒是要仔细研讨一个小的、有局限性的, 但却是具有很强吸引力的分支, 即初等的平面代数曲线理论. 局限性首先表现在运动的物体所在的空间只是二维的, 即在平面之中; 因而许多情形会变得更加简单. 在解释曲线何时被叫作代数的之前, 我们先给出一些完全是一般平面曲线的例子. [1]

假设运动的物体是一个点, 因此这个运动过程被一个映射描述:

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \varphi(t) = (x_1(t), x_2(t)),$$

其中 $I \subset \mathbb{R}$ 代表一个区间; 参数 t 可看作是时间.

0.1. 直线

一条直线可以通过

$$\varphi(t) = v + tw$$

加以描述, 其中 $v, w \in \mathbb{R}^2$ 为向量, 而 $w \neq 0$ 是方向向量. 可选取 $I = \mathbb{R}$. 同一个子集 $C = \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ 却能通过许多很不相同的方式表达, 就是说, 许多不同的参数表示可以得到相同的轨迹 $\varphi(I)$. 就

像在固定线路上的火车总可以不断地更改时刻表. 然而结果却表明, 对描述 C 的方程 f 即

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = 0\}$$

只有很少可能的选择. 在直线情形总是由一个线性方程

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b, \quad (a_1, a_2) \neq (0, 0)$$

表示, 但对于 $c \in \mathbb{R}^*, k \in \mathbb{N}^*$, 每个 $g = c \cdot f^k$ 显然描述了同一条直线. 在 1.6 节中我们会仔细研究还可以给出哪一些方程.

0.2. 圆

中心在 (z_1, z_2), 半径为 r 的圆周有方程

$$(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = r^2,$$

[2] 并且还有一个超越参数表示:

$$\varphi(t) = (z_1 + r\cos t, z_2 + r\sin t).$$

但也有一个有理参数表示, 我们在 $(z_1, z_2) = (0, 0)$ 以及 $r = 1$ 的情形下来构造它. 为此, 从点 $p = (0, 1)$ 出发, 将该圆投射到直线 $x_2 = 0$. 容易计算出, 点

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

被投射到点 $(t, 0)$.

它给出了一个有孔圆周的参数表示 (图 0.1)

$$\varphi : \mathbb{R} \to C \setminus \{p\} \subset \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

在 $\mathbb{R}$ 上添加一个无穷远点 ∞, 故而通过令 $\varphi(\infty) = p$ 可使得 φ 有意义. 在第二章中我们将解释无穷远点是如何不可或缺的.

完全类似地可以得到任意圆锥曲线 (椭圆、双曲线、抛物线) 的有理参数表示.

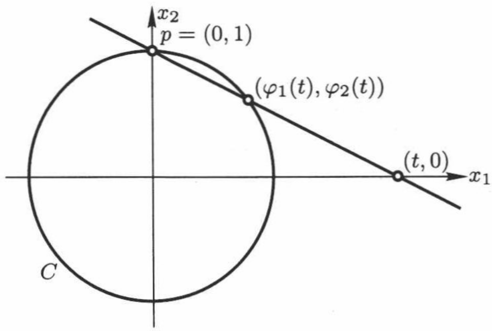


图 0.1. 圆周的有理参数表示

0.3. 尼尔抛物线

尼尔 (Neil) 抛物线 (即尖点三次曲线) $C\subset\mathbb{R}^2$ 由参数表示

$$\varphi(t)=(t^2,t^3)$$

给出, 从而具有方程

$$x_1^3-x_2^2=0.$$

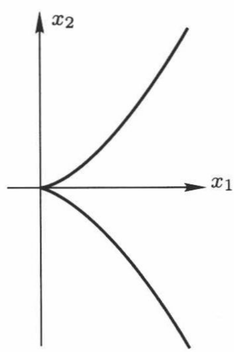


图 0.2. 尼尔抛物线

这是一个三次多项式, 因此人们称此曲线为一条三次曲线. 它 [3]

的切向量由

$$\dot{\varphi}(t) = (2t, 3t^2), \quad 从而 \quad \dot{\varphi}(0) = (0,0)$$

给出. 在时刻 $t = 0$, C 的通过速度转变了方向并且其大小为零. 可以证明对于这条 C 的任意可微参数表示

$$\psi : \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}^2, \quad 满足 \quad \psi(0) = (0,0)$$

都有 $\dot{\psi}(0) = (0,0)$. 对于充分可微的 ψ_i 容易从 $\psi_1^3 = \psi_2^2$ 推出这个结果. 如果 ψ 只是一次可微, 则还必须做更多的工作. 这种现象只会在一个奇异的点的情形碰到; 尼尔抛物线的这个尖点是奇点的一个简单而重要的例子.

0.4. 牛顿结点曲线

牛顿结点曲线由

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 = x_1^2(x_1 + 1)\}$$

给出. 为了得出这条曲线的图像, 使用如下的方法: 确定出 C 与直线 $x_1 = \lambda$ 的交点. 对 $\lambda < -1$ 没有交点, 对 $\lambda = -1$ 和 $\lambda = 0$ 交于一个点, 而对其他所有的 λ 有两个交点, 它们的纵坐标为 $\lambda^3 + \lambda^2$ 的平方根.

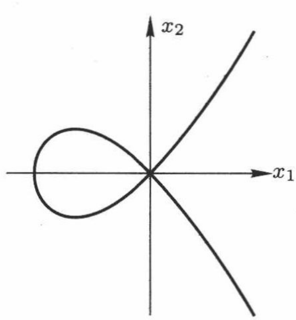


图 0.3. 牛顿结点曲线