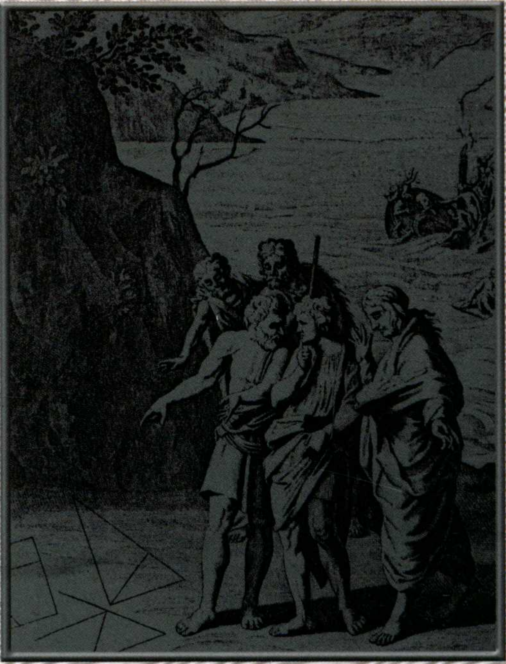
不等式·理论·方法（经典不等式卷）

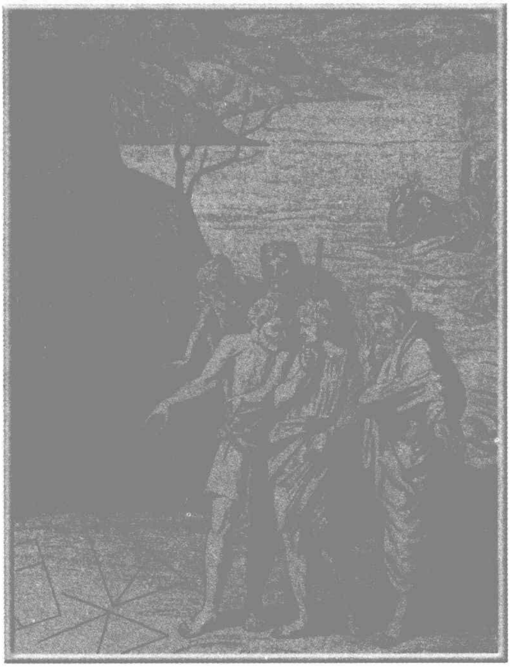
王向东　苏化明　王方汉　编著



- Bernoulli 不等式
- 算术－几何－调和平均不等式
- 幂平均与加权幂平均不等式
- 平均值
- 排序原理
- 其他经典不等式

HITP
哈爾濱工
HARBIN INSTITUTE

不等式·理论·方法（经典不等式卷）



王向东　苏化明　王方汉　编著

◎ Bernoulli 不等式

◎ 算术－几何－调和平均不等式

◎ 幂平均与加权幂平均不等式

◎ 平均值

◎ 排序原理

◎ 其他经典不等式

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是论述不等式的理论与方法的一本专门著作，主要围绕着若干著名的经典不等式，从它们的证明方法，相互之间的联系以及它们的应用等几个方面加以系统地论述.

本书可供不等式研究工作者以及高等师范类院校数学教育专业的学生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

不等式·理论·方法. 经典不等式卷/王向东，苏化明，王方戈编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5603-5425-5

Ⅰ.①不… Ⅱ.①王… ②苏… ③王… Ⅲ.①不等式-高等学校-教材 Ⅳ.①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 135809 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 19　字数 194 千字
版　　次　2015 年 7 月第 1 版　2015 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5425-5
定　　价　38.00 元

⊙ 序言

美国当代著名数学家 L. C. Larson 曾指出:“在数学的所有分支里,不等式都是有用的,并且不等式问题也是数学中最有意义的问题之一.”事实也正是这样,因为数学的基本结果往往是一些不等式而不是等式.这就难怪有如此众多的数学工作者为之感兴趣而长期专门从事不等式理论的研究,从而使不等式理论得到迅猛发展,至今方兴未艾.另外,由于不等式自身的完美性以及证明的困难性,近年来不等式问题又成了各种数学竞赛,特别是国际数学奥林匹克中的热门题目.如第1届至第31届国际数学奥林匹克共有近30道不等式的题目,此外还有许多极值问题和涉及不等式或利用不等式方法求解的题目.特别应当指出的是在数学教学中,无论是中学生或高等学校数学系学生,他们普遍感到不等式是难点,其问题难做、无定法可寻.遇到此类问题往往束手无策,一筹莫展.

综上所述,系统归纳、整理不等式的理论与方法,编写一本反映我国不等式领域的最新研究成果,为广大中学师生、各种奥林匹克学校以及不等式研究者提供一本相应的、合适的专题参考书是必要的.

本书把国内外浩如烟海的有关不等式的文献进行系统归纳、总结、整理，按照有关逻辑顺序，由浅入深，循序渐进，并吸收目前不等式研究的最新成果，给人以耳目一新的感觉.

本书包括例题在内证明了近千个不等式，其中大部分著名的经典不等式都给出了尽可能多的证明方法，这些方法都是国内外在不同时期，由不同的作者所给出. 值得指出的是其中有许多不等式是由我国数学工作者得到的，当然也包括了著者们的一些研究成果.

本书有别于同类书籍的最大特点是突出不等式的理论与方法（解法、证明方法、应用技巧），系统性强、方法全面、新颖、独到、巧妙，富有启发性，内容充实，具有一定深度，对每一经典不等式，从起源（原始形式）到各种推广和改进，从各种各样的证明方法到形形色色的应用技巧以及它们之间的内在联系都给以详细阐述. 无疑本书充分体现了“全、深、透”的基本思想.

不等式的内容和方法是丰富多彩的，需要指出的是本书是以论述初等不等式为主，基本上不涉及无穷不等式（即不等式中变量个数为无限）和导数、积分（即不等式的变量中含有导数或积分）不等式以及其他一些专门学科（诸如概率论、微分方程、泛函分析、数学规划、变分不等式理论、控制论等）中的不等式.

本书是作者们的一种尝试，失误和片面之处在所难免，真诚欢迎广大同行与广大读者批评指正. 同时，我们也期待着有更多和更好的不等式方面的佳作问世.

张石生
于四川大学

⊙ 前言

《不等式·理论·方法》一书是论述不等式的理论与方法的一本专门著作.第1章是不等式的基本概念和基本理论,其中包括不等式的定义、分类及各种性质,并论述了不等式的同解原理以及不等式与平面区域的关系.第2章全面系统地论述了各种类型的不等式和不等式组的解法,详细归纳了解不等式和不等式组的常用技巧.第3章总结了证明不等式的常用方法和基本技巧近三十多种,其中有些方法新颖、独到、具有一定的启发性.第3章前两节的方法是初等的基本方法.第3节论述了凸函数的性质、判定方法以及凸函数与不等式的关系,并利用凸函数方法证明了大量重要不等式.第4节主要阐述微积分知识在证明不等式当中的应用,并介绍了著名的Mitrinović-Vasić的λ-方法.第4章介绍了常见的经典不等式,其中包括著名的Bernoulli不等式、算术-几何-调和平均不等式、幂平均与加权幂平均不等式、Cauchy不等式、Kantorovich不等式、Hölder不等式、Minkowski不等

式、排序不等式、Jensen 不等式、Rado 不等式、Popoviciu 不等式、Minle 不等式、Aczél 不等式、Carlson 不等式、Young 不等式、Laplace 不等式和 Karamate 优化不等式等,并讨论了这些不等式的各种形式的推广. 特别是对这些经典不等式,本书着重论述它们之间的相互联系以及它们的各种应用,使之系统化. 同时,我们对每一类经典不等式都给出了各种可能的证明方法,其中有些方法是第 3 章的补充和扩展. 第 5 章是特殊类型的不等式. 其中第 1 节是三角不等式,介绍了证明三角不等式的常用方法,讨论了三角形中的各种不等式. 第 2 节是几何不等式,介绍了著名的等周问题、Fermart 问题和 Schwarz 问题,并讨论了诸如 Weisenböck 不等式、Finsler-Hadwiger 不等式、Pedoe 不等式、Erdös-Mordell 不等式以及关于三角形的主要几何不等式、多边形的几何不等式和关于四面体的不等式等,给出了它们的各种推广与应用,阐明了它们之间的关系. 同时第 5 章最后一节还介绍了绝对值不等式、有关复数的不等式、数列不等式和函数不等式等. 全书内容丰富、资料详实,并吸收了国内外最新研究成果.

在本书的编写过程中,我们参阅了数学期刊中大量的有关文章和参考书籍,本书的出版得到了广东省自然科学基金(S2013010014485、2014A030313619)、广东省高校省级重大项目(2014KZDXM063)、广东省高校特色创新项目(2014KTSCX150)、佛山科学技术学院学术出版基金、佛山科学技术学院数学重点学科的资助. 在此对作者们表示衷心地感谢.

我国著名数学家四川大学教授张石生先生在百忙中为此书作序,他还一直关心本书的写作,并提出了许

多宝贵的建议,在此我们也深表感谢.王永领先生为全书绘制了插图,宋春玲博士、何夏明硕士、何敏番硕士、吴楚芬博士等对书稿做了认真的校对,对他们的辛勤劳动致以亲切致谢.

本书所论及的专题为大家所注目,但写起来总有力不从心之感,谨将我们之拙见,作为一家之言,抛砖引玉,敬希广大同仁们提出斧正.

王向东

2015.5

⊙

目录

经典不等式

第4章

在不等式理论中，有很多不等式，由于它促进了不等式理论的发展，同时它们还在数学的各个分支中有广泛的应用，因此成为当今众所周知的经典不等式. 尽管这些不等式历史悠久而鲜为人知，但至今仍有不少数学工作者还对这些不等式做不断地探讨，给出新的证明方法，进行加强、推广、给出各种不同的应用. 为此，本章将围绕着若干著名的经典不等式，从它们的证明方法、相互之间的联系以及它们的应用等几个方面加以系统地论述.

4.1 Bernoulli 不等式

一、Bernoulli 不等式及其推广形式

定理 4.1 设 $x>-1$，n 是不小于 2 的正整数，则有

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \tag{1.1}$$

其中等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

这个不等式通常称为 Bernoulli 不等式. 下面我们给出它的几种典型证明方法.

证法1 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时

$$\text{左边}=(1+x)^2=1+2x+x^2,\text{右边}=1+2x$$

因 $x^2\geqslant 0$,故当 $n=2$ 时,式(1.1)成立,其中等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时,式(1.1)成立,即有

$$(1+x)^k\geqslant 1+kx$$

其中等号当且仅当 $x=0$ 时成立. 因为 $x>-1$,所以 $1+x>0$. 上式两边同乘以 $1+x$,得

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&\geqslant(1+kx)(1+x)\\&=1+(k+1)x+kx^2\end{aligned}$$

因为 $kx^2\geqslant 0$,所以

$$(1+x)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)x$$

故当 $n=k+1$ 时,式(1.1)也成立. 同样,其中等号当且仅当 $x=0$ 时成立. 从而由归纳法假设知,式(1.1)对任何不小于2的正整数 n 都成立.

评注 在以下的定理的各种证法中(包括例题的证明中),我们均略去等号成立条件的证明,如无特殊情况,本章和特殊类型不等式卷第5章均是如此,不再一一注明.

证法2 考虑恒等式

$$y^n-1=(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1)$$

若 $y\geqslant 1$,则有

$$y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1\geqslant\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}=n$$

从而

$$y^n-1\geqslant n(y-1)$$

即

$$y^n \geqslant 1+n(y-1)$$

若 $0<y<1$,则有

$$y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1<\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}=n$$

因为 $y-1<0$,所以

$$y^n-1>n(y-1)$$

从而

$$y^n>1+n(y-1)$$

总之,不论 $y\geqslant 1$ 或 $0<y<1$,恒有

$$y^n \geqslant 1+n(y-1) \tag{1.2}$$

在式(1.2)中令 $y=1+x$,则不论 $x>0$ 或 $-1<x<0$,恒有式(1.1)成立.

证法3 对任意的自然数 $n(n\geqslant 2)$,当 $-1<x\leqslant -\frac{1}{n}$时,有 $1+x>0,1+nx\leqslant 0$,因而

$$(1+x)^n>0\geqslant 1+nx$$

故式(1.1)成立;当 $x>-\frac{1}{n}$时,则 $1+nx\geqslant 0$. 由算术-几何平均不等式可得

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1+nx}&=\sqrt[n]{(1+nx)\times\underbrace{1\times 1\times\cdots\times 1}_{n-1个}}\\&\leqslant\frac{1}{n}[(1+nx)+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1个}]\\&=\frac{1}{n}(n+nx)=1+x\end{aligned}$$

故

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx$$

总之,只要 $x>-1$,恒有不等式(1.1)成立.

关于不等式(1.1)的证明,还可参见后面不等式

(1.4)的证法.

Bernoulli 不等式很容易推广为如下形式:

定理 4.2　若实数 $x_i(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$ 中每一个都大于 -1,并且它们同为正或同为负,则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$$
$$\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n \qquad (1.3)$$

其中等号当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中至少有 $n-1$ 个为零时成立.

证明　若

$$1+x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 0$$

则不等式显然成立,因此,不妨设

$$1+x_1+x_2+\cdots+x_n>0$$

令

$$A_n=\frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}\quad (n=2,3,\cdots)$$

则

$$A_{n-1}=\frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n-1})}{1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}$$

于是

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{(1+x_n)(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}$$
$$=1+\frac{x_n(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}\quad (n=3,4,\cdots)$$

因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 符号相同,且

$$1+x_1+x_2+\cdots+x_n>0$$

所以

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}\geqslant 1\quad (n=3,4,\cdots)$$

从而

$$A_n=A_2\cdot\frac{A_3}{A_2}\cdot\cdots\cdot\frac{A_n}{A_{n-1}}$$

$$\geqslant A_2=\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{1+x_1+x_2}\geqslant 1\quad(n=2,3,\cdots)$$

即

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}\geqslant 1$$

因此

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

特别地,在式(1.3)中取

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=x\quad(x>-1)$$

则得式(1.1),故式(1.3)为式(1.1)的推广.

定理4.3　设 $x>-1$,若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$,则

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x\tag{1.4}$$

若 $0<\alpha<1$,则

$$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x\tag{1.5}$$

(1.4)与(1.5)两式中等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

证法1　首先我们证明如下断言:

设 $y>0$,m,n 为自然数且 $m>n$,则

$$\frac{y^m-1}{m}\geqslant\frac{y^n-1}{n}\tag{1.6}$$

其中等号当且仅当 $y=1$ 时成立.

事实上,因为

$$\frac{y^m-1}{m}-\frac{y^n-1}{n}=\left[\frac{y^m-1}{m}-\frac{y^{m-1}-1}{m-1}\right]+$$

$$\left[\frac{y^{m-1}-1}{m-1}-\frac{y^{m-2}-1}{m-2}\right]+\cdots+\left[\frac{y^{n+1}-1}{n+1}-\frac{y^n-1}{n}\right]$$

为证式(1.6),只要证明

$$\frac{y^{n+1}-1}{n+1}-\frac{y^n-1}{n}\geqslant 0$$

即可.事实上

$$\begin{aligned}&\frac{y^{n+1}-1}{n+1}-\frac{y^n-1}{n}\\&=\frac{1}{n(n+1)}[n(y^{n+1}-1)-(n+1)(y^n-1)]\\&=\frac{1}{n(n+1)}[ny^n(y-1)-(y^n-1)]\\&=\frac{y-1}{n(n+1)}(ny^n-y^{n-1}-\cdots-y-1)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&ny^n-y^{n-1}-\cdots-y-1\\&=(y^n-y^{n-1})+(y^n-y^{n-2})+\cdots+(y^n-y)+(y^n-1)\\&=y^{n-1}(y-1)+y^{n-2}(y^2-1)+\cdots+\\&\quad y(y^{n-1}-1)+(y^n-1)\\&\begin{cases}\geqslant 0 & (\text{当 } y\geqslant 1 \text{ 时})\\ <0 & (\text{当 } 0<y<1 \text{ 时})\end{cases}\end{aligned}$$

故当 $y>0$ 时,有

$$\begin{aligned}&\frac{y^{n+1}-1}{n+1}-\frac{y^n-1}{n}\\&=\frac{y-1}{n(n+1)}(ny^n-y^{n-1}-\cdots-y-1)\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

由此即可推知式(1.6)成立.

在不等式(1.6)中令 $y=(1+x)^{\frac{1}{n}}$,其中 $x>-1$,则有

$$\frac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-1}{m}\geqslant\frac{(1+x)-1}{n}=\frac{x}{n}$$

从而

$$(1+x)^{\frac{m}{n}}\geqslant 1+\frac{m}{n}x$$

于是当 $x>-1$ 且 $\alpha>1$ 为有理数时，式(1.4)成立.

若 $\alpha>1$ 为无理数，我们总可用一组递增的大于1的有理数列 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$，无限地去逼近 α，即

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha$$

利用上面已证的结论，有

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha}-\alpha x-1 &= \lim_{n\to\infty}(1+x)^{r_n}-\lim_{n\to\infty} r_n x-1\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[(1+x)^{r_n}-r_n x-1\right]\geqslant 0\end{aligned}$$

因而式(1.4)对于 $\alpha>1$ 的任何实数均成立.

若 $\alpha<0$，令 $1-\alpha=\beta$，则 $\beta>1$. 当 $x>-1$ 时，利用上面已证的结论知

$$\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{\beta}\geqslant 1-\frac{\beta x}{1+x}$$

即

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1-\alpha}\geqslant 1-\frac{(1-\alpha)x}{1+x}$$

从而

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant 1+\alpha x$$

即当 $\alpha<0$，$x>-1$ 时，式(1.4)成立.

在式(1.4)中令 $1+x=y$，则当 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$ 时，若 $y>0$，则有

$$y^{\alpha}\geqslant 1-\alpha+\alpha y \tag{1.7}$$

其中等号当且仅当 $y=1$ 时成立.

若 $0<\alpha<1$，令 $\frac{1}{\alpha}=\beta$，则 $\beta>1$. 当 $y>0$ 时，利用式(1.7)，有

$$\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}\geqslant 1-\beta+\beta y^{\frac{1}{\beta}}$$

即

$$y^{\alpha}\leqslant 1-\alpha+\alpha y$$

在前式中令 $y=1+x$,则当 $0<\alpha<1,x>-1$ 时有式(1.5)成立.

证法2 先证式(1.5).设 α 是一有理数,故可表成 $\alpha=\frac{m}{n}$.因 $0<\alpha<1$,所以 m,n 都是正整数,而且 $m<n$.由 $x>-1$ 知 $1+x>0$,所以由算术-几何平均不等式得

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha}&=(1+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+x)^{m}}\\&=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)\times\cdots\times(1+x)}_{m个}\times\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{n-m个}}\\&\leqslant\frac{1}{n}[m(1+x)+(n-m)]=1+\frac{m}{n}x\\&=1+\alpha x\end{aligned}$$

再设 α 是任意小于1的正实数,这时一定能找到一有理数列 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$,无限接近 α 且 $0<r_n<1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\alpha$.由于 r_n 都是有理数,所以当 $x>-1$ 时,下列不等式成立

$$(1+x)^{r_n}\leqslant1+r_nx\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是

$$(1+x)^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}(1+x)^{r_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}(1+r_nx)=1+\alpha x$$

这就证明了式(1.5)成立.

下面证明式(1.4).先设 $\alpha>1$,若 $1+\alpha x<0$,则由于 $(1+x)^{\alpha}\geqslant0$,因此不等式

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant1+\alpha x$$

显然成立,故不妨设 $1+\alpha x\geqslant0$.由于 $\alpha>1$,所以 $0<\frac{1}{\alpha}<1$,由式(1.5)得

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant1+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha x=1+x$$