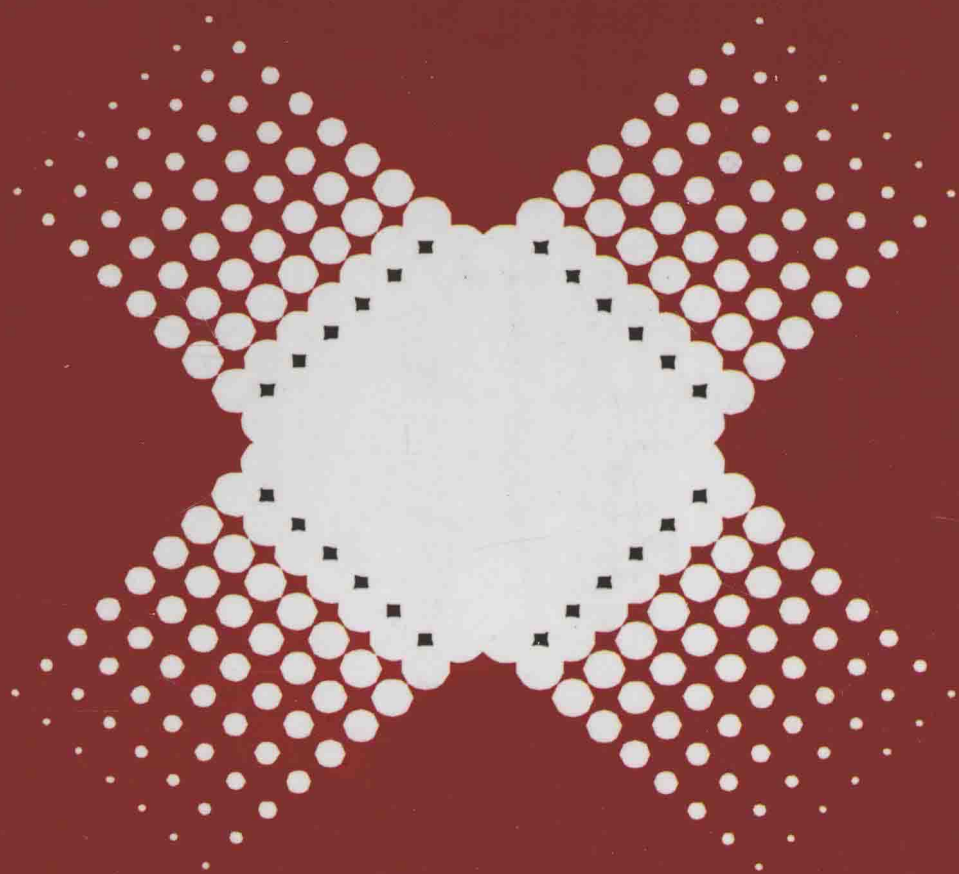


弹簧设计与制造工艺新技术 及质量监控实用手册

◎ 主编 杨 华



安徽文化音像出版社

弹簧设计与制造工艺新技术 及质量监控实用手册

下
卷



安徽文化音像出版社

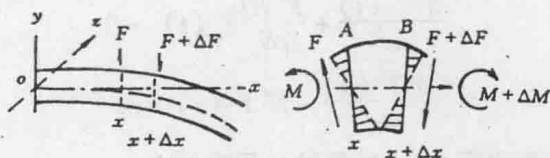


图 9-1 弯曲振动中杆基元的变形

元在弯曲振动中的受力情况如图 9-1 所示, 图中 x 向为杆的轴向, y 为横向, 即弯曲振动方向。如图所示, 作用在 A 面上的弹性切变力为 F , 作用在 B 面上的力 $F + \Delta F = F + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Delta x$, 据牛顿第二定律, 基元的横向加速度 $\partial^2 y / \partial t^2$ 与所受合力的关系为

$$\left[F + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Delta x \right] - F = \rho S \Delta x \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

即
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (9-1)$$

式中 S 为杆基元的横截面面积, ρ 为密度, y 为横向位移。切变力 F 构成了作用在基元上的平面弯曲力矩 M , 若以 A 面与中性轴的交点为坐标原点, 则当基元无整体的回转运动时, 合力矩应为零, 即

$$M(x) - \left[M(x + \Delta x) + \left(F + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x \right) \Delta x \right] = 0$$

由于 Δx 很小, 当略去二阶微小量时, 得

$$F = (-1) \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} = -\frac{\partial M(x)}{\partial x}$$

则代入式 9-3 得

$$F = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

注意到式 9-1 则得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (9-2)$$

式中 E 、 J 、 ρ 、 S 分别为 x 处杆基元的杨氏模量、截面惯量矩、密度、横截面积。上述方程成立的条件是忽略了杆基元自身的切变变形和其绕中性轴的回转运动, 在弯曲振动中满足这种条件的杆通称“欧拉梁”。若沿杆的轴向 E 、 J 、 ρ 、 S 均为常数, 则得到通用的杆横振动基本方程或波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\rho S} \times \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (9-3)$$

以分离变数法来解方程 9-3, 即令 $y(x, t) = Y(x) T(t)$ 并将其代入式 9-3, 在方程两边同除以 $Y(x) T(t)$, 移项后令其等于一个待定常数 K 的四次方, 则有

$$-\frac{\rho S}{EJ} \times \frac{1}{T(t)} \times \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{Y(x)} \times \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = K^4$$

故得到两个微分方程

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{K^4 EJ}{\rho S} T(t) = 0$$

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - K^4 Y(x) = 0$$

由这两个方程的解而得到方程 9-3 特解的通用表达式

$$y_n(x, t) = [A_{1n} \sin(K_n x) + A_{2n} \cos(K_n x) + A_{3n} \sinh(K_n x) + A_{4n} \cosh(K_n x)] \cos(\omega_n t + \theta_n) \quad (9-4)$$

式中 $Y(x)$ 部分称“振型函数”，其中系数 A_{1n} 、 A_{2n} 、 A_{3n} 、 A_{4n} 分别代表在第 n 个振动级次中相应的振动形式所占的比例，它们和待定常数 K_n 一样由边界条件决定。方程 9-3 的全解为各特解的线性组合

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) T_n(t)$$

将 9-4 代入上述两个分离方程后，为使用方便，将待定常数 K_n 与杆的长度 l 组合成一个新的待定常数 $(K_n l)$ ，并注意到圆频率 ω_n 与振动频率 f_n 间有 $\omega_n = 2\pi f_n$ ，则得到频率方程

$$f_n^2 = \frac{(K_n l)^4 EJ}{(2\pi)^2 \rho l^4 S}$$

由此得到

$$E = \frac{(2\pi)^2 \rho l^4 S f_n^2}{(K_n l)^4 J} \quad (9-5)$$

实际的试样杆的横截面与长度的比值往往并不很小，特别当振动级次较高 ($n > 1$ ，此时亦称“高阶振型”) 时，节点间的杆的振动长度逐渐缩短，就需要考虑截面的回转运动和剪切变形的影响，此时的研究对象称为“铁木辛哥梁”，方程 9-3 变为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{\rho S} \times \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{J}{S} \times \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{J}{kGS} (E \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}) = 0$$

式中第三项是瑞利给出的，考虑到回转运动时的修正项，第四项是铁木辛哥给出的切变修正项，式中 G 是切变模量， k 为与截面几何形状有关的切变常数。戈恩斯 (Goens) 的研究表明，还应考虑到切变所致截面翘曲对回转惯量的影响，此时常数 k 是由泊松比 μ 和振动级次 n 决定的变数。所获结果可用式 9-5 与一个修正系数 T_n 的乘积的形式表示，注意到 $J = \bar{r}^2 S$ (参见式 9-2)，则得

$$E = \frac{3.94784 \times 10^{-2} l^4}{(K_n l)^4 \bar{r}^2} \rho f_n^2 T_n \quad (9-6)$$

式中 E ——动态杨氏模量，Pa；

$K_n l$ ——由边界条件和振动级次 n 所决定的常数，无量纲；

l ——试样长度，mm；

\bar{r} ——试样横截面回转半径，mm；

ρ ——试样质量密度，g/cm³；

f_n ——振动级次 n 时试样的共振频率，Hz；

T_n ——振动级次 n 时由试样泊松比和其回转半径与长度的比值及截面形状所决定

的修正系数，无量纲。

C 实用计算公式

实用计算公式因振动体的边界条件或对试样的支撑、夹持方式而不同，现分别阐述。

在“自由弯曲共振法”中，对试样的支撑位置保持在其共振节点附近，因而使共振体处于两端自由的边界条件下。此时，因杆两端处的力矩 M 和切变力 F 为零，可知那里的 $Y''(x) = 0$, $Y'''(x) = 0$ ，代入 $Y(x)$ 的表达式后得到关于待定常数 $(K_n l)$ 的超越方程

$$\cos(Kl) \cosh(Kl) = 1 \quad (9-7)$$

由数值解法得出方程的根依次是 0、4.7300、7.8532、10.9956、14.137、17.279、20.420、…，此数列渐趋于表达式 $\frac{(2n-1)\pi}{2}$ 的值。因上述第一个根“0”相应于静止态，故将第二个根“4.7300”记为 $K_1 l$ ，与此相应的共振频率称为“基频”，记为 f_1 或 f_0 。由边界条件解得式 9-4 所述振型函数 $Y(x)$ 中各系数的值，得振型函数表达式

$$Y_n(x) = \cosh(K_n x) + \cos(K_n x) + \frac{\cosh(K_n l) - \cos(K_n l)}{\sinh(K_n l) - \sin(K_n l)} \times [\sinh(K_n x) + \sin(K_n x)] \quad (9-8)$$

$n = 0 \sim 4$ 的振型如表 9-1 所示。

将 $K_1 l = 4.7300$ 代入式 9-6 则得杨氏模量与回转半径为 \bar{r} 的杆的共振基频 f_1 间的关系式。由于圆杆的 $\bar{r} = d/4$, $\rho = \frac{4m}{\pi d^2 l \times 10^{-3}}$ ，当 E 以吉帕 (GPa) 为单位时，有实用公式

$$E = 1.6067 \times 10^{-9} \left(\frac{l}{d}\right)^3 \frac{m}{d} f_1^2 T_1 \quad (9-9)$$

式中 E ——动态杨氏模量，GPa；

l ——试样长度，mm；

d ——试样直径，mm；

m ——试样质量，mm；

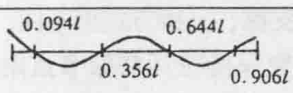
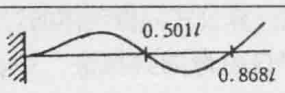
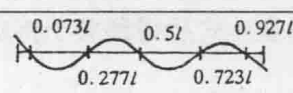
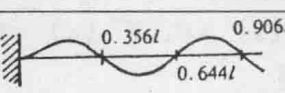
f_1 ——试样弯曲共振基频频率，Hz；

T_1 ——试样弯曲共振基频修正系数，无量纲。

表 9-1 较低振级下弯曲共振杆的振型

振动级次	自由-自由振型函数 $Y_n(x)$	自由-固定振型函数 $Y_n(x)$
1		
2		

续表 9-1:

振动级次	自由-自由振型函数 $Y_n(x)$	自由-固定振型函数 $Y_n(x)$
3		
4		

由于圆管 $\bar{r} = \frac{1}{4} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, $\rho = \frac{4m}{\pi (d_1^2 - d_2^2) l} \times 10^{-3}$, 则在同一单位制下, 由式 9-6 得

$$E = 1.6067 \times 10^{-9} \frac{l^3 m}{d_1^4 - d_2^4} f_1^2 T_1 \quad (9-10)$$

式中 E ——动态杨氏模量, GPa;

l ——管的长度, mm;

d_1 ——管的外径, mm;

d_2 ——管的内径, mm;

m ——管的质量, g;

f_1 ——管弯曲共振基频频率, Hz;

T_1 ——基频下管弯曲共振修正系数, 无量纲。

式 9-9 与式 9-10 中的修正系数 T 与试样回转半径 \bar{r} 的一般关系由下式所示

$$T_n = 1 + 16 \left\{ \frac{(K_n l)^2 [\sin(K_n l) + \sinh(K_n l)]}{\sinh(K_n l) - \sin(K_n l)} \times \frac{10 + 15\mu + 4\mu^2}{48(1 + \mu)} \pm \frac{(K_n l) \sin(K_n l) \sinh(K_n l)}{\sin(K_n l) - \sinh(K_n l)} \times \frac{2 - 3\mu - 4\mu^2}{24(1 + \mu)} \right\} \left(\frac{\bar{r}}{l} \right)^2 \quad (9-11)$$

式中 T_n ——第 n 振级下圆杆(管)弯曲共振修正系数, 无量纲;

$K_n l$ ——由边界条件和振动级次 n 所确定的常数, 同式 9-6, 无量纲;

μ ——试样的泊松比, 无量纲;

\bar{r}/l ——试样的回转半径与长度的比值, 无量纲。

$K_1 l = 4.7300$ 时的 $T_1(\frac{\bar{r}}{l}, \mu)$ 关系如表 9-2 所示。

表 9-2 基频弯曲共振圆杆、管的修正系数

\bar{r}/l	μ						
	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0025	1.0005	1.0005	1.0005	1.0005	1.0005	1.0005	1.0005
0.0050	1.0020	1.0021	1.0021	1.0021	1.0021	1.0021	1.0022
0.0075	1.0046	1.0046	1.0047	1.0047	1.0048	1.0048	1.0049
0.0100	1.0081	1.0082	1.0083	1.0084	1.0085	1.0086	1.0087
0.0125	1.0127	1.0128	1.0130	1.0131	1.0133	1.0134	1.0136
0.0150	1.0183	1.0185	1.0187	1.0189	1.0191	1.0193	1.0195
0.0175	1.0249	1.0252	1.0255	1.0257	1.0260	1.0263	1.0266
0.0200	1.0325	1.0329	1.0332	1.0336	1.0340	1.0344	1.0347
0.0225	1.0411	1.0416	1.0421	1.0426	1.0430	1.0435	1.0440
0.0250	1.0507	1.0513	1.0519	1.0525	1.0531	1.0537	1.0543
0.0275	1.0614	1.0621	1.0628	1.0636	1.0643	1.0650	1.0657
0.0300	1.0731	1.0739	1.0748	1.0756	1.0765	1.0773	1.0782
0.0325	1.0857	1.0868	1.0878	1.0888	1.0898	1.0908	1.0917
0.0350	1.0994	1.1006	1.1018	1.1030	1.1041	1.1053	1.1064
0.0375	1.1142	1.1155	1.1169	1.1182	1.1195	1.1208	1.1221
0.0400	1.1299	1.1314	1.1330	1.1345	1.1360	1.1375	1.1389
0.0425	1.1466	1.1484	1.1501	1.1518	1.1535	1.1552	1.1569
0.0450	1.1644	1.1664	1.1683	1.1702	1.1721	1.1740	1.1759
0.0475	1.1832	1.1854	1.1875	1.1896	1.1918	1.1939	1.1959
0.0500	1.2030	1.2054	1.2078	1.2101	1.2125	1.2148	1.2171

注：圆杆 $\bar{r} = d/4$ ；圆管 $\bar{r} = \frac{1}{4}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ 。

由于矩形截面杆的 $\bar{r} = h/\sqrt{12}$ ， $\rho = \frac{m}{lbh \times 10^{-3}}$ ，则由式 9-6 得

$$E = 0.9464 \times 10^{-9} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \frac{m}{b} f_1^2 T_1 \quad (9-12)$$

式中 E ——动态杨氏模量，GPa；

l ——试样长度，mm；

h ——试样平行振动方向上的几何尺寸（厚度）平均值，mm；

b ——试样垂直振动方向上的几何尺寸（宽度），mm；

m ——试样质量，g；

f_1 ——试样弯曲共振基频频率，Hz；

T_1 ——试样基频弯曲共振时的修正系数，无量纲。

厚度 h 时矩形杆的修正系数 T_1 由下式计算

$$T_1 = 1 + 6.585 (1 + 0.0752\mu + 0.8109\mu^2) \left(\frac{h}{l}\right)^2 - 0.868 \left(\frac{h}{l}\right)^4 \\ - \frac{8.340 (1 + 0.2023\mu + 2.173\mu^2) (h/l)^4}{1 + 6.338 (1 + 0.14081\mu + 1.536\mu^2) (h/l)^2} \quad (9-13)$$

式中 T_1 ——基频弯曲共振矩形杆修正系数，无量纲；

μ ——试样泊松比，无量纲；

h/l ——试样平行振动方向上的几何尺寸与其长度的比值，无量纲。

$\mu = 0.15 \sim 0.45$ 时的 $T_1 (h/l)$ 值如表 9-3 所示。

表 9-3 基频弯曲共振矩形杆的修正系数

h/l	μ						
	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.01	1.0007	1.0007	1.0007	1.0007	1.0007	1.0008	1.0008
0.02	1.0027	1.0028	1.0028	1.0029	1.0030	1.0031	1.0032
0.03	1.0061	1.0062	1.0063	1.0065	1.0067	1.0069	1.0071
0.04	1.0108	1.0110	1.0112	1.0115	1.0118	1.0122	1.0126
0.05	1.0169	1.0172	1.0175	1.0180	1.0185	1.0190	1.0196
0.06	1.0243	1.0247	1.0252	1.0258	1.0265	1.0273	1.0282
0.07	1.0330	1.0336	1.0343	1.0351	1.0360	1.0371	1.0383
0.08	1.0430	1.0437	1.0446	1.0457	1.0470	1.0484	1.0500
0.09	1.0543	1.0552	1.0564	1.0577	1.0593	1.0611	1.0631
0.10	1.0669	1.0680	1.0694	1.0711	1.0730	1.0752	1.0776
0.11	1.0807	1.0821	1.0838	1.0858	1.0881	1.0907	1.0936
0.12	1.0957	1.0974	1.0994	1.1017	1.1045	1.1076	1.1111
0.13	1.1120	1.1139	1.1163	1.1190	1.1222	1.1258	1.1299
0.14	1.1295	1.1317	1.1344	1.1376	1.1412	1.1454	1.1501
0.15	1.1481	1.1506	1.1537	1.1573	1.1615	1.1663	1.1717
0.16	1.1679	1.1708	1.1742	1.1784	1.1831	1.1885	1.1946
0.17	1.1889	1.1921	1.1960	1.2006	1.2059	1.2120	1.2188
0.18	1.2110	1.2145	1.2188	1.2240	1.2299	1.2367	1.2442
0.19	1.2342	1.2381	1.2429	1.2485	1.2551	1.2626	1.2710
0.20	1.2584	1.2627	1.2680	1.2743	1.2815	1.2898	1.2990

在“悬臂弯曲共振法”中，试样一端被刚性夹持而成悬臂状态，因而共振杆处于一端固定、一端自由的边界条件下。此时，在被夹持的 $x=0$ 处，因位移和转角为零，而有 $Y(0)=0$ 和 $Y'(0)=0$ ；在 $x=l$ 的自由振动端，因那里的力矩和切力为零而有 $Y''(l)=0$ 和 $Y'''(l)=0$ ，代入式 9-4 所述 $Y(x)$ 的表达式后由联立方程解得关于 $(K_n l)$ 的超越方程

$$\cos(Kl) \cosh(Kl) = -1 \tag{9-14}$$

略去头一个根“0”后，此方程的根 $K_1 l, K_2 l, K_3 l, K_4 l, K_5 l$ 依次是 1.875、4.694、7.855、10.996、14.137、…；可见随着 n 值的增加，数列的值渐与式 9-7 相应数列相同。由上述边界条件而得悬臂共振杆的振型函数表达式

$$Y_n(x) = \cosh(K_n x) - \cos(K_n x) - \frac{\sinh(K_n l) - \sin(K_n l)}{\cosh(K_n l) + \cos(K_n l)} \times [\sinh(K_n x) - \sin(K_n x)] \tag{9-15}$$

$n=0 \sim 4$ 时的振型如表 9-1 所示。将 $K_1 l = 1.875$ 代入式 9-6 可得具有回转半径 \bar{r} 的悬臂杆的杨氏模量与其弯曲共振基频频率 f_1 间的关系式。对于常用的具有矩形截面

的条带, 由于 $\bar{r} = h/\sqrt{12}$, 则有实用计算公式

$$E = 38.33 \times 10^{-12} \frac{l^4}{h^2} \rho f_1^2 T_1 \quad (9-16)$$

式中 E ——动态杨氏模量, GPa;

l ——试样自由振动长度, mm;

h ——平行振动方向上的试样尺寸, mm;

ρ ——试样的质量密度, g/cm^3 ;

f_1 ——试样基频弯曲共振频率, Hz;

T_1 ——基频弯曲共振修正系数, 以式 9-13 计算, 见表 9-3, 无量纲。

对于圆丝, 由于 $\bar{r} = d/4$, 此时的实用公式是

$$E = 51.11 \times 10^{-12} \frac{l^4}{d^2} \rho f_1^2 T_1 \quad (9-17)$$

式中 E ——动态杨氏模量, GPa;

l ——试样自由振动长度, mm;

d ——试样直径, mm;

ρ ——试样的质量密度, g/cm^3 ;

f_1 ——试样基频弯曲共振频率, Hz;

T_1 ——基频弯曲共振修正系数, 以式 9-11 计算, 见表 9-2, 无量纲。

由于热膨胀现象的存在, 需以变温过程中所测得的共振频率和经修正后的几何尺寸来完成相应温度下的弹性模量测量。因室温下长度为 L_0 的试样在温度 t 下变为 L_t , $L_t = L_0 [1 + \alpha (t - t_0)]$, 其中 α 为平均线膨胀系数, 则据式 9-6 可得温度 t 时模量 M_t 的计算公式

$$M_t = M_0 (f_t/f_0)^2 [1 / (1 + \alpha (t - t_0))] \quad (9-18)$$

式中 M_t ——温度 t 下的弹性模量, GPa;

M_0 ——温度 t_0 下的弹性模量, GPa;

f_t ——温度 t 下试样在变温炉(槽)中的共振频率, Hz;

f_0 ——温度 t_0 时试样在变温炉(槽)中的共振频率, Hz;

α ——温度 t_0 至 t 间试样平均线膨胀系数, $^\circ\text{C}^{-1}$;

t ——变温所达温度, $^\circ\text{C}$ (K);

t_0 ——为变温初始温度, $^\circ\text{C}$ (K)。

(三) 测量条件与要求

A 测量装置与器件要求

除了对试样的支撑——换能方式外, 图 9-2 可被视为共振法弹性测量的基本的或典型的装置示意图。由频率连续可调的音频振荡器输出的电信号经激振换能器转换为同频机械振动, 当施加于试样上的强迫振动力的频率等于试样的固有频率时, 试样发生共振, 相应的机械共振信号经拾振换能器转换成同频率的电信号, 此信号在选频放大装置

中被滤波——放大后，由指针式微伏表示出共振幅度，由示波器上的李沙育图形示出共振时的相位及幅度，此时借助数字频率计读取与共振图像相应的共振频率值。要求所用音频振荡器在 100Hz ~ 30kHz 范围内有连续可变的频率输出，输出功率应不小于 1W，在任一频率位置上的频率漂移应不大于 0.1Hz/30min。数字频率计的晶振稳定度应不低于 $10^{-8}/d$ 量级，振动周期测量精度应达 $0.001\mu s$ 。在所检测的试样频率变化的范围内，换能器的频响曲线应处于线性区，激振换能器的输出功率损失应不大于 3db，建议采用压电式换能器，亦可以动圈式扬声器作为激振器，以耳塞机作为拾振器。选频放大器对共振信号的检测灵敏度应不低于 $1\mu V$ ，推荐采用配有带通滤波器的传声放大器。较简易的振簧式悬臂共振检测装置如图 9-3 所示，其中试样被刚性地夹持在悬臂杆上，激振力由耦合丝传至悬臂杆，当激振力的频率等于处于悬臂状态的试样的固有频率时，试样发生共振，此时在试样自由端与电容式拾振器间的间隙产生明显的交互改变，这种变化使在原有的直流偏压（约 300V）上由感应而叠加一个与激振信号同频率的交变电压，由传声放大器观测这个感生电压即可实现共振检测。对测量仪器的要求与悬丝耦合装置相同。

B 试样要求与尺寸范围

被测样品应材质均匀，平直，表面无缺陷，粗糙度 R_a 应不大于 $1.6\mu m$ ，一般要求其横向尺寸的轴向不均匀性不大于均值的 0.7%，相对表面的不平度在 0.02mm 以内。“自由弯曲共振法”或“悬丝耦合共振法”所适用的试样的推荐长度为 120 ~ 180mm，圆杆（管）的外径为 4 ~ 8mm，矩形杆的厚度为 1 ~ 4mm，宽度为 5 ~ 10mm。当因试样的基频率弯曲共振频率较低而使频率检测精度下降时，建议改测试样一次谐波（ $n = 2$ ）的振动频率，将所得结果除以表 9-4 中的频率比 $K(2, 1)$ 值后再代入相应的公式进行计算；对于矩形杆，此时亦可将试样沿其纵轴旋转 90° ，将原来的宽度作为厚度重新进行检测。振簧式的悬臂共振检测装置主要用来检测厚度 0.2mm 左右的金属带或直径 0.5mm 以下的丝。若增加试样夹持装置的刚性并将“激振”与“夹持”分开，即在试样的夹持端附近置一电磁式激振换能器，则可检测尺寸较大的式样。推荐的宽厚比在 2.1 ~ 2.6 之间。

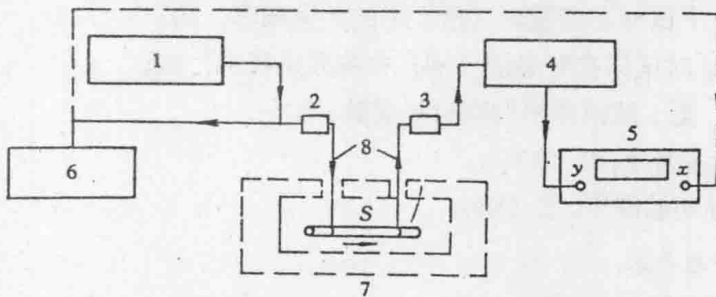


图 9-2 悬丝耦合弯曲-扭转共振检测装置

- 1—间频振荡器；2—激振换能器；3—拾振换能器；4—选频放大器；
5—阴极示波器；6—数字频率计；7—变测温装置；8—悬丝；S—试样铁

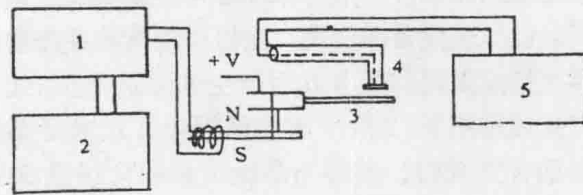


图 9-3 弹簧式悬臂杆弯曲共振检测装置

1—音频振荡器；2—数字频率计；3—试样；4—拾振器；5—选频放大器
S、N—磁极；+V—直流偏压

表 9-4 弯曲共振杆、管一次谐波与基频波的频率比 $K(2, 1)$

\bar{r}/l	μ						
	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
0.0000	2.7566	2.7566	2.7566	2.7556	2.7566	2.7566	2.7566
0.0025	2.7553	2.7553	2.7553	2.7553	2.7553	2.7552	2.7552
0.0050	2.7516	2.7515	2.7514	2.7513	2.7512	2.7511	2.7510
0.0075	2.7454	2.7452	2.7450	2.7448	2.7446	2.7444	2.7442
0.0100	2.7368	2.7364	2.7361	2.7358	2.7354	2.7351	2.7347
0.0125	2.7260	2.7254	2.7249	2.7244	2.7239	2.7233	2.7228
0.0150	2.7131	2.7123	2.7116	2.7108	2.7101	2.7093	2.7086
0.0175	2.6982	2.6972	2.6962	2.6952	2.6942	2.6933	2.6923
0.0200	2.6816	2.6803	2.6791	2.6778	2.6766	2.6754	2.6742
0.0225	2.6634	2.6619	2.6603	2.6588	2.6573	2.6558	2.6543
0.0250	2.6439	2.6420	2.6402	2.6384	2.6366	2.6348	2.6331
0.0275	2.6232	2.6210	2.6189	2.6168	2.6147	2.6127	2.6107
0.0300	2.6015	2.5990	2.5966	2.5942	2.5919	2.5896	2.5873
0.0325	2.5790	2.5763	2.5736	2.5709	2.5683	2.5657	2.5631
0.0350	2.5560	2.5529	2.5499	2.5470	2.5441	2.5412	2.5384
0.0375	2.5325	2.5292	2.5259	2.5227	2.5195	2.5164	2.5133
0.0400	2.5088	2.5052	2.5016	2.4982	2.4948	2.4914	2.4881
0.0425	2.4849	2.4810	2.4773	2.4736	2.4699	2.4663	2.4628
0.0450	2.4610	2.4569	2.4529	2.4490	2.4451	2.4413	2.4376
0.0475	2.4373	2.4330	2.4287	2.4246	2.4205	2.4165	2.4126
0.0500	2.4137	2.4092	2.4048	2.4005	2.3902	2.3920	2.3879

注：圆杆 $\bar{r} = d/4$ ；圆管 $\bar{r} = \frac{1}{4} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ ；矩形杆 $\bar{r} = h/\sqrt{12}$ 。

C 测量操作要点

主要有下述三个方面：(1) 换能——支撑方法与要求。当采用图 9-2 所述装置进行共振检测时，为排除由强迫共振所带来的测量值偏高的影响，使振动能以“微扰”的形式输入，保证试样处于自由共振状态，应使同时作为能量耦合点的悬挂点尽可能接近共振节点，推荐的悬挂点位于 $(0.18 \sim 0.215)l$ 范围内， l 为试样长度。所用悬丝应具有低刚性、高强度的特征，在 150°C 以下的测量中，多以丝、棉线为悬线，在高温下常用直径不大于 0.06mm 的镍铬丝、钨丝或碳纤维。悬丝长度应在 $100 \sim 300\text{mm}$ 之间，悬好的试样应处于水平状态，两端悬丝与试样的轴向中心线应在同一平面内。在以悬臂装

置进行测量时,为保证刚性支撑条件,应将试样尽可能地夹紧,但这个操作在检测易屈服的材料时应小心进行。(2)换能器的使用。在以自由弯曲共振法进行检测时,为排除由于悬丝共振及因试样支撑点偏离共振节点而产生的强迫共振的影响,可以图9-4所示的静电或电磁耦合方式代替图9-2所示的悬丝耦合方式来完成室温附近的动态杨氏模量测量。在采用静电耦合方式时,试样与激振电极间应预置30V以上的直流偏差以实现振源与试样间的同频谐振。由于高温下样品——电极间气体分子电离所致噪声的影响,使此方法的使用温度范围受到限制。适于在居里温度以下检测铁磁性材料弹性模量的电磁耦合方式可借助附加磁性贴片的方法用于非铁磁性材料的检测中,这种换能方式在悬臂装置中亦可取得良好使用效果。此时须注意消除换能器的静磁场对试样磁化的影响以及换能器间直接耦合的影响,为此要求换能器与试样间的距离不得小于2~3mm、两个换能器间的距离不小于120mm。(3)鉴频方法。准确而快速地完成试样共振的模式与振动级次的鉴别是共振频测量操作中的关键,常用的鉴频方法有“粉纹图法”、“阻尼法”和“频率比法”等三种。粉纹图法主要适用于具有矩形截面的试样,此时将硅胶末较均匀地洒在试样表面上,当试样共振时,会看到随着激振功率的增加这些粉末逐渐聚集到试样的节点(线)处。当采用阻尼法时,沿试样长度方向轻触其处于共振态的不同部位,此时从幅度检测仪表上可看到:在波节处无反映,在波腹处示值有明显衰减;弯曲模式下较低振动级次的节点位置如下表9-1所示。由于弯曲共振时试样的谐波频率比值因其边界条件的不同而呈现一系列特征值,故频率比法是变温测量中常用的有效方法。在自由弯曲共振中,若测得频率 f_1 后接着测得频率 f_2 ,且 f_2/f_1 值符合表9-4,则可知 f_1 即为自由弯曲共振基频频率。对于悬臂弯曲共振杆,同样据式9-6和式9-14可知 \bar{r}/l 趋于零时的个振动级次下的频率比为

$$f_1:f_2:f_3:f_4 = (1.875)^2:(4.694)^2:(7.855)^2:(10.99)^2 = 1:6.267:17.55:34.39$$

由此可知 $f_2 = 6.27f_1$ 、 $f_3 = 2.80f_2$ 、 $f_4 = 1.96f_3$;上述比 \bar{r}/l 的增加而略有减小。

(四) 应用与发展概况

A 普及情况与精度水平

悬丝耦合弯曲共振法被定为我国测量金属杆杨氏模量的方法,它亦被广泛用于轴向均匀、阻尼系数不大于 10^{-3} 量各种凝聚态物质的杆状试样的性能检测。在满足上述规定荐)的技术条件下,检测精度可达1%量级分辨率可达1‰量悬臂弯曲共振法主要用于丝、带材制成的小尺寸试样性能的检测测量精度可达5%。在阻尼材料的性能检测中亦有应用。

B 优缺点分析与发展方向

如果能保证被悬置的试样处于自由振动状态,悬丝能被拉紧且换能器具有足够高的能量转换效率,则“悬丝耦合弯曲共振法”可作为检测径长比近于零的杆状试样动态杨氏模量的优选方法。在精密测量中,将遇到因试样的支撑点与能量耦合点一而带来的强迫共振的影响问题,此时虽可用通过改变悬点来向振动节点逼近的方法予以排除,但操作较烦琐。悬臂弯曲共振法应用中的主要问题是试样实际振动长度测量问题,由于难以满足具有足够刚性的试样在无塑性变形前提下的刚性夹持条件,实际检测结果多出现负

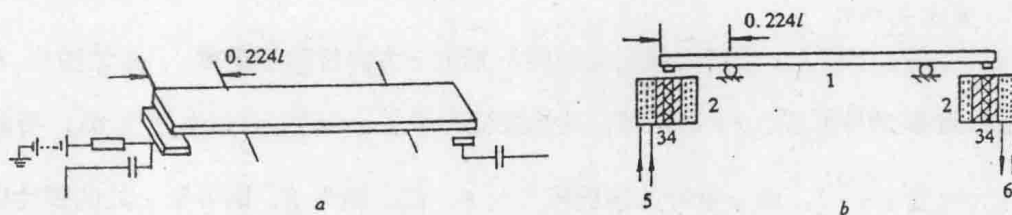


图 9-4 用于自由变曲共振的静电、电磁耦合方法

a—静电换能方式；b—电磁换能方式

1—样品；2—线圈；3—软铁；4—永磁体；

5—变频振荡器；6—放大器—示波器

的系统偏差。自动化是诸多测量方法的发展方向，在悬丝耦合法中能自动完成共振频率检测的典型装置如图 9-5 所示，其工作原理是通过能量正反馈的方法使试样的固有振动达到可检测的程度从而完成频率测量工作。技术关键是采用锁相环技术来保证反馈信号的相位与试样固有振动信号相位间的一致。据报道，该装置对低内耗样品的共振频率测量精度可高于 0.5%。

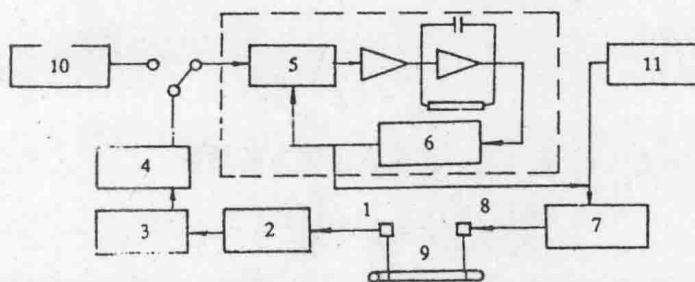


图 9-5 悬丝耦合锁相自激装置

1—拾振器；2—前置放大器；3—移相器；4—放大器；5—鉴相器；6—压控振荡器；

7—功率放大器；8—激振器；9—试样；10—示波器；11—数字频率计

二、纵共振法

(一) 适用范围

800℃以下径长比 (\bar{r}/l) 较大的棒或短杆杨氏模量的一般测量，亦用于细长圆杆杨氏模量及相关参数的精密测量。

(二) 测量原理

A 概述

两端自由杆的纵共振频率由杆的杨氏模量及其几何尺寸和密度决定，因此当精确得知上述物理量间的关系后，即可由测得的杆的纵共振频率及其几何尺寸和密度值来确定杆的动态杨氏模量。

B 基本关系式

若某时刻 t 于杆上 x 位置的截面经时间 δt 后向 x 方向位移了距离 u ，则如图 9-6 可见 t 时长为 δx 的体元经 $(t + \delta t)$ 时，其长度变为 $\delta(x + u) = (1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \delta x$ ，与此相应的体元应变 $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ 。设 x 处杆的杨氏模量为 E ，截面积为 S ，则可知 x 处的弹性作用力为 $ES\epsilon = ES \frac{\partial u}{\partial x}$ ，据牛顿第二定律可知作用于体元上的弹性作用力的合力 δF 与体元运动加速度 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 间满足关系式

$$\delta (ES \frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho S \delta x$$

若杆的轴向均匀，即 E 、 S 值与 x 无关，则有杆的纵向振动方程或波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

如令 $C_E^2 = \frac{E}{\rho}$ ，其中 C_E 相应于杆中拉伸波的传播速度，则上式可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_E^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9-19}$$

令 $u(x, t) = f_1(x) f_2(t)$ ，则代入上述方程后得

$$\frac{C_E}{f_1} \times \frac{d^2 f_1}{dx^2} = \frac{1}{f_2} \times \frac{d^2 f_2}{dt^2} = -\omega_n^2$$

式中 ω_n 是由杆的边界条件决定的待定常数。由上述两个常微分方程得到方程 9-19 特解的通用表达式

$$u_n(x, t) = (A_n \cos \frac{\omega_n}{C_E} x + B_n \sin \frac{\omega_n}{C_E} x) \cos(\omega_n t - \varphi) \tag{9-20}$$

对于节点受到支撑的自由纵振动杆，因两端的应力为零得知那里的 $\frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$ ，则由 $\frac{\partial u_n}{\partial x} |_{x=0} = 0$ 得知应有 $B_n = 0$ ，由 $\frac{\partial u_n}{\partial x} |_{x=l} = 0$ 知应有 $\frac{\omega_n}{C_E} l = n\pi$ ，其中 n 为自然数。因 $\omega_n = 2\pi f_n$ ，则有频率方程

$$f_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{(2\pi)^2 l^2} C_E^2 = \frac{n^2 E}{4l^2 \rho}$$

由此可知不同振级的共振频率比为简单整数比；当考虑到由于泊松收缩而对横向尺寸所加的修正时，有动态杨氏模量与纵共振频率间的基本关系式

$$E = 4.000 \times 10^{-3} \rho l^2 (f_n/n)^2 / K_n \tag{9-21}$$

式中 E ——动态杨氏模量，Pa；

ρ ——杆的质量密度，g/cm³；

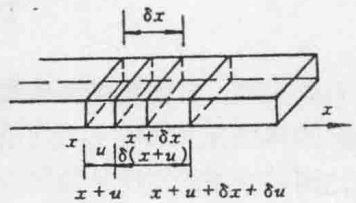


图 9-6 杆体元的纵向振动

l ——杆的长度, mm;

f_n ——第 n 个振动级次下的纵共振频率, Hz;

K_n ——第 n 个振极时与杆的截面形状、几何尺寸、泊松比有关的修正系数, 无量纲。

此时由式 9-20 可知振型函数为

$$f_1(x) = \cos \frac{n\pi}{l}x$$

式中 $n=1, 2, 3, \dots$; 由此可知基频下 ($n=1$) 振动节点位于 $x=0.5l$ 处。对于圆截面杆, 精度达 0.03% 的 K_n 数值表见文献。当试样直径 d 与振动波长 λ_n ($\lambda_n = (2l)/n$) 之比 $d/\lambda_n \ll 1$ 时, 有

$$K_n = 1 - \frac{\pi^2 n^2 \mu^2 d^2}{8l^2} \quad (9-22)$$

式中 μ 为泊松比。对于横向宽度为 b 的方截面杆, 可据换算关系 $d^2 = \frac{4}{3}b^2$ 由式 9-22 得出相应的 K_n 值。

C 实用计算公式

实用中多以试样的纵共振基频频率完成测量。当几何尺寸以毫米为单位、杨氏模量以吉帕为单位时, 因 $\rho = \frac{4m}{\pi l d^2 \times 10^{-3}}$, 则由式 9-21 得

$$E = 5.093 \times 10^{-9} \frac{ml}{d^2} f_1^2 / K_1 \quad (9-23)$$

式中 E ——动态杨氏模量, GPa;

m ——试样质量, g;

l ——试样长度, mm;

d ——试样直径, mm;

f_1 ——纵共振基频频率, Hz;

K_1 ——基频纵共振修正系数, 无量纲, 由式 9-22 算出。

对于矩形截面杆

$$E = 4.000 \times 10^{-9} \frac{ml}{bh} f_1^2 / K_1 \quad (9-24)$$

式中 E ——动态杨氏模量, GPa;

m ——试样质量, g;

l ——试样长度, mm;

b ——试样宽度, mm;

h ——试样厚度, mm;

f_1 ——纵共振基频频率, Hz;

K_1 ——基频纵共振时的修正系数, 以 $d^2 = \frac{2}{3}(h^2 + b^2)$ 算出等效直径后由式 9-22 算出, 无量纲。

(三) 测量条件与要求

A 测量装置与工作原理

在室温附近完成测量的通用型装置如图 9-7 所示,其工作原理与适用样品尺寸范围与图 9-2 所示装置近同。常采用在试样两端粘附压电片的方法来检测直径较大的试样,如直径 6mm、长为 60mm 的短粗试样。可用于快速检测铁磁性小样品的电桥装置如图 9-8 所示。图中 R_1 和 R_2 分别为 560Ω 、 100Ω 的多圈电位器,线圈 L_1 和 L_2 的电感均为 1mh 左右, L_1 内放置的 S_0 为一个尺寸与待测样品相近、起平衡作用的一般铁磁性样品, S_x 为放置在 L_2 中的待测样品, L_2 外侧放置一根对试样起预磁化作用的棒状磁铁,其在空线圈 L_2 内产生的场强应在 $800 \sim 2400\text{A/m}$ 之间。测量过程中,放置好试样 S_x 后,先在低于试样共振频率估计值 10kHz 左右的频率位置,借反复调节 R_1 和 R_2 使电桥平衡(指零仪表 3 示值最小),此后在徐徐增加信号源输出频率的同时观测指零仪的示值,测量引致示值突然增大的信号源的输出频率即为试样 S_x 的共振频率。与此相应的工作原理是:线圈 L_2 中的试样被置于信号源引致的交变磁场作用下,由于磁致伸缩力的频率等于试样的固有频率而使样品发生机械共振时,样品内磁畴的剧烈运动使线圈 L_2 中的感生电势成倍增加,由于此电势与诱导电势的变化方向相反,使桥臂间电势分布的平衡遭到破坏,故我们看到试样共振时指零端输出的突然增加;试样空间内设置偏磁场的目的,除为了保证信号源与试样间的同频谐振外(当附加磁场为零时,导致试样强迫振动的磁致伸缩力的频率为信号源频率的两倍),亦为了取得当平衡破坏时的较大的输出信号;设置平衡样品 S_0 除为了保证电桥的结构对称外,亦为了用增加损耗的办法来防止电桥谐振。

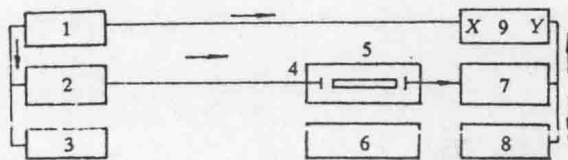


图 9-7 静电式自由纵共振杆检测装置

- 1—音频振荡器; 2—功率放大器; 3—数字频率计; 4—静电换能器;
- 5—试样、夹具、炉子; 6—温度控制器; 7—前置放大器;
- 8—交流电压表; 9—阴极示波器

B 试样、支撑与换能方法

与前述悬挂法所用试样相比,纵振法所用试样的截面较大,直径多大于 4mm ,采用环形刀口或呈 120° 角分布的三个螺旋在样品中点支撑,使其保持水平状态。当以图 9-7 所示装置检测直径 6mm 、长 60mm 的圆柱或以图 9-8 所示装置检测直径 $3.0 \sim 6.0\text{mm}$ 、长 $25 \sim 60\text{mm}$ 的铁磁性试样时,可不予支撑。当以静电换能方法进行径长比较小的杆的纵共振频率的精密测量时,试样端部与极间的距离约为 0.2mm ,以调频技术来检测因试样共振所致的 $0.005 \sim 0.010\text{pF}$ 的电容变化,并将据式 9-23 所得 E 值再乘以因子

$(1 - \frac{1}{8Q^2})^{-1}$ 来对由振动阻尼造成的测量值偏低的影响进行修正, 其中 Q 为机械品质因数。

C 调谐与鉴频方法

共振调谐与鉴别的方法与本篇 3.1.1.3 节中所述基本相同。在室温下测量尺寸较小的试样时, 可用以手按压试样的方法来鉴别无支撑试样的共振。在变温过程中, 当共振幅度变化不明显时, 可据试样共振时相位的突变所伴随的李沙育图形的旋转、增大和消失来鉴别共振。频率比法此时亦是有效的鉴别方法, 纵共振试样各振动级间的频率比为简单整数比。

(四) 应用与发展概况

A 普及情况与精度水平

为粉末冶金制品及硬质合金材料杨氏模量测量的标准方法, 测量精度约 5%。当以静电换能方式完成径长比远小于 1 的杆状试样的精密测量时, 纵振频率温度系数的测量不确定度可小于 $0.2 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, 杨氏模量的检测精度可好于 1%。在机械滤波器制造行业以图 9-8 所示装置来完成试样间弹性不均匀性的检测, 纵共振频率的分辨率可达 1‰量级。

B 主要优缺点与发展方向

纵共振法的优点是共振过程中试样截面的畸变较小, 适于检测截面较大的试样, 缺点是以静电换能方式进行共振频率的精密测量时, 因振幅较小而使设备的造价较高, 且这种方法在检测宽厚比较大的矩形杆时测量结构的准确性较低。测量技术的发展方向是建立可自动跟踪共振频率变化的调频检测装置。由辛普森等人建立的此类装置可检测直径 9.5mm, 长度 100mm 的试样, 可在 2% ~ 4% 的范围内自动完成频率变化的精密测量。

第二节 杆状试样切变模量测量方法

切变模量和杨氏模量一样, 同为表征材料弹性性能的重要参数, 但相比之下此量更难以测量。由于受扭角计精度的限制, 难以准确测得初始切变模量; 在动力学测量方法中, 也存在因扭共振振幅与试样半径成正比而相对其他模式的振幅相对较小的问题, 这除了要求所用的振动传感器(换能器)需具有更高的灵敏度外, 亦要求测量在横向尺寸较大的试样上进行, 后一要求造成了悬臂扭转共振检测装置中试样固定的困难, 从而限制了这种检测方法的应用, 这里着重阐述的是“自由扭转共振法”。

一、适用范围

低温及中高温下横截面均匀的杆或管状金属及其合金、玻璃、陶瓷、碳和石墨制品试样的扭转共振特征参数与相应切变模量的测量。以碳纤维作为悬丝, 并采用哑铃状试样可完成 1200℃ 以上高温切变模量的相对测量。

二、测量原理