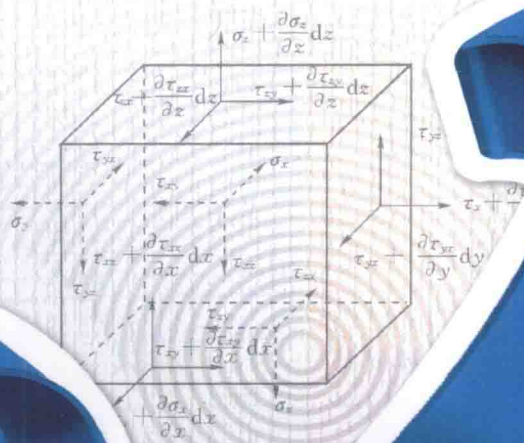




普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

弹性力学与有限单元法 简明教程

任述光 刘保华 编著



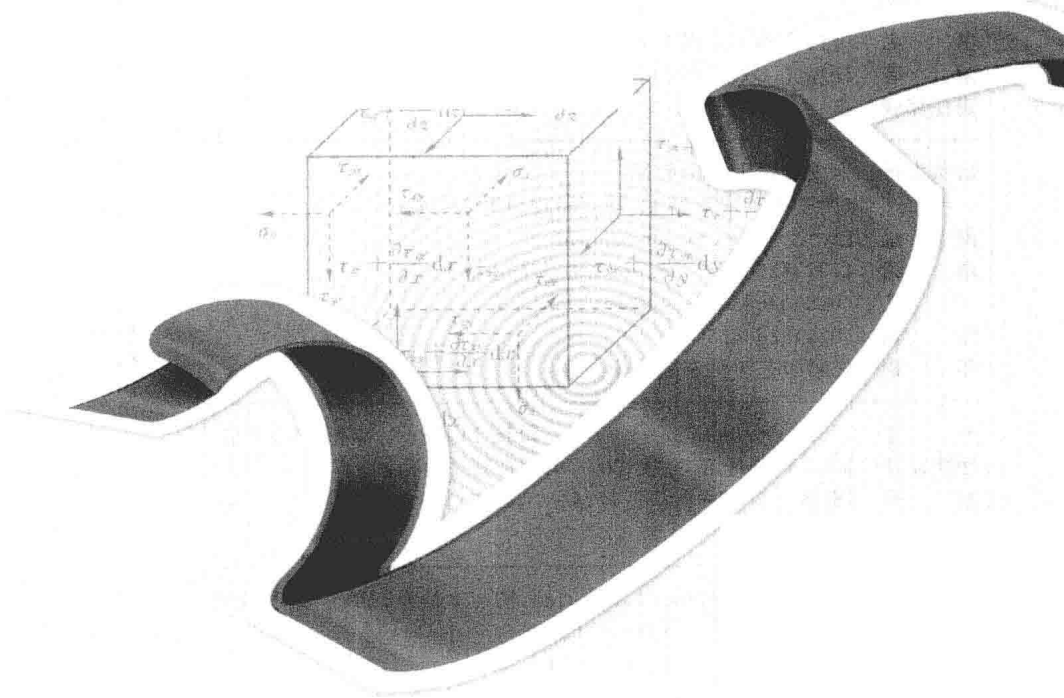
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

弹性力学与有限单元法 简明教程

任述光 刘保华 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是基于为工程类土木、水利、机械等相关专业本科生学习弹性力学及有限单元法提供一本简明易懂的教材而编写的。包含弹性力学与有限单元法中最基础的内容,简明而系统地阐述了弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法,为学习和掌握有限单元法提供必要的力学理论基础。全书共分为十章及附录。1~7章是弹性力学的基础理论和最有实用价值的重要概念和分析方法,是进一步学习有限单元法的基础,包括应力分析、应变分析、本构关系,弹性力学的基本原理、弹性力学的平面问题的求解。第8章以弹性力学平面问题的有限元求解为例,以三节点三角形单元为基础,介绍了有限单元法的基本概念及基本思想。第9章介绍了平面问题的高精度单元。第10章介绍大型通有限元软件 ANSYS 的基本使用方法和简单应用实例。为帮助读者理解掌握弹性力学的基本理论,本书附录介绍了的学习弹性力学需要用到的矢量场、张量场运算等数学知识。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学与有限单元法简明教程/任述光,刘保华
编著. —西安:西安交通大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-5605-7728-9

I. ①弹… II. ①任… ②刘… III. ①弹性力学-高等学校-教材 ②有限元法-高等学校-教材 IV. ①0343
②0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 181177 号

书 名 弹性力学与有限单元法简明教程
编 著 任述光 刘保华
责任编辑 李 文

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 虎彩印艺股份有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 14.75 字数 335 千字
版次印次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-7728-9/O·511
定 价 36.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248 (029)82665249
投稿热线:(029)82669097 QQ:8377981
读者信箱:lg_book@163.com

版权所有 侵权必究

弹性力学与有限单元法简明教程

前言

FOREWORD

弹性力学是工程力学和工科许多相关专业的基础课程。随着科学技术的发展,弹性力学也在不断地发展,理论的进一步完善和实际应用的开拓是其特点之一。特别是弹性力学理论与现代电子计算机技术的紧密结合,对许多工程实际问题地解决提供了技术支持,为弹性力学学科的发展和完善奠定了良好的基础。

有限元法是一种离散化的数值计算方法,以电子计算机为手段,可以计算各种复杂的工程结构,是工程技术人员从事研究、计算和工程设计的有力工具。目前,有限单元法已经在航空、造船、机械、冶金、水利、建筑等工程部门广泛应用,并取得显著效果。它是一种行之有效的偏微分方程数值解的计算方法,是解决诸如结构分析、流体力学、电磁学、热学、弹性力学问题的有力工具。而自然科学和生产技术的发展又极大地推动了有限元法的发展,丰富了它的内容。现在各行各业都已经拥有了一定数量的商业有限单元法分析计算机软件。

在高等学校中,有限元法已成为工程类专业学生的必修课程,如何使这些软件为更多的人掌握和应用,解决工程问题,是教学上必须考虑的。有限单元法商业软件不是一个“傻瓜”类的应用程序,它是基于一定的基础理论知识的,如用有限单元法求解结构的应力应变问题就是基于弹性力学的知识建立起来的,对弹性力学知识点掌握和理解直接关系到有限单元法软件应用的效果。所以,在学习有限单元法之前,先学习弹性力学的基础知识是非常必要的。我们在学习过程中,要正确理解和掌握有限元法中的数学概念和方法,逐步培养利用这些概念和方法解决实际问题的能力。要勤于思考,善于比较。这样,才能抓住本质,融会贯通。

在编写过程中,注意吸收同类教材的长处,力图贯彻“少而精、重实用”的原则,深入浅出地把基本理论写到位,又较好地联系工程实际问题,尽量使内容的叙述通俗易懂。各章均附有适量习题,以供练习。相信本书具有一定的理论意义并有实际应用方面的参考价值。

由于编者水平有限,不当或疏漏之处在所难免,请专家读者给予批评指正。

第1章 弹性力学的基本概念

- 1.1 弹性力学的性质及任务 /1
- 1.2 弹性力学的基本概念 /2
 - 1. 体积力与面积力 /2
 - 2. 应力与应变 /2
 - 3. 位移与变形 /5
- 1.3 弹性力学的基本假定 /5
- 1.4 弹性力学的发展简史 /6
- 习题 /8

第2章 应力分析

- 2.1 一点的应力分析 /9
- 2.2 应力分量的坐标变换 /11
- 2.3 主应力、应力状态的不变量 /13
- 2.4 八面体和八面体应力 /17
- 2.5 平衡微分方程 /20
- 2.6 二向应力状态的应力分析 /21
- 2.7 应力边界条件 /24
- 习题 /24

第3章 应变分析

- 3.1 位移与应变几何方程 /26
 - 1. 位移函数 /26
 - 2. 变形与应变分量 /27
 - 3. 正应变 /28
 - 4. 切应变 /28
 - 5. 几何方程与工程应变 /29

- 3.2 变形位移与刚性转动位移 /29
 - 1. 纯变形位移与转动位移 /30
 - 2. 位移的分解 /31
- 3.3 应变的坐标变换 /32
- 3.4 主应变和应变不变量 /33
 - 1. 主应变的概念 /33
 - 2. 主应变特征方程与不变量 /34
- 3.5 应变张量的分解 /35
 - 1. 体积应变 /35
 - 2. 应变球张量与应变偏张量 /36
- 3.6 应变协调方程 /36
 - 1. 变形协调方程 /37
 - 2. 变形协调方程的意义 /38
- 习题 /38

第4章 弹性力学基本原理

- 4.1 弹性体的应变能原理 /40
 - 1. 弹性应变能 /40
 - 2. 格林公式 /41
 - 3. 应变能原理 /41
- 4.2 广义胡克定律 /42
 - 1. 应力应变关系的一般表达式 /42
 - 2. 广义胡克定律 /43
- 4.3 各向异性弹性体的本构关系 /43
 - 1. 完全各向异性弹性体 /43
 - 2. 具有一个弹性对称面的各向异性弹性体 /44
 - 3. 正交各向异性弹性体 /45
 - 4. 横观各向同性弹性体 /46
- 4.4 各向同性弹性体的应变能 /49
 - 1. 各向同性弹性体 /49
 - 2. 应变表示的本构关系 /51
 - 3. 应力表示的本构关系 /51
 - 4. 各向同性弹性体的弹性应变能 /52
- 4.5 弹性力学的一般原理 /52
 - 1. 虚功原理 /52
 - 2. 势能变分原理 /53
- 习题 /54

第5章 平面问题的基本理论

- 5.1 平面问题的基本概念 /56
 - 1. 平面应力问题 /56
 - 2. 平面应变问题 /57
- 5.2 平面问题的基本方程 /58
 - 1. 平衡方程 /58
 - 2. 几何方程 /58
 - 3. 物理方程 /60
 - 4. 相容方程 /60
 - 5. 应力表示的相容方程 /61
- 5.3 边界条件及圣维南原理 /61
 - 1. 边界条件 /61
 - 2. 圣维南原理 /62
- 5.4 常体力问题的求解及应力函数 /64
 - 1. 应力分量与应力函数 /64
 - 2. 应力函数与双调和方程 /65
 - 3. 应力函数的物理意义及边界条件表示 /66
- 习题 /67

第6章 直角坐标解平面问题

- 6.1 逆解法与应力函数 /70
 - 1. 一次多项式 /70
 - 2. 二次多项式 /70
 - 3. 三次多项式 /71
 - 4. 四次多项式 /71
- 6.2 受集中力作用的悬臂梁 /72
 - 1. 边界条件与应力函数 /73
 - 2. 悬臂梁的应力 /73
 - 3. 悬臂梁的变形 /74
 - 4. 悬臂梁的位移推导 /75
 - 5. 悬臂梁端面位移边界条件 /75
- 6.3 受均布载荷作用的简支梁 /77
 - 1. 简支梁及其边界条件 /77
 - 2. 应力函数分析 /78
 - 3. 待定系数确定 /79
 - 4. 端面边界条件简化 /79

- 5. 简支梁应力分析 /80
- 6.4 楔形体受重力和液压力 /81
 - 1. 楔形体水坝应力函数 /81
 - 2. 面力边界条件 /82
 - 3. 水坝应力分析 /82
- 6.5 矩形截面梁的级数解法 /83
 - 1. 应力函数与双调和方程 /83
 - 2. 应力函数特解 /84
 - 3. 级数形式的应力分量 /84
 - 4. 级数应力函数系数的确定 /85
- 习题 /86

第7章 用极坐标解平面问题

- 7.1 极坐标下的基本方程与应力分量 /89
 - 1. 平衡微分方程 /89
 - 2. 几何方程 /90
 - 3. 本构方程 /93
 - 4. 应变协调方程 /94
 - 5. 极坐标中的应力分量 /95
 - 6. 应力分量的坐标变换 /95
- 7.2 轴对称问题 /96
 - 1. 应力函数与应力分量 /96
 - 2. 轴对称问题的位移 /97
- 7.3 圆筒或圆环受均布压力 /98
- 7.4 压力隧洞 /100
- 7.5 圆孔的孔口应力集中 /103
- 7.6 半平面体在边界上受集中力 /107
- 7.7 半平面体在边界上受分布力 /111
- 习题 /113

第8章 有限单元法基础

- 8.1 有限元的基本概念 /116
- 8.2 三角形单元分析 /117
 - 1. 结构的离散化 /117
 - 2. 三节点单元的位移模式 /119
 - 3. 收敛准则 /124
- 8.3 单元载荷移置 /126

- 1. 集中力的移置 /127
- 2. 体力的移置 /127
- 3. 分布面力的移置 /127
- 8.4 单元刚度矩阵 /129
 - 1. 刚度矩阵的形成 /129
 - 2. 刚度矩阵的性质与物理意义 /132
- 8.5 整体分析 /133
 - 1. 刚度集成法的物理意义 /133
 - 2. 刚度矩阵集成的规则 /134
 - 3. 约束条件的处理 /135
 - 4. 整体刚度矩阵的特点与存储方法 /137
 - 5. 线性方程组的解法 /139
 - 6. 弹性力学平面问题有限元计算实例 /141
- 习题 /150

第 9 章 平面问题的高阶单元

- 9.1 六节点三角形单元 /154
 - 1. 面积坐标 /154
 - 2. 位移模式 /156
 - 3. 应变矩阵 /156
 - 4. 单元刚度矩阵 /157
- 9.2 矩形单元 /157
- 9.3 平面等参单元及数值积分 /159
 - 1. 等参单元的概念 /159
 - 2. 坐标变换 /162
 - 3. 平面等参数单元 /163
 - 4. 等参元中的数值积分 /166
- 9.4 有限元分析中若干问题的处理 /168
 - 1. 离散化时应注意的问题 /168
 - 2. 大应力梯度部分的处理 /168
 - 3. 应力计算结果的整理 /169
- 习题 /169

第 10 章 通用有限元软件 ANSYS 简介

- 10.1 ANSYS 程序概述 /171
 - 1. ANSYS 的内容 /171
 - 2. ANSYS 的特征 /174

- 3. ANSYS 的数据接口程序 /178
- 10.2 ANSYS 程序计算示例 /178
 - 1. ANSYS 结构分析基本流程 /178
 - 2. 应用实例 /179

附录 A 齐次函数的欧拉定理/216

附录 B 矢量及矢量场运算/217

附录 C 张量基础/223

参考文献 /226

1.1 弹性力学的性质及任务

弹性力学是研究弹性体在载荷作用或温度变化以及支座移动等因素作用下弹性体内应力和变形分布规律的一门学科。它属于固体力学范畴,是许多工科专业的基础课,尤其对土木工程、结构工程和水利工程专业来讲更是一门重要的专业基础课。弹性力学的研究内容与材料力学、结构力学的研究内容有相同之处,即它们都是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力、应变和位移。然而,这三门学科在具体的研究方法和研究对象上是有区别和分工的。

首先,材料力学主要是研究一维构件,即杆状构件,也就是一个方向尺寸远大于另外两个方向尺寸的构件。单个杆件在拉压、剪切、扭转、弯曲下的应力和变形构成了材料力学的主要研究内容。而结构力学则以杆状构件体系为研究对象,讨论若干个杆件在各种连接方式下的杆件体系,如桁架、刚架等,在载荷或其他因素作用下的内力分布及变形。在得到了结构中各杆件的内力后便可以运用材料力学的方法进一步研究各杆件内的应力分布。弹性力学研究的范围就很广泛了,一般来说,弹性力学以三维弹性体为研究对象,工程结构中的板、壳、块体、基础、管道、叶轮等等各种形式的构件都可以用弹性力学的方法来分析。对于杆状构件作进一步的、更加精确的分析,也要用弹性力学的方法。

在研究方法上弹性力学和材料力学也有所不同。材料力学在研究杆件的应力和应变时,为了简化数学推演,除了必须的基本假设外,常常再引用一些关于构件变形状态或应力分布的所谓“附加假设”,这样得出的解答往往只能是近似的。弹性力学则不然,它除了基本假设外,通常无须再做那些“附加假设”,而是严格地根据静力、几何、物理三方面的条件,用精确的数学推演,最后求得问题的全部解答。所以弹性力学可以用来校核材料力学所得出的近似解答,判断其准确程度和适用范围。例如,在材料力学里研究梁的剪切弯曲时,我们引用了平面假设,从而得出梁横截面上的正应力沿梁高按直线分布的结论。在弹性力学里研究同一问题时就没有引用这样的假定,分析计算以后得出梁的横截面上的正应力是沿梁高按曲线分布。进一步分析可以得出这样的结论:如果梁的高度远小于梁的跨度时,材料力学按平面假设得出的结论足够精确。这就从理论上证实了材料力学中平面假设的合理性。

由此可以看到,弹性力学和材料力学的性质和任务总的来说是一致的。但是,它们之间又有区别,弹性力学比材料力学研究的范围要广,能解决一些用材料力学解决不了的问题。在研究手段方面,弹性力学用到的数学方法要比材料力学复杂得多,因此弹性力学求得的解更为精确,能够校核材料力学对同类问题解答的结果。

1.2 弹性力学的基本概念

弹性力学中所研究的基本力学量主要有外力、内力、应力、位移和应变,这些概念在材料力学里都已有所认识,不过我们仍需要在这里对它们进行更为严格的定义和说明,特别是对这些力学量的表示方法及符号规定作出明确表述。

1. 体积力与面积力

作用于物体的外力可以按分布方式不同分类:作用于物体每个质点上的外力或者说作用于弹性体内单位体积上的外力则称为体积力或体力,例如重力和惯性力等等。

物体内部各点所受体积力一般是不同的。为了表明物体在某一点 M 所受体积力大小和方向,在这一点取物体的一小部分体积,它包含着 M 点,并且它的体积为 ΔV ,设作用于 ΔV 的外力为 $\Delta \mathbf{F}$,则外力在此点的平均集度为 $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}$ 。如果所取的体积不断缩小,则 $\Delta \mathbf{F}$ 和 $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。当 ΔV 无限减小而趋于 M 点,假定体力为连续分布,则 $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V}$ 将趋于一极限值,即 $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \mathbf{f}$ 。

这个极限矢量 $\mathbf{f}$ 就是物体在 M 点所受的体积力,它即为外力在 M 点的集度。因为 ΔV 是标量,所以 $\mathbf{f}$ 的方向就是 $\Delta \mathbf{F}$ 的极限方向。矢量 $\mathbf{f}$ 在坐标轴上 x, y, z 的投影 f_x, f_y, f_z 称为该点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负,它们的量纲是[力][长度]⁻³。

与体力的定义相似,分布在物体表面上的外力称为表面力或面力,例如接触压力、土压力、流体压力等。为了表明物体在某一点 M 所受面力大小和方向,在这一点取物体表面的一小部分面积,它包含着 M 点,设它的面积为 ΔS ,作用于 ΔS 的外力为 $\Delta \mathbf{F}$,则外力在此点的平均集度为 $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$,如果所取的面积不断缩小,则 $\Delta \mathbf{F}$ 和 $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。

当 ΔS 无限减小而趋于 M 点,假定面力为连续分布,则 $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$ 将趋于一极限值,即 $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \bar{\mathbf{f}}$ 。

这个极限矢量 $\bar{\mathbf{f}}$ 就是物体在 M 点所受的面积力,它即为外力在 M 点的集度。因为 ΔS 是标量,所以 $\bar{\mathbf{f}}$ 的方向就是 $\Delta \mathbf{F}$ 的极限方向。矢量 $\bar{\mathbf{f}}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ 称为物体在该点的面力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负,它们的量纲是[力][长度]⁻²。对于作用于物体表面上的集中力,可以将其看作是在表面上极小区域内作用的分布力,只是它的面力集度趋于无限大。

2. 应力与应变

弹性体在受到外力作用后,其内部将产生内力,这种内力是相应于外力而产生的物体内部各部分之间的相互作用,为了研究物体在其内部某一点 M 处的内力,假想用经过 M 点的一个截面 mn 将物体分为 I、II 两部分(图 1.1)。将部分 II 撤开,

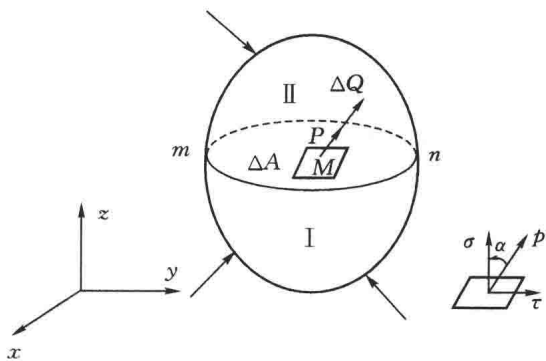


图 1.1

留下部分 I，根据力的平衡原则，部分 I 将在截面 mn 上作用一定的内力。在 mn 截面上取包含 M 点的微小面积 ΔA ，作用于 ΔA 面积上的内力为 ΔQ 。

令 ΔA 无限减小而趋于 M 点时，假定内力连续分布，则 $\Delta Q/\Delta A$ 的极限 p 就是截面 mn 上 M 点的应力，也就是

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = p$$

应力 p 在其作用截面上的法向分量称为正应力，用 σ 表示；在作用截面上的切向分量称为切应力或剪应力，用 τ 表示。当一点的应力与该点截面法线方向成 α 角时，则截面上该点的正应力 $\sigma = p \cos \alpha$ ，切应力 $\tau = p \sin \alpha$ 。

显然，过点 M 的不同方位的截面上的应力是不同的。为分析点 M 的应力状态，即通过 M 点的各个截面上的应力的方向和大小，在 M 点取出微元直角六面体，六面体的各棱边平行于坐标轴，如图 1.2 所示。

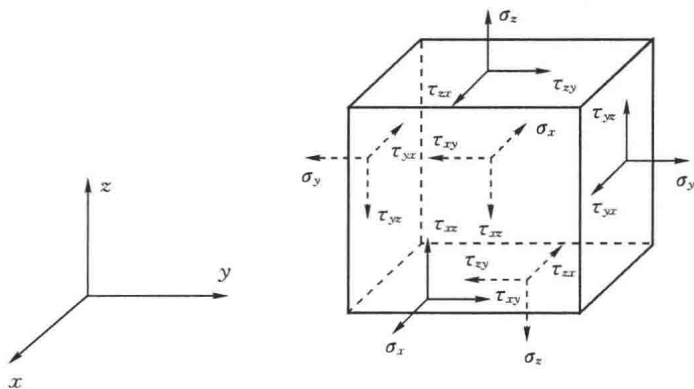


图 1.2

将每个面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。可以用六面体表面的应力分量来表示 M 点的应力状态。应力分量的下标含义如下：

第一个下标表示应力的作用面的法线方向，第二个下标表示应力平行的坐标轴的方向。

例如： τ_{xy} ，第一个下标 x 表示切应力作用在垂直于 x 轴的面上，第二个下标 y 表示切应力平行 y 轴方向。

正应力由于作用方向垂直于作用表面，只要用一个下标。例如 σ_x 表示正应力作用于垂直于 x 轴的面上，指向平行 x 轴方向。

应力分量的正负号规定如下：

如果某截面上的外法线是沿坐标轴的正方向，这个截面上的应力分量以沿坐标轴正方向为正；反之为负。

如果某截面上的外法线是沿坐标轴的负方向，这个截面上的应力分量以沿坐标轴负方向为正。反之为负。按照这个规定图 1.2 中各面上的应力分量都是正的。

利用单元体的平衡，可以得到切应力互等的关系，比如，单元体各面上应力合成的微内力应满足对 x 轴的力矩之和为零，即 $M_x(F) = 0$

$$\tau_{yz} dx dz dy - \tau_{zy} dy dx dz = 0$$

因此 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, 同理利用单元体各面上应力合成的微内力应满足对 y 轴的力矩之和为零和对 z 轴之矩为零得到 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。因此, 物体内部任意一点的应力状态可以用六个独立的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 来表示。可以证明, 在物体内部任意一点, 如果已知上述的六个分量, 就可以求得经过该点的任意斜截面上的正应力和切应力。因此上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

弹性力学中除了要描述弹性体中各点的内力分布大小和规律之外, 还应揭示物体变形的情况。所谓变形, 就是物体形状的改变, 一般用应变来描述。物体的形状改变可以归结为线段长度和角度的改变。

为进一步研究弹性体的变形情况, 假设从弹性体中分割出一个微分直角六面体单元, 为研究方便取其三组面(一对相互平行的面称为一组面)分别与三个坐标轴垂直。

微分单元体的变形分为两个方面。一是微分单元体棱边的伸长和缩短; 二是棱边之间夹角的变化, 弹性力学分别使用正应变和切应变表示这两种变形。各线元单位长度的伸缩, 称为正应变或线应变, 用 ϵ 表示。一点处两个垂直线元间的直角的改变, 称为切应变或剪应变, 用 γ 表示。

对于微分六面体单元, 设其变形前与 x, y, z 坐标轴平行的棱边分别为 MA, MB, MC , 变形后分别变为 $M'A', M'B', M'C'$, 如图 1.3。

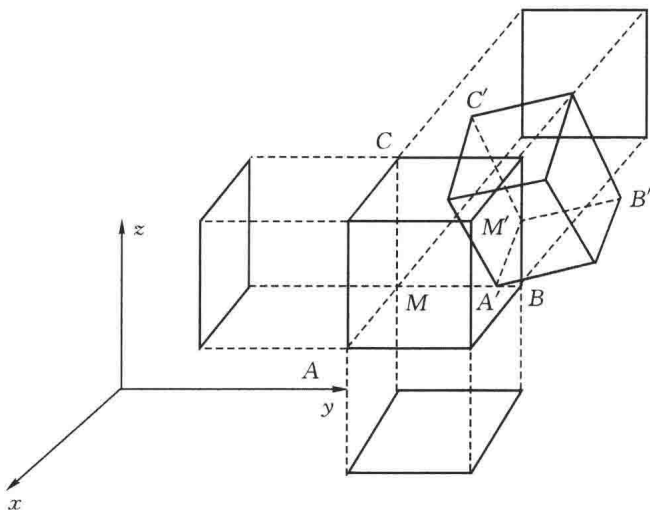


图 1.3

分别用 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 表示 M 点平行 x, y, z 轴方向棱边的相对伸长率, 即正应变。正应变以伸长为正, 缩短为负; 用 γ_{xy} 表示通过 M 点分别平行 x 轴和平行 y 轴之间的棱边线段夹角变化, 即切应变, 切应变以直角减小为正, 增大为负。同理分别以 γ_{yz}, γ_{zx} 表示平行 y 轴和平行 z 轴、平行 z 轴和平行 x 轴的棱边线段的夹角变化。物体内部任意一点的变形, 可以用六个应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 表示, 正应变与切应变的正负号规定与正应力和切应力的正负号规定相适应, 并且正应变和切应变均为无量纲的数量。

可以证明,在物体的任意一点,如果已知 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 这六个应变,就可以求得经过该点的任意方向微小线段的线应变,也可以求得经过该点的任意两个微小正交线段的切应变。因此这六个应变称为该点的应变分量,可以完全确定该点的应变状态。显然,切应变符号的两个下标是可以互换的,即有

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

这种互等关系不难从切应变的定义中得到说明。

3. 位移与变形

弹性体中各点的位移是指这些点由于物体的整体移动(刚体位移)或物体的变形而导致的空间位置的变化。不受约束或约束数目不够的弹性体在力的作用下由于运动产生的位移称为刚体位移,也即弹性体没有变形时发生的位移。如果弹性体受到足够数目的约束,在力的作用下不会发生刚体位移,但可以发生变形,引起位移。也即有变形一定有位移,但有位移未必有变形。

物体内任一点的位移,用它在 x, y, z 三个坐标轴上的投影 u, v, w 表示,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量,位移及其分量的量纲是[长度]。

物体的位移的描述,除了用到点的线位移外,有时还要用到描述绕轴转动的转角位移。转角 φ 是无量纲量。

一般来说,在弹性体内上述的外力(体力和面力)、应力、应变、位移,都是随着各点的位置而变的,因而都是点的位置坐标的函数。

在弹性力学的问题中,通常是已知物体的形状和大小、物体的材料特性(弹性常数),物体所受的外力,物体边界上的约束情况或面力,需要了解的未知量是应力分量,应变分量,位移分量,这就构成了弹性力学的基本问题。

1.3 弹性力学的基本假定

实际物体的特征及受力后表现出的力学特性是相当复杂的,因而在理论分析中不可能完全如实地加以描述,必须略去一些次要的因素,抓住主要的方面来体现其基本的特性,所以我们在进行弹性力学分析时,对研究对象应作出能反映其主要方面的基本假设。其实,弹性力学也正是以以下基本假设为依据的。

1) 完全弹性假设:物体在外因作用下变形,在外因去除后能完全恢复而没有任何残余变形。同时材料服从胡克定律,即应力与应变成正比。这就保证了应力与应变的一一对应关系。对于工程上大多数材料,当应力不超过某一限度时,这个假设与实际情况基本相符。

2) 连续性假设:假设物体所占据的全部几何空间不留空隙地被组成该物质的微粒所充满。这样,一般情况下物体中的应力、应变、位移、温度等物理量都是连续变化的,可以用坐标的连续函数进行描述,因此可以用微积分方法来分析外因作用下各物理量的变化。实际上,所有物体都是由微小颗粒组成的,它们之间存在空隙。但是,微粒的尺寸以及它们之间的空隙相对于宏观物体是微小的,因而宏观上可以将物体看作连续体。

3) 均匀性和各向同性假设:在物体所有各点和所有方向上有相同的物理性质,因而物体的弹性常数不随位置坐标和方向而变化,可以取出物体的任一小部分来加以分析,然后把分

析结果用于整体。

大多数的金属材料是均匀的和各向同性的,但纤维增强复合材料、岩土材料、木材、玻璃等是各向异性的。

4)无初应力假设:认为物体在未受外部因素(如外力、温度变化)作用之前是处于自然状态,物体内部没有应力。也就是说,由弹性力学所求得的应力完全是由载荷或温度变化等因素产生的。

5)小变形假设:假设物体在载荷或温度变化等因素作用下各点所产生的位移与物体尺寸相比都很小,使得各点的应变分量和转角都远小于1。这样,在建立物体的平衡方程时,可以用物体变形前的位置和尺寸而不至引起显著误差。在研究物体的应变和位移时,可以略去转角和应变的二次幂或其乘积,使得到基本方程为线性方程,并且可以应用叠加原理。

在上述基本假设中,前4个属于物理方面的假设,满足这些假设的物体通常称为理想弹性体,第5个假设为几何方面的假设。以上述假设为基础的弹性力学称为线弹性力学。

上述的基本假设与材料力学的基本假设并无区别。在材料力学中,除了上述基本假设外,对不同问题还引用一些与变形有关的“附加假设”,如平面假设等,使计算得到简化。当然,其结果的精确性和适用性都是有限的。其实,一切假设都是有条件的,随着条件的改变,有的假设就必须放弃或另作新的假设,同时也会出现新的理论和学科。例如,当物体处于塑性状态时,应力与应变之间的不再是线性关系,而成为物理上的非线性。对于这种状态下物体的应力、应变和位移的研究的学科,称为塑性力学。又如非金属材料在弹性阶段,其应力与应变之间也非正比的关系,这也是一种物理上的非线性。再如当物体的变形并非很小时,就不能略去变形的二次幂或乘积,于是就形成几何上的非线性。对于这两种问题的研究,就构成非线性弹性力学的内容。本书只涉及线性弹性力学的基本内容。

1.4 弹性力学的发展简史

同其他任何学科一样,从弹性力学的发展史中,我们可以看出人们认识自然的不断深化的过程:从简单到复杂,从粗糙到精确,从错误到正确的演变历史。许多数学家、力学家和实验工作者做了辛勤的探索和研究工作,使弹性力学理论得以建立,并且不断地深化和发展。弹性力学的发展。大致经历了如下几个阶段。

1. 发展初期(约于1660—1820年)

这段时期主要是通过实验探索了物体的受力与变形之间的关系。1678年,胡克通过实验,发现了弹性体的变形与受力之间成比例的规律。1807年,杨做了大量的实验,提出和测定了材料的弹性模量。伯努利于1705年和库仑于1776年研究了梁的弯曲理论。一些力学家开始了对杆件等的研究分析。

2. 理论基础的建立(约于1821—1855年)

这段时间建立了线性弹性力学的基本理论,并对材料性质进行了深入的研究。纳维于1820年从分子结构理论出发,建立了各向同性弹性体的方程,但其中只含一个弹性常数。柯西于1820—1822年从连续介质模型出发,建立了弹性力学的平衡(运动)微分方程、几何方程和各向同性的广义胡克定律。格林于1838年应用能量守恒定律,指出各向异性体只有21个独立的弹性常数。此后,汤姆逊由热力学定理证明了上述结果。同时拉梅等再次肯定

了各向同性体只有两个独立的弹性常数。至此,弹性力学建立了完整的线性理论,弹性力学问题已经化为在给定边界条件下求解微分方程的数学问题。

3. 线性理论的发展时期(约于 1854—1907 年)

在这段时期,数学家和力学家应用已建立的线性弹性理论,去解决大量的工程实际问题,并由此推动了数学分析工作的进展。圣维南于 1854—1856 年发表了关于柱体扭转和弯曲的论文,并提出了圣维南原理。艾里于 1862 年提出了应力函数,以求解平面问题。赫兹于 1882 年求解了接触问题。克希霍夫在 1850 年及以后的时间中解决了平板的平衡和振动问题。还有,爱隆对薄壳作了一系列工作等等。弹性力学在这段时期得到了飞跃的发展。

4. 弹性力学更深入的发展时期(1907—至今)

1907 年以后,非线性弹性力学迅速地发展起来。卡门于 1907 年提出了薄板的大挠度问题;卡门和钱学森提出了薄壳的非线性稳定问题;力学工作者还提出了大应变问题,非线性材料问题(如塑性力学等)等等。同时,线性弹性力学也得到进一步的发展,出现了许多分支学科,如薄壁构件力学、薄壳力学、热弹性力学、粘弹性力学、各向异性弹性力学等。

弹性力学的解法也在不断地发展。首先是变分法(能量法)及其应用的迅速发展。贝蒂于 1872 年建立了功的互等定理,卡斯蒂利亚诺于 1873—1879 年建立了最小余能原理,以后为了求解变分问题出现了瑞利—里茨(1877, 1908)法,伽辽金法(1915)。此外,赫林格和瑞斯纳分别于 1914 年 1950 年提出了两类变量的广义变分原理,胡海昌和邬津分别于 1954 年和 1955 年提出了三类变量的广义变分原理。

其次,数值解法也广泛地应用于弹性力学问题。迈可斯于 1932 年提出了微分方程的差分解法,并得到广泛应用。

在 20 世纪 30 年代及以后,出现了用复变函数的实部和虚部分别表示弹性力学的物理量,并用复变函数理论求解弹性力学问题的方法,萨文和穆斯赫利什维利作了大量的研究工作,解决了许多孔口应力集中等问题。

1946 年之后,又出现了有限单元法,并且得到迅速的发展和应用,成为现在解决工程结构分析的强有力的工具。

弹性力学及有关力学分支的发展,为解决现代复杂工程结构的分析创造了条件,并促进了技术的进步和发展。弹性力学的主要解法有:

解析法:根据弹性体的静力学、几何学、物理学等条件,建立区域内的微分方程组和边界条件,并应用数学分析方法求解这类微分方程的边值问题,得出的解答是精确的函数解。

变分法(能量法):根据变形体的能量极值原理,导出弹性力学的变分方程,并进行求解。这也是一种独立的弹性力学问题的解法。由于得出的解答大多是近似的,所以常将变分法归入近似的解法。

差分法:这是微分方程的近似数值解法。它将弹力中导出的微分方程及其边界条件化为差分方程(代数方程)进行求解。

有限单元法:这是近半个世纪发展起来的非常有效、应用非常广泛的数值解法。它首先将连续体变换为离散化结构,再将变分原理应用于离散化结构,并使用计算机进行求解的方法。

实验方法:模型试验和现场试验的各种方法。