"十一五"国家重点图书出版规划项目

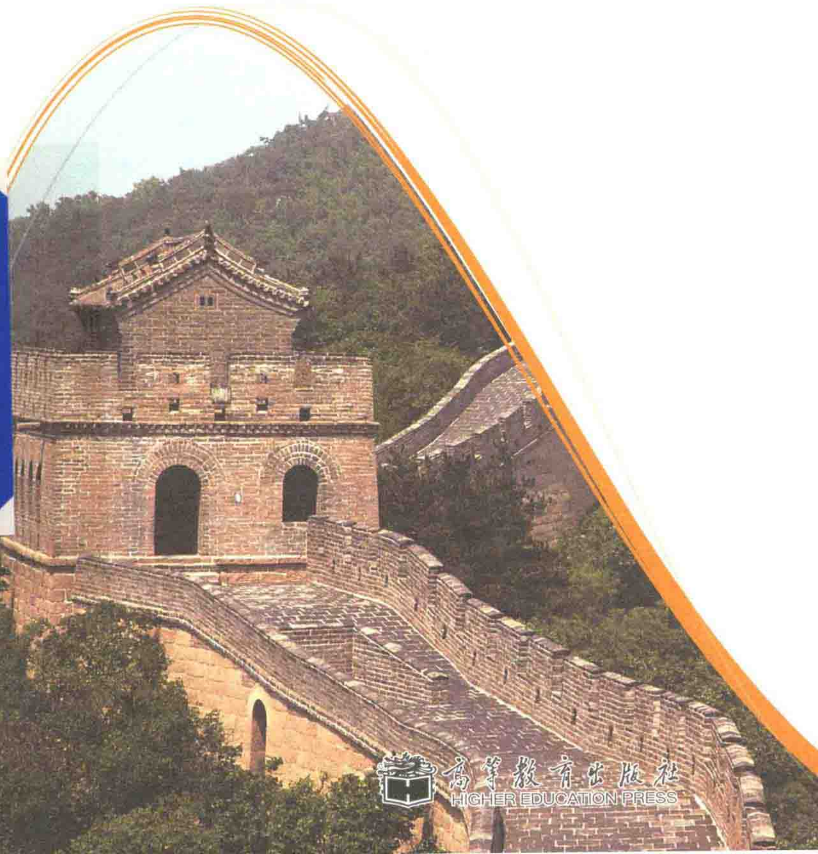
17

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

走近高斯

○ 周明儒



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

走进高斯

Zoujin Gauss

周明儒

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

数学文化小丛书．第2辑：全10册／李大潜主编．
--北京：高等教育出版社，2013.9

ISBN 978-7-04-033520-0

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①数学－普及读物　Ⅳ．
①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第226474号

策划编辑　李　蕊　　责任编辑　张耀明　　封面设计　张　楠
责任绘图　宗小梅　　版式设计　王艳红　　责任校对　王效珍
责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
印　　刷	北京信彩瑞禾印刷厂		http://www.hep.com.cn
开　　本	787 mm×960 mm 1/32	网上订购	http://www.landraco.com
总 印 张	28.125		http://www.landraco.com.cn
本册印张	3	版　　次	2013年9月第1版
本册字数	52千字	印　　次	2013年11月第2次印刷
插　　页	1	定　　价	80.00元

物 料 号　12-2437-45

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野，启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

目　录

数学发展史上最伟大的数学家之一、有“**数学王子**”之称的高斯(Johann Carl Friedrich Gauss，1777—1855)，曾被人赞誉为“**能从九霄云外的高度按照某种观点掌握星空和深奥数学的天才.**”高斯的数学思想是那样的深邃，以致在他生活的时代，几乎找不到什么人能够分享他的想法或向他提供新的观念. 直到今天，能够真正理解高斯的人恐怕也为数不多. 但如果认真地回顾高斯的一生，走近高斯，就可以看到他不仅仅是一位数学大师，而且是一个在天文学、物理学、测地学、地磁学等领域作出重大贡献的出类拔萃的科学巨人；高斯的令人崇敬，主要并不在于他是一个天才，而在于他一生的刻苦勤奋，在于他做到了很少有人能够做到的将理论、应用和发明完美地结合.

一、出身清贫　自幼聪颖

1777 年 4 月 30 日, 高斯出生在德国古城不伦瑞克 (Brunswick). 在 17 世纪初, 不伦瑞克还是能跟汉堡和阿姆斯特丹相媲美的贸易中心, 后因市民暴动和 1618—1648 年欧洲 30 年战争的破坏而衰落. 1671 年它并入不伦瑞克-沃尔芬比特尔 (现德国下萨克森州) 公爵领地, 1673 年成为该领地的首府. 在 18 世纪, 它像其他德国城邦一样, 经济政治状况落后于正处于资本主义蓬勃发展中的英国和法国. 高斯降生时, 不伦瑞克的统治者是一位久经沙场的贵族费迪南德 (C. W. Ferdinand) 公爵, 他按传统的封建方式管理领地,农业为其主要的财政来源, 并保护组织起来的个体织匠抵制纺织机械的使用. 他虽未实行义务教育, 但其大多数臣民都能识字并掌握一些初等算术知识. 至于社会下层有天赋的儿童要想获得高等教育, 则非有贵族、富商或其他有影响的保护人资助不可.

高斯的父母受教育不多, 但其父格布哈德・迪特里希・高斯 (Gebhard Dietrich Gauss, 1744—1808) 能够读写并且知道初等算术, 做过园林工人、运河工人、街道小贩 (street butcher) 和丧葬社 (funeral society) 的会计; 母亲多罗西娅・本茨 (Dorothea Benze,

图1　高斯出生的地方

（摄于 1884 年，二战中毁于炮火）

1743—1839）出身在石工家庭，聪慧善良，不会写并且几乎不会读，婚前曾在一个贵族家当过几年女仆．格布哈德的原配于 1775 年去世，次年续弦娶了多罗西娅，高斯是他们的独子．多罗西娅生前最后的 22 年都和高斯一起住在哥廷根天文台旁，母子相伴，直至 96 岁谢世．1810 年，高斯在给后来成为他第二任妻子的米娜・沃尔德克的信中曾提起他的父母："我父亲非常忠厚，许多方面都值得别人敬重；但在家里他非常专制、粗鲁、暴虐……我的母亲是个非常善良的女性，我非常敬重她．"

高斯幼年时的生活跟当时一般市民家的孩子雷

同. 因父母为生计奔波, 小高斯有时无人照料, 据说在他三、四岁时, 曾坠入离家不远的运河, 几乎溺死.

高斯自幼就对数字特别敏感. 他3岁那年夏天的一个星期六, 在泥瓦厂当工头的父亲正要给工人发放薪水时, 突然小高斯站起来说:“爸爸, 你弄错了”, 并说了另外一个数目. 原来, 趴在地板上的他也一直在暗暗跟着计算. 经过检查, 证明小高斯是对的, 周围的大人们都惊得目瞪口呆. 成年后的高斯说, 在他学会说话之前就会计算了.

7 岁时高斯进了圣·凯瑟琳小学, 大约 9 岁那年, 老师比特纳 (J. G. Büttner) 在课上叫学生们“写下从1到 100 的整数, 然后把它们加起来”, 高斯很快就把自己课堂练习的石板交到了老师的讲桌上, 上面只写了一个数字 5050.老师要他解释怎么得到这个结果的, 他说:“100+1=101, 99+2=101, 98+3=101, 等等, 这样的数对共有 50 个, 因此答案是50×101, 或5050.” 比特纳立刻意识到他再也不能教高斯什么了, 便从汉堡邮购了一本较深一些的算术课本给高斯学习. 当时任比特纳助手的巴特尔斯 (J. M. Bartels, 1769—1836) 只比高斯大 8 岁, 酷爱数学 (后到俄国喀山大学任教授, 是非欧几何创立者之一罗巴切夫斯基的老师), 更能了解和帮助高斯, 对高斯的数学才能也特别器重, 他们常在一起讨论问题.

让子女多读书并非当时工人阶层的风尚, 高斯读小学时, 父亲就经常要他晚上到织布机上去织亚麻布. 高斯的父亲不想让儿子继续读中学, 他也不知道如何去筹措足够的钱来供高斯读书. 比特纳和巴

特尔斯找到高斯的父亲对他说:“我们一定能够找到一个有钱有势的人来赞助这样的天才.”

1788 年, 高斯不顾父亲的反对进了家乡的 Catharineum 高等学校（相当于现在的中学）, 这里班级的编排还算正规, 但课程颇显陈旧, 而且过分强调古典语言特别是拉丁语的教学. 由于当时的人文学科特别是科学经典都是用拉丁文写的, 期望在学术上深造的高斯便充分利用学校的条件攻读拉丁语, 不久成绩就名列前茅. 高斯原来只会本地方言,在这里他学会了使用高地德语（路德翻译圣经用的那种德语, 即现在的标准德语）. 至于数学, 老师看了高斯的第一次作业,便认为他已没有必要上该校的数学课了.

二、公爵资助　奋发求学

经巴特尔斯介绍，高斯认识了本地卡洛琳学院（Brunswick Collegium Carolinum）的教授齐默尔曼（E. A. W. Zimmermann）. 1791 年，齐默尔曼教授向不伦瑞克公爵费迪南德引荐了天才少年高斯. 公爵接见高斯时为他的朴实和腼腆所动，欣然应允资助高斯的全部学业. 从此高斯在经济上得以独立于父母，其父也不再反对他继续深造.

1792 年高斯进入卡洛琳学院（图2）. 这所学校与一般大学不同，它由政府直接兴办和管理，目标是培养合格的官吏和军人，在德国各城邦的类似学校中属于最优秀之列，其教学强调科学方面的科目.

高斯在校的三年间，全身心地投入学习和思考，他最喜欢的学科是数学和语言. 三年里他阅读了数学的一些经典著作：牛顿（I. Newton,1642—1727）的《自然哲学的数学原理》，欧拉（L. Euler,1707—1783）的代数与分析著作，拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736—1813）的若干论著，以及雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli, 1654—1705）的《猜度术》等，并获得了一系列重要的发现：

研究素数分布，猜测出素数定理（1792）；考虑了几何基础问题，即平行公设在欧几里得几何中的

地位（1792）；发现算术-几何平均和一些幂级数的联系（1794）；发现最小二乘法（1794）；由归纳发现数论中关于二次剩余的基本定理，即二次互反律（1795）.

图2　卡洛琳学院

在这一时期，贯穿高斯一生研究风格的一个重要方面已趋成熟：不停地观察和进行实例剖析，从经验性质的研究中获得灵感和猜想.

以他对素数的研究为例：

和其他孩子一样，高斯最早接触的数就是自然数. 一个大于1的自然数，如果除了本身和1以外没有其他的因数，则称为素数（或质数，例如 2, 3, 5, 7, 11），否则称为合数（例如 4, 6, 9, 15）. 任何一个大于1的自然数，都可以表示成素数的乘积，如果不考

虑这些素数在乘积中的次序, 这种表示法是唯一的（例如 $63=3\times3\times7$）. 这也叫做**算术基本定理**. 早在公元前4世纪, 欧几里得就用反证法证明了素数有无穷多个, 那么这无穷多个素数在自然数中究竟是如何分布的? 有没有规律呢? 这个问题从古希腊就有人研究, 但没有令人满意的答案. 如果以 $\pi(x)$表示不超过自然数 x 的素数的个数, 可以得到下面的结果:

表1　不超过自然数x的素数个数

x	$\pi(x)$	x	$\pi(x)$
5	3	80	22
10	4	90	24
20	8	100	25
30	10	500	95
40	12	1 000	168
50	15	5 000	669
60	17	10 000	1 229
70	19	1 000 000	78 498

显然, 随着 x 的增大 $\pi(x)$ 也在增大, 虽然看不出它们之间有明确的函数关系式, 但人们希望找到这样的表达式, 并且与 $\pi(x)$ 的误差越小越好.

高斯大约 15 岁时, 仔细研究了瑞士数学家兰伯特（J. H. Lambert, 1728—1777）发表的素数表, 从中寻求素数分布的规律. 他把自然数每一千个分成一组, 譬如从 1 到 1 000, 1 001 到 2 000 等等, 再用

兰伯特的素数表统计每组里素数的个数，记为$D(x)$，例如：$D(1\ 000)=\pi(1\ 000)$，$D(2\ 000)=\pi(2\ 000)-\pi(1\ 000)$，等等，得到下表：

表2　10 000以下素数的分布

x	$\pi(x)$	$D(x)$
1 000	168	168
2 000	303	135
3 000	430	127
4 000	550	120
5 000	669	119
6 000	783	114
7 000	900	117
8 000	1 007	107
9 000	1 117	110
10 000	1 229	112

高斯也用其他的分组法，譬如从 100 到 100 000 为一组等．经进一步研究，并和各种简单的函数比较后，他发现，平均说来 $D(x)$ 和 x 的自然对数 $\ln x$ 成反比．这可以通过比较 $D(x)$ 和 $\dfrac{1}{\ln x}(x\geqslant 2)$ 的图像看出来（参看图 3 和图 4）

注意到计算 $\pi(x)$ 可以转化为计算 $D(x)$ 的和，例如：

$$\pi(5\ 000)=D(1\ 000)+D(2\ 000)+D(3\ 000)+D(4\ 000)+D(5\ 000),$$

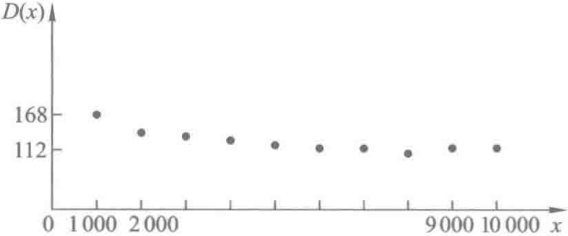


图3　$D(x)$的图像

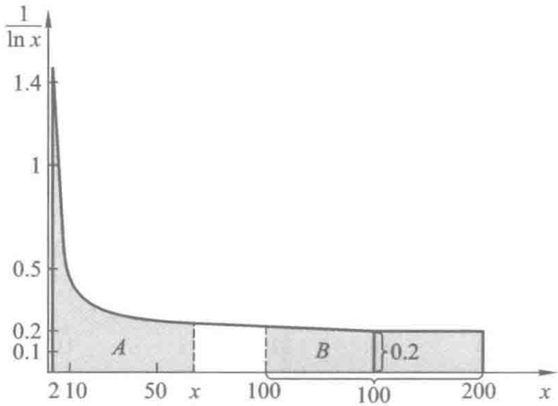


图4　$\dfrac{1}{\ln x}$的图像

而根据定积分的几何意义, 求和运算可以通过定积分来表示, 1892 年, 15 岁的高斯猜想 $\pi(x)$ 大概等于 $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln n}\mathrm{d}n$, 即有

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{1}{\ln n}\mathrm{d}n. \tag{1}$$

定积分 $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln n}\mathrm{d}n$ 等于图 4 中标有字母 A 的阴影