

中国古典文化大系

九章算术  
译注

曹纯译注

上海三联书店

中国古典文化

九章算术  
译注

曹纯译注



上海三联书店

## 图书在版编目 (CIP) 数据

九章算术译注 / 曹纯译注. — 上海: 上海三联书店, 2015.8

ISBN 978-7-5426-4945-4

I. ①九… II. ①曹… III. ①古算经—中国②《九章算术》—译文  
③《九章算术》—注释 IV. ①O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 210657 号

### 九章算术译注

---

译 注 / 曹 纯

责任编辑 / 陈启甸

特约编辑 / 刘文硕

装帧设计 /  灵动视线

监 制 / 吴 昊

出版发行 / 上海三联书店

(201199) 中国上海市都市路 4855 号 2 座 10 楼

<http://www.sjpc1932.com>

邮购电话 / 021-24175971

印 刷 / 北京凯达印务有限公司

版 次 / 2015 年 8 月第 1 版

印 次 / 2015 年 8 月第 1 次印刷

开 本 / 960×640 1/16

字 数 / 151 千字

印 张 / 23.75

---

ISBN 978-7-5426-4945-4/O · 2

定 价: 39.80 元

## 前言

《九章算术》是传统中国乃至古代东方极其重要的数学著作,在西学东渐之前一直是中国与东亚国家的数学教科书,历千年而不衰。此书不明作者姓氏,而其中某些内容可上溯至先秦时期,据此或可认为此书为历代不断补充、更新、修订的“集体作品”。全书问题共分九类,故名《九章算术》。今传《九章算术》为西汉初年重编。成书后,历经刘徽、祖冲之父子、李淳风等大数学家的注释,以至于研读这些注释成为我们读懂该书的不二法门。

《九章算术》全书内容可简单概括如下:

第一章方田:论述不同形状田地面积的计算方法,并详细介绍了分数的加法、减法、乘法和除法法则。

第二章粟米:论述在商品交易过程中的折算方法,重点介绍了在折算过程中广泛应用的今有法则。

第三章衰分:介绍了在手工业和农业领域按比例分配的处理方法,详细讲解了衰分和返衰法则,涉及基础的数列知识。

第四章少广:论述方和圆的面积和体积的计算方法,并介绍了开平方和开立方法则的使用和演算,并涉及开圆和开立圆(球)的计算和应用。

第五章商功:论述土方工程中的体积计算,详细介绍了各种形状的土方的处理方法。

第六章均输：介绍了在赋税、服役等情况下合理负担的处理方法，并涉及一些相遇问题的解决方法。

第七章盈不足：介绍了盈亏问题的处理方法，详细讲解了双假设法的应用。

第八章方程：介绍了利用方程组解决实际问题的方法，详细讲解了线性方程组的解法，并提出了正负数的概念。

第九章勾股：介绍了利用勾股定理求解高度、长度等实际问题的方法。

在很长时间内，西方主流学术界一直认为东方（主要是中国）并没有真正意义上的数学，即没有一个严格的、成系统的公理化演绎体系，正如他们认为古代中国的哲思只是一些道德训诫，至多有一些思辨概念的萌芽。近代西风东渐以来，中国的知识分子因大的政经局势与民族富强动力使然，无暇深入探究中西致思方式内在、深刻的差异，就接受了西方学界的主流观念，认为研究中学的终南捷径在于掌握一整套来自于西方哲学与科学的概念范畴体系，以便把中学的某一学科（如数学、哲学、中医等）套入其间，以能入其窠臼为能事。这种研究、思考方式当然有其不可忽视的现实原因，但由于它完全不考虑，更不立足于中西方思维方式的内在差异，一味以中学向西学比附、看齐，最后只能是缘木求鱼，不得结果，或以己之短比人之长，以西学的思维模式湮没中学的致思方式。

这种研究中学的思考方式自近代以来发轫，至近些年为

止仍未有根本的扭转。为今之计在于认真研读原典,努力接近和体会古人的致思方式。对于中国古代数学(算学),我们尤应研读其本源之作《九章算术》。《九章算术》向我们昭示,中国古代的数学是一个完全不同于西方数学公理化演绎体系的自成系统的体系。在饱受西方数学训练的学人看来,中国古代数学似乎缺失一个严格、完整的从公理开始渐次推演、下降的逻辑体系。但这并不意味着古人缺乏创立这样体系的智能水平,而是他们并不追求这样的体系。西方科学继承了自古希腊而来的追根究底的形而上学冲动,其彻底的、反思的特质自有其庄严、动人之处,但其理论前提不断被质疑、冲击,又从反面说明了其试图以公理化的逻辑体系系统摄一学科中全部现象的冲动,是一个“不可完成的任务”。而以《九章算术》为代表的中国古代数学,以西学的思维方式来看,似乎不太像科学意义上的“数学”,而有些近似于算术“游戏”。它的着力点完全不在于建立能够完全涵盖某一确定领域的抽象程度甚高的公理、定理、公式,而是在于具体情境中的“涵泳”“玩味”。正如尤为体现中国式致思方式的围棋,其对于人类智能的要求与开掘,实不逊于哲学、数学、物理学等基础理论学科,但的确很难为其推导或总结出具有严格适用范围的公式、定理。其所谓“定式”不过只是在某一具体局部形势中目前发现的较为合理、有效的下法。一切有关围棋的智慧都发生在对当下具体形势的直观中。有时,它在某一范围内的贯通性,并非凭借抽象的公理、定理和公式,而

是对具体情境或形势的直觉能力。这种直觉力恰恰是在境域式的算术“游戏”中涵养濡育而成的。这种发生于境域中的直觉力直面一切具体而微的数学活动,在某种意义上比西方数学更能够进入到数学活动的本质深处。我们如果仔细研究《九章算术》,会看到它在数学上的创见当不止于发现了可与西方相比拟的勾股定理之类,而沿着这一中国独特的致思方式继续“玩味”下去,我们会在数学以及人类思想活动的诸基本领域内不断贡献出真正有价值的智慧成果。

本书为全本全译,以郭书春的《九章算术译注》(上海古籍出版社,“中国古代科技名著译注丛书”)为底本。由于个人水平有限,其中不免有讹误之处,还请方家批评指正。

曹 纯

2014年8月

## 《九章算术注》序

刘徽<sup>①</sup>

昔在庖牺氏始画八卦<sup>②</sup>，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术<sup>③</sup>，以合六爻之变<sup>④</sup>。暨于黄帝神而化之<sup>⑤</sup>，引而伸之，于是建历纪<sup>⑥</sup>，协律吕<sup>⑦</sup>，用稽道原<sup>⑧</sup>，然后两仪四象精微之气可得而效焉<sup>⑨</sup>。记称“隶首作数”<sup>⑩</sup>，其详未之闻也。按：周公制礼而有九数<sup>⑪</sup>，九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书<sup>⑫</sup>，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世<sup>⑬</sup>。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

## 注释

- ①刘徽：魏晋期间伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基者之一，著有《九章算术注》和《海岛算经》。
- ②庖牺氏：又称伏羲，为“三皇”之首。他与女娲婚配而产生人类。他们同被尊为人类始祖。始：开始，最初。八卦：我国古代的八种有象征意义的符号，组成《易》的基本图像。由阳爻和阴爻排列而成，每



三根爻组成一卦，其名称为：☰(乾)，☷(坤)，☳(震)，☴(巽)，☵(坎)，☲(离)，☶(艮)，☱(兑)。

③九九之术：即九九乘法法则。古时由“九九”自上而下，而至“一一”，故称“九九乘法”。

④六爻：为了表示更多的事物或现象，将八卦中的两卦按照一上一下的方式组合，构成“复卦”。复卦共有六个爻位，因此又称“六爻”。

⑤暨：至，到。黄帝：五帝之首，号轩辕氏。传说为中国远古时期华夏部落联盟的首领，华夏民族的始祖。

⑥历纪：历数纲纪。

⑦律吕：中国古代律制“十二律”，又名“正律”，简称“律吕”。

⑧稽：考核，计数。

⑨两仪：即阴、阳。四象：即太阴(水)、少阳(木)、少阴(金)、太阳(火)。

⑩隶首：黄帝史官，始作算数。后世以“隶首之学”指算学。

⑪周公：姓姬名旦，因封地在周，故称周公。西周初期杰出的政治家、军事家和思想家。礼：《周礼》，儒家经典。九数：指古代数学功课的九个细目。东汉的郑玄在他的《周礼注疏·地官司徒·保氏》中引郑司农(郑众)所言：“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、

均输、方程、赢不足、旁要；今有重差、夕桀、勾股也。”

⑫暴秦焚书：公元前 213 年，秦始皇接受丞相李斯的建议，下令除《秦纪》、医药、卜筮、种树之书外，其他如百家语、《诗》、《书》等书限期交官府烧毁。焚书事件对中华文化造成了极大的破坏。

⑬张苍：西汉丞相，曾校正《九章算术》，制定历法。大司农：汉代官名，负责掌管赋税、盐、铁、酒的制作专卖，漕运、调拨物资和国家财政。耿寿昌：西汉天文学家，理财家。汉宣帝时任大司农中丞，精通数学，修订《九章算术》。用铜铸造浑天仪观天象。著有《月行帛图》232 卷，《月行度》2 卷，今已佚。

### 译文

以前庖牺氏最先画出八卦，用来通达并获得天地神明的美好品质，模仿世间万物的情状。后来又作九九之术，来配合六爻的变化。直到黄帝神妙地将其变化引申，于是建立历法纲纪、调正音律，用来考察道的本原，而后两仪四象的精髓可以被获得并且效法。曾有记载说“隶首创立了算学”，但我没有听说过其中的详细情节。按：周公制定礼乐制度，其中有九数，九数后来发展成《九章算术》。过去残暴的秦始皇焚书，造成经术散坏。后来，汉代的北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌都以擅长算学闻名于世。张苍等根据旧时的残缺遗文，进行删减补充。

所以,它的目录与古代版本有些许不同,论述则多采用近代语言。

徽幼习《九章》,长再详览。观阴阳之割裂<sup>①</sup>,总算术之根源,探赜之暇<sup>②</sup>,遂悟其意。是以敢竭顽鲁,采其所见,为之作注。事类相推,各有攸归<sup>③</sup>,故枝条虽分而同本干知,发其一端而已。又所析理以辞,解体用图,庶亦约而能周<sup>④</sup>,通而不黷<sup>⑤</sup>,览之者思过半矣。且算在六艺<sup>⑥</sup>,古者以宾兴贤能<sup>⑦</sup>,教习国子<sup>⑧</sup>。虽曰九数,其能穷纤入微,探测无方。至于以法相传,亦犹规矩度量可得而共,非特难为也。当今好之者寡,故世虽多通才达学,而未必能综于此耳。

#### 注释

①阴阳:古人为了解释自然界中各种对立又相关联的大自然现象,如天地、日月、昼夜、寒暑、男女、上下等,归纳出“阴阳”的概念。割裂:区别。

②赜:幽深,玄妙。

③攸:所。归:归属。

④周:周密。

⑤黷:过多。

- ⑥六艺：古代儒家要求学生掌握的六种基本才能，即礼、乐、射、御、书、数。
- ⑦宾兴：周代举贤之法。谓乡大夫自乡小学荐举贤能而宾礼之，以升入国学。兴，兴举。
- ⑧国子：公卿大夫的子弟。

### 译文

我幼年时学习《九章算术》，年长后又详细钻研。观察事物的正反区别，总结了算数的根源，在探索这些幽深玄妙的道理之余，逐渐领悟到其中的思想。于是冒昧地竭尽愚钝，收集我见到的资料，为它作注释。事物之间可以相互类推，分别有各自的归属。所以枝条虽然分离却具有同一个主干，原因是它们发于同一开端。再加上用文辞分析数理，用图形解释立体，就会使它简明且周密，通顺且不烦琐，阅读的人可以懂得一半以上的内容。算学属于六艺之一，古代用来兴举贤能之人和教育贵族子弟。虽然称为九数，却可以尽到极小极微，探索到无穷无尽。至于流传下来的方法，就像规矩度量一样存在而有共性，所以学习它并非很困难的事情。目前喜爱算学的人很少，所以世上虽然有很多学识渊博的人，却未必对它精通。

《周官·大司徒》职<sup>①</sup>，夏至日中立八尺之表<sup>②</sup>。

其景尺有五寸<sup>③</sup>，谓之地中。说云，南戴日下万五千里<sup>④</sup>。夫云尔者，以术推之。按：《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也<sup>⑤</sup>。凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差、勾股，则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之时。以景差为法<sup>⑥</sup>，表高乘表间为实<sup>⑦</sup>，实如法而一，所得加表高，即日去地也<sup>⑧</sup>。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地为勾、股，为之求弦，即日去人也。以径寸之筒南望日，日满筒空，则定筒之长短以为股率，以筒径为勾率，日去人之数为大股，大股之勾即日径也。虽夫圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造《重差》，并为注解，以究古人之意，缀于《勾股》之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏<sup>⑨</sup>，靡所不入<sup>⑩</sup>。博物君子<sup>⑪</sup>，详而览焉。

## 注释

- ①《周官》：即《周礼》，儒家经典。大司徒：六官之一，管理土地及户口。职：掌管。
- ②表：测量日影的标杆。
- ③景yǐng：影。
- ④“说云”两句：郑玄《周礼注》中的文字。
- ⑤指趣：宗旨，意义。
- ⑥法：除数。
- ⑦实：被除数。
- ⑧去：距离。
- ⑨幽遐：僻远；深幽。诡伏：隐藏不露。
- ⑩靡：无。
- ⑪博物：通晓众物。

## 译文

《周礼》中规定大司徒的职责之一，就是在夏至日的正午立一根8尺长的标杆，将影长是1尺5寸的地方，定为大地的中心。《周礼注》中说，此刻太阳在南方15 000里处。这个结论可以由术推算出来。按：《九章算术》中有立四根标杆求距离和根据树木求山高的方法，都是在近处设参照物相对应，还没有距离这么遥远的。如此看来，张苍等人的计算方法不足以涵盖所有的数学方法。

我发现九数中有“重差”这一项目,它原本的宗旨是为了解答这类问题。凡是测量极高、极深又求它们的远近距离的情况,必须用重差、勾股。由于要以两次直角边相当边的差数作为率,所以称为“重差”。在洛阳城立两根标杆,高8尺,使它们处于南北方向的同一水平面上。同一天正午的时候测量它们的影长。以它们的影长之差作为除数,标杆的高度乘标杆间的距离作为被除数,被除数除以除数,所得之数加上标杆的高度,即为太阳到地面的距离。以南标杆的影长乘标杆间的距离为被除数,除数不变,所得即为南标杆到太阳直射处的距离。分别以南标杆到太阳直射处的距离和太阳到地面的距离作为勾、股,求得的弦即为太阳到人的距离。以直径1寸的竹筒向南观望太阳,阳光充满竹筒内的空间。以筒的长度为股率,筒的直径为勾率,太阳到人的距离为大股,与大股相对应的勾即为太阳的直径。即使是天象都可以测量,更何况是泰山的高度和江海的宽度呢。我认为当今的史籍已经有了一些对天地间事物的记录,并且考论它们的数量,记载在志书中,展示了世间算学的美妙。于是我写《重差》,并为之作注解,以探究古人的本意,附于《勾股》之后。测量高度用两根标杆,测量深度用多次矩尺,对孤立的测量点需要观测三次,对孤立且要求解决其他问题的需要观测四次。如果触类旁通,即使问题深远隐秘,也没有不能解决的。博学的君子们,请仔细阅读这本书吧。

# 目 录

前 言 .....	1
《九章算术注》序 .....	1
卷第一 方田 .....	1
卷第二 粟米 .....	58
卷第三 衰分 .....	87
卷第四 少广 .....	108
卷第五 商功 .....	145
卷第六 均输 .....	196
卷第七 盈不足 .....	250
卷第八 方程 .....	280
卷第九 勾股 .....	328



## 卷第一 方田

魏 刘徽 注

唐朝议大夫行太史令上轻车都尉臣李淳风等奉敕注释<sup>①</sup>方田<sup>②</sup>以御田畴界域<sup>③</sup>

今有田广十五步，纵十六步。问：为田几何？

答曰：一亩。

又有田广十二步，纵十四步。问：为田几何？

答曰：一百六十八步。图：纵十四，广十二。

方田术曰：广纵步数相乘得积步。此积谓田畧。凡广纵相乘谓之畧。臣淳风等谨按：经云“广纵相乘得积步”，注云“广纵相乘谓之畧”，观斯注意，积畧义同。以理推之，固当不尔。何则？畧是方面单布之名，积乃众数聚居之称。循名责实，二者全殊。虽欲同之，窃恐不可。今以凡言畧者据广纵之一方；其言积者举众步之都数。经云相乘得积步，即是都数之明文。注云谓之畧，全乖积步之本意。此注前云积为田畧，于理得通。复云谓之畧，繁而不当。今者注释存善去非，略为料简<sup>④</sup>，遗诸后学。以亩法二百四十步除之，即亩数。百亩为一顷。臣淳风等谨按：此为篇端，故特举顷、亩二法。余术不复一言者，从此可知。一亩田，广十五步，纵而疏之，令为十五行，即每行广一步而纵十六步。又横而截之，令为十六行，即每行广一步而纵十五步。此即纵疏横截之步，各自为方。凡有二百四十步。为一亩之地，步数正同。以此言之，即广纵相乘得积步，验矣。二百四十