普通高等教育"十三五"规划教材

国家级精品课程教材

# 振动理论及工程应用

◎ 刘习军　贾启芬　张素侠　编著

VIBRATION THEORY AND ENGINEERING APPLICATION

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材
国家级精品课程教材

# 振动理论及工程应用

刘习军　贾启芬　张素侠　**编著**
李欣业　**主审**

机 械 工 业 出 版 社

本书主要包括三方面的内容：第一，结合单自由度、两自由度、多自由度和连续系统论述了振动理论的基本概念和基本分析方法；第二，介绍了振动理论中的近似计算方法及工程上通用的有限元法；第三，介绍了振动理论在工程中的应用实例及减振技术，利用简单实例说明了非线性振动的基本概念及应用。

为便于广大读者理解振动的概念和理论，利用天津大学的国家资源共享课“工程振动与测试”的网上资源（http://www.icourses.cn/coursestatic/course_2244.html）进行学习，本书采用模块式结构来编写，其内容丰富，通俗易懂，由浅入深，以务实、应用为根本。本书还配有《振动理论及工程应用辅导与习题解答》。本书既可作为高等工科院校的本科生和研究生的教材，也适用于从事机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

振动理论及工程应用/刘习军，贾启芬，张素侠编著.—北京：机械工业出版社，2015.10

国家级精品课程教材 普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-111-51750-4

Ⅰ.①振… Ⅱ.①刘…②贾…③张… Ⅲ.①工程振动学-高等学校-教材 Ⅳ.①TB123

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第233986号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：姜 凤 责任编辑：姜 凤 熊海丽
版式设计：赵颖喆 责任校对：张晓蓉
封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
北京中兴印刷有限公司印刷
2016年2月第1版第1次印刷
184mm×260mm·19.25印张·476千字
标准书号：ISBN 978-7-111-51750-4
定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务 网络服务
服务咨询热线：010-88379833 机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649 机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版 金书网：www.golden-book.com

# 前　言

振动问题是近代物理学和科学技术众多领域中的重要课题。随着生产技术的发展，动力结构有向大型化、高速化、复杂化和轻量化发展的趋势，由此而带来的振动问题更为突出。振动理论在当今不仅作为基础科学的一个重要分支，而且正走向工程科学发展的道路，它在机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等工业技术部门中占有愈来愈重要的地位。

因此，许多学校在力学、机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑、土木和水利等专业开设了相关的振动理论课程，并且在2013年为适应工程建设的需要，天津大学的国家资源共享课“工程振动与测试”课程在网上（http://www. icourses. cn/coursestatic/course _ 2244. html）免费公开了教学及实验等全程录像，以便于大家以网络形式学习，为全程教育提供了平台，本书正是基于这一需求，集成了振动的基本理论和工程应用两大模块。它们相辅相成、融会贯通，又独立成章，以利于读者参考、查阅及自学。本书在编写中本着由浅入深、通俗易懂的原则，以务实为根本，着重介绍了有关的基本概念和原理，从而避免了烦琐的数学推导。它为工程技术人员的初学和应用创造了有利条件。

本书在编写方法上，一是确定了基本要求和学习重点，加强了基本概念、基本理论和基本分析方法的应用；二是适度加强了基本功训练，引导学习者首先掌握分析问题的方法和思路，进而增强逻辑思维能力和解决问题的能力；三是大胆地推陈出新，提高起点，结合工程实际阐述其原理，使其易学易懂，既反映了现代分析方法，又解决了实际问题，从而形成了本书的特色。

本书共分10章：第1、2章简要介绍了振动的分类和频谱分析的基本知识，讨论了求解单自由度系统的振动和固有频率的几种常用计算方法。第3、4章重点讨论了多自由度系统的振动理论，两自由度系统作为多自由度系统振动理论的过渡，强化了多自由度系统中的基本概念和物理意义，从而可较容易地理解多自由度系统振动的振型叠加法等现代的计算方法。第5章介绍了解决多自由度振动系统中行之有效的数值计算方法。第6、7章介绍了弹性体系统的振动理论，其中包括杆、梁等弹性体的复杂振动等内容。第8章介绍了解决工程问题行之有效的常用方法——有限元法，并附有几个工程实例。第9章详细论述了工程中的减振技术，包括隔振、阻振、动力减振器和动力吸振器等技术。第10章通过实例介绍了非线性振动理论的基本概念和近似解析法，结合工程实例讨论了各种方法的应用范围及特点，解释了一些典型的非线性振动现象。本书除各章之中包含部分工程应用实例外，还配有相应的习题、习题答案及附录等。

本书是对多年课程讲授的经验总结，是在天津大学出版社出版的《工程振动与测试技术》、高等教育出版社出版的《工程振动理论与测试技术》等教材的基础上改编而成的，对有关内容进行了调整，尽量保留了原教材的优秀内容和例题，对减振技术及有限元章节增加了工程实例，使之更加便于学习应用。对非线性振动章节进行了重新改写，使其物理意义更明确，容易接受。有关对工程振动概念详细解释及习题的解题技巧等方面的内容，放在《振动理论及工程应用辅导及习题解答》一书中。李欣业教授对本书进行了认真评阅，提出

了非常宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

本书由刘习军、贾启芬、张素侠编写，刘习军负责统稿，张素侠对有关的习题进行了选编，黄元英、曹梦澜、张缨、刘今朝、钟顺、李向东等同志参加了制图和审校等工作。

本书可作为高等工科院校的工程振动理论课程的教材或教学参考书，或供通过资源共享课进行自学的人员使用，也可供从事机械、航空、航天、船舶、车辆、建筑和水利等的工程技术人员，以及进行理论研究和实验研究的有关工程技术人员参考。

限于水平，书中错误与不妥之处在所难免，恳请广大同行及读者指正。

编　者

于天津大学

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 目　　录

# 第 1 章
# 振动的基本知识

## 1.1 振动及其分类

机械振动是指物体在其稳定的平衡位置附近所做的往复运动。这是物体的一种特殊形式的运动。运动物体的位移、速度和加速度等物理量都是随时间往复变化的。

机械振动是一种常见的物理现象，如桥梁、机床的振动，钟摆的摆动，飞机机翼的颤动，汽车运行时发动机和车体的振动等。振动的存在会影响机器的正常运转，使机床的加工精度、精密仪器的灵敏度下降，严重的还会引发机器或建筑结构的毁坏；此外，还会引发噪声、污染环境，这是不利的一面。另一方面，人们利用机械振动现象的特征，设计制造了众多的机械设备和仪器仪表，如振动筛选机、振动研磨机、振动输送机、振动打桩机、混凝土振捣器，以及测量传感器、钟表计时仪器、振子示波器等。随着机器设备向着大型、高速、高效和自动化诸方面发展，需要分析处理的振动问题愈来愈重要。因此，掌握机械振动的基本理论，正确地运用它，对于设计制造安全可靠和性能优良的机器、仪器仪表、建筑结构，以及各种交通运输工具，并对有效地抑制、防止振动带来的危害是十分必要的。

为了便于研究振动现象的基本特征，需要将研究对象适当地进行简化和抽象，形成一种分析研究振动现象的理想化模型，在选择的力学模型中，它可能是一个零部件、一台机器或者一个完整的工程结构等，都被称为**系统**，即振动系统。振动系统可以分为两大类：**连续系统**与**离散系统**。具有连续分布的质量与弹性的系统，称为**连续弹性体系统**，并同时符合理想弹性体的基本假设，即均匀、各向同性且服从胡克定律。由于确定弹性体上无数质点的位置需要无限多个坐标，因此弹性体是具有无限多自由度的系统，它的振动规律要用时间和空间坐标的函数来描述，其运动方程是偏微分方程。

在一般情况下，要对连续系统进行简化，用适当的准则将分布参数“凝缩”成有限个离散的参数，这样便得到**离散系统**。所建立的振动方程是常微分方程。由于所具有的自由度数目上的区别，离散系统又称为**多自由度系统**，它的最简单的情况是**单自由度系统**。所谓系统的自由度数，是指在具有完整约束的系统中，确定其位置的独立坐标的个数。

在实际工程结构中，例如板壳、梁、轴等的物理参数一般是连续分布的，因此，这样的模型系统称为连续系统或**分布参数系统**。但是，为了能够便于分析，需要通过适当的准则将分布参数“凝缩”成有限个离散的参数，这样便得到了此结构的离散系统。

离散系统中的一种典型系统是由有限个惯性元件、弹性元件及阻尼元件等组成的系统，这类系统称为**集中参数系统**。其中，惯性元件是对系统惯性的抽象，表现为仅计质量的质点或者仅计转动惯量和质量的刚体；弹性元件是对系统弹性的抽象，表现为不计质量的弹簧、扭转弹簧或者仅具有某种刚度（如抗弯刚度、抗扭刚度等）但不具有质量的梁段、轴段等；阻尼元件既不具有惯性，也不具有弹性，它是对系统中的阻尼因素或有意识施加的阻尼件的抽象，通常表示为阻尼缓冲器。阻尼元件是一种耗能元件，主要以热能形式消耗振动过程中的机械能，这与惯性元件能贮存动能、弹性元件能贮存弹性势能在性质上完全不同。

实际振动系统是很复杂的，以系统的自由度数的不同，可分为单自由度系统和多自由度系统及弹性体系统等。从运动微分方程中所含参数的性质的不同，可分为线性系统和非线性系统。线性系统是在系统的运动微分方程式中，只包含位移、速度的一次方项。如果还包含位移、速度的二阶或高阶项则是非线性系统。工程实际中有很多振动系统未必是线性系统，但是，在微幅振动的情况下，略去高阶项，线性化系统就是它的理想化模型。因此，振动系统按运动微分方程的形式分为两种——线性振动和非线性振动。**线性振动**：描述其运动的方程为线性微分方程，相应的系统称为**线性系统**。线性振动的一个重要特性是叠加原理成立。**非线性振动**：描述其运动的方程为非线性微分方程，相应的系统称为**非线性系统**。非线性振动中叠加原理不成立。

值得指出的是，一般来说，线性振动系统是非线性系统的简化结果，它适合于叠加原理，解决问题比较方便，在解决工程问题时，若能应用线性振动理论来描述其物理现象，就首先利用线性振动理论解决。若不能完整地描述其物理现象，再利用非线性振动理论解决，但其计算过程要复杂得多。有关线性振动系统的结论，不能无条件地引申到非线性系统中去，否则，不仅在分析结果上会导致过大的误差，更重要的是无法预示或解释实际的振动系统中可能出现的非线性现象。

振动系统按激励的性质可分为固有振动、自由振动、受迫振动、自激振动和参数振动等。**固有振动**：无激励时系统所有可能的运动的集合。固有振动不是现实的振动，它仅反映系统关于振动的固有属性。**自由振动**：激励消失后系统所做的振动，是现实的振动。受迫振动：系统受到外部激励作用下所产生的振动。**自激振动**：系统受到由其自身运动诱发出来的激励作用而产生和维持的振动，这时系统包含有补充能量的能源。演奏提琴所发出的乐音，就是琴弦做自激振动所致。车床切削加工时在某种切削量下所发生的高频振动，架空电缆在风作用下所发生的舞动以及飞机机翼的颤振等，都属于自激振动。**参数振动**：激励因素以系统本身的参数随时间变化的形式出现的振动。秋千在初始小摆角下被越荡越高就是参数振动的例子。其中**自激振动、参数振动**属于非线性振动内容。

## 1.2 振动激励函数

周期运动的最简单形式是简谐振动。这种振动的表示方法及特点是描述其他振动形式的基础。一般的周期振动可以借助傅里叶级数表示成一系列简谐振动的叠加，该过程称为谐波

分析。非周期振动则需要通过傅里叶积分做谐波分析。在振动理论中，首先遇到的是振动中的激励函数，由于振动激励函数种类繁多，下面只就常见的几种振动激励函数进行简单介绍。

### 1.2.1 连续函数与离散函数

在连续时间范围内（$-\infty<t<\infty$）有定义的函数称为**连续时间函数**，简称**连续函数**。

仅在一些离散的瞬间有定义的函数称为**离散时间函数**，简称**离散函数**。这里“离散”是指函数的定义域——时间（或其他量）是离散的，它只取某些固定的值。

### 1.2.2 周期函数

周期函数是定义在（$-\infty$, $\infty$）区间，每隔一定时间 $T$（或整数 $N$），按相同规律重复变化的函数。连续周期函数可表示为

$$f(t)=f(t+mT),\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1-1}$$

离散周期函数可表示为

$$f(k)=f(k+mT),\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1-2}$$

$k$ 为离散值。

### 1.2.3 实函数与复函数

物理可实现的函数常常是时间 $t$（或 $k$）的函数（或序列），其在各时刻的函数（或序列）值为实数，称为**实函数**。

函数（或序列）值为复数的函数称为**复函数**。最常用的是复指数函数。连续时间的复指数函数可表示为

$$f(t)=\mathrm{e}^{st},\ -\infty<t<\infty \tag{1-3}$$

式中，复变量 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$；$\sigma$ 是 $s$ 的实部，记作 Re $[s]$；$\omega$ 是 $s$ 的虚部，记作 Im $[s]$。根据欧拉公式，上式可展开为

$$f(t)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

可见，一个复指数函数可分解为实、虚两部分，即

$$\mathrm{Re}[f(t)]=e^{\sigma t}\cos\omega t$$

$$\mathrm{Im}[f(t)]=e^{\sigma t}\sin\omega t$$

两者均为实函数。

### 1.2.4 冲激函数与阶跃函数

**1. 冲激函数**

冲激函数也称单位脉冲（unit impulse）函数，用 $\delta(t)$ 表示，它具有以下性质

$$\delta(t)=\begin{cases}0, t\neq 0\\ \text{大于任何给定值,当 } t=0 \text{ 时;但有}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases} \tag{1-4}$$

并且
$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(x)\,\mathrm{d}x$$

单位脉冲是一种极限脉冲，其物理意义可用图1-1来解释。该图说明，若将 $\delta(t)$ 看成是力函数，则 $\delta(t)$ 是图1-1a所示冲量为1的矩形脉冲在脉宽 $\varepsilon\to0$ 时的冲击力的极限情况（图1-1b）。$\delta(t)$ 具有力的量纲。

工程应用中还定义了一种延时单位脉冲 $\delta(t-t')$，其定义为

$$\delta(t-t')=\begin{cases}0,\text{当 } t\neq t' \text{ 时}\\ \text{大于任何指定值},\text{当 } t=t' \text{ 时};\text{但有}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t')\,\mathrm{d}t=1\end{cases}\tag{1-5}$$

延时单位脉冲函数如图1-2所示。单位脉冲函数又称狄拉克 δ 函数或简称狄拉克函数。狄拉克函数有以下特性：

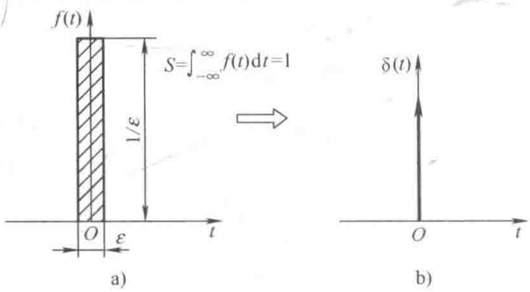


图1-1　单位脉冲的物理解释

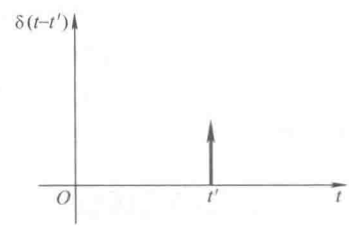


图1-2　延时单位脉冲函数

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}p\delta(t)\,\mathrm{d}t=p\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=p$，$p$ 为常数。

(2) 它的傅里叶变换：$F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 0}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$；这一特性表明，单位脉冲激振力提供白谱。

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\delta(t-t')\,\mathrm{d}t=y(t')$，$0<t'<\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t=-y'(0)$$

该式表明狄拉克函数的抽样特性。

(4) 尺度变换特性。设 $a$ 为常数，则有

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\,\mathrm{d}t=0$$

**2. 单位阶跃函数**

单位阶跃函数也称阶跃函数，用 $\varepsilon(t)$ 表示，即

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{2}, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}\tag{1-6}$$

单位阶跃函数有以下特性：

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$
\begin{cases}
\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) y(t) \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} y(t) \mathrm{d}t \\
\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon'(t) y(t) \mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) y'(t) \mathrm{d}t = -\int_{0}^{\infty} y'(t) \mathrm{d}t = y(0) \\
\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}
\end{cases}
\tag{1-7}
$$

**3. 冲激函数与阶跃函数的关系**

冲激函数与阶跃函数的关系为

$$
\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\,\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(x) \mathrm{d}x \tag{1-8}
$$

---

# 1.3 简谐振动

## 1.3.1 简谐振动的表示法

**1. 用正弦函数表示简谐振动**

用时间 $t$ 的正弦（或余弦）函数表示的简谐振动，其一般表达式为

$$
x = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{1-9}
$$

式中，$A$、$\alpha$、$\omega$ 分别称为振幅、初相位和圆频率，它们是表征简谐振动的三要素。

一次振动循环所需的时间 $T$ 称为周期；单位时间内振动循环的次数 $f$ 称为频率。它们与圆频率的关系为

$$
T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1-10}
$$

式中，周期 $T$ 的单位为 s（秒）；频率 $f$ 的单位为 Hz（赫兹）；圆频率 $\omega$ 的单位为 rad/s（弧度/秒）。图 1-3 描述了式（1-9）所示的运动，它可看成是该图中左边半径为 $A$ 的圆上一点沿圆周做等角速度 $\omega$ 的运动时在 $x$ 轴上的投影。

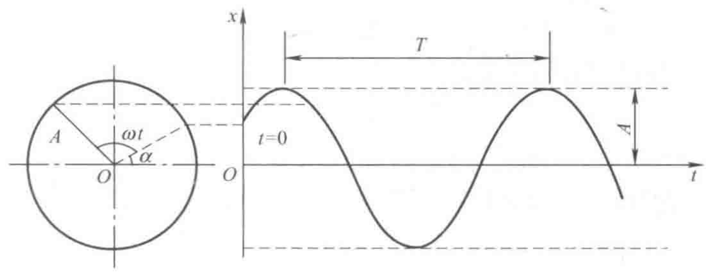


图 1-3　简谐振动的时间历程曲线

如果视 $x$ 为位移，则简谐振动的速度和加速度就是位移表达式（1-9）关于时间 $t$ 的一阶和二阶导数，即

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t+\alpha) = A\omega\sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}) \tag{1-11}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t+\alpha) = A\omega^2\sin(\omega t+\alpha+\pi) \tag{1-12}$$

可见，若位移为简谐函数，其速度和加速度也是简谐函数，且具有相同的频率。只不过在相位上，速度和加速度分别超前位移$\frac{\pi}{2}$和$\pi$。比较式（1-12）与式（1-9），可得到加速度与位移有如下关系

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1-13}$$

即简谐振动的加速度大小与位移成正比，但方向总是与位移相反，始终指向平衡位置。这是简谐振动的重要特征。

**2. 用旋转矢量表示简谐振动**

在振动分析中，简谐振动可以用平面上的旋转矢量表示。旋转矢量$\overrightarrow{OM}$的模为振幅 $A$，角速度为圆频率 $\omega$，任一瞬时$\overrightarrow{OM}$在纵轴上的投影 $ON$ 即为式（1-9）中的简谐振动表达式，如图 1-4a 所示。通常将这个旋转矢量画成如图 1-4b 所示。利用旋转矢量能直观形象地表示出上述位移、速度和加速度之间的关系，如图 1-4c 所示。

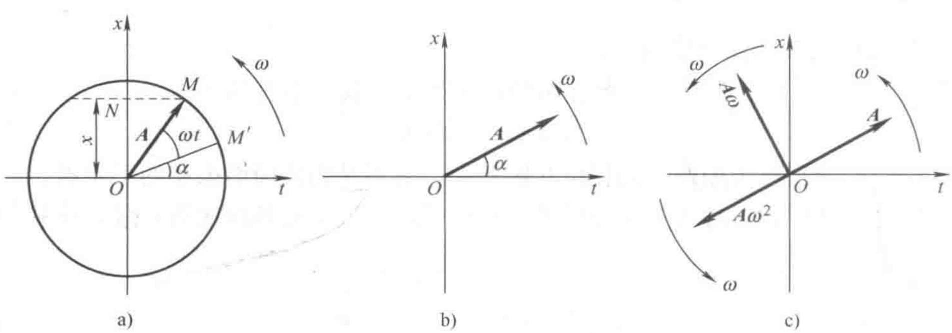


图 1-4　用旋转矢量表示简谐振动

a）旋转矢量图　b）简谐振动表示法　c）位移、速度、加速度表示法

**3. 用复数表示简谐振动**

简谐振动也可以用复数表示。记 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，复数

$$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + \mathrm{j}A\sin(\omega t+\alpha) \tag{1-14}$$

复数 $z$ 的实部和虚部可分别表示为

$$\mathrm{Re}(z) = A\cos(\omega t+\alpha)$$

$$\mathrm{Im}(z) = A\sin(\omega t+\alpha)$$

因此，简谐振动的位移 $x$ 与它的复数表示 $z$ 的关系可写为

$$x = \mathrm{Im}(z) \tag{1-15}$$

由于

$$\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}, \qquad -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$$

故用复数表示的简谐振动的速度、加速度分别为

$$\dot{x} = \mathrm{Im}[\mathrm{j}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}] = \mathrm{Im}[A\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})}] \tag{1-16}$$

$$\ddot{x}=\mathrm{Im}[-A\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}]=\mathrm{Im}[A\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha+\pi)}] \tag{1-17}$$

式（1-14）也可写成

$$z=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\overline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1-18}$$

式中

$$\overline{A}=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$$

是一复数，称为复振幅。它包含了振动的振幅和相角两个信息。用复指数形式描述简谐振动将给运算带来很多方便。

## 1.3.2 简谐振动的合成

**1. 两个同频率振动的合成**

在同一平面内，有两个同频率的简谐振动

$$x_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1),\ x_2=A_2\sin(\omega t+\alpha_2)$$

这两个简谐振动对应的旋转矢量分别是$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$。由于$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$的角速度相等，故旋转时它们之间的夹角（$\alpha_1-\alpha_2$）保持不变，它们的合矢量$\boldsymbol{A}$也必然以相同的角速度$\omega$做匀速转动，如图1-5所示。由矢量的投影定理可知，合矢量$\boldsymbol{A}$在$x$轴上的投影等于其分矢量$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$在同一轴上投影的代数和，于是得出

$$x=A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(\omega t+\alpha_2)=A\sin(\omega t+\alpha) \tag{1-19}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$$

$$A=\sqrt{(A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2)^2+(A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2)^2}$$

$$\alpha=\arctan\frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2} \tag{1-20}$$

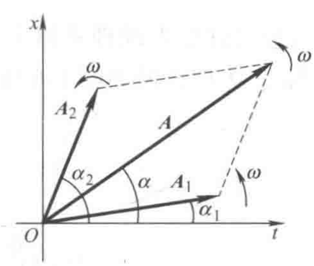

图1-5 两个同频率简谐振动的合成

即两个同频率简谐振动合成的结果仍然是简谐振动，其角频率与原来简谐振动的相同，其振幅和初相角用式（1-20）确定。

**2. 两个不同频率振动的合成**

有两个不同频率的简谐振动

$$x_1=A_1\sin\omega_1 t,\ x_2=A_2\sin\omega_2 t \tag{A}$$

若$\omega_1$与$\omega_2$之比是有理数，即

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m}{n} \tag{B}$$

式（B）经变换可写为

$$m\frac{2\pi}{\omega_1}=n\frac{2\pi}{\omega_2} \tag{C}$$

其中，$\frac{2\pi}{\omega_1}$和$\frac{2\pi}{\omega_2}$分别是两个简谐振动的周期$T_1$和$T_2$，取

$$T=mT_1=nT_2 \tag{D}$$

并且记 $x=x_1+x_2$，则

$$x(t+T)=x_1(t+T)+x_2(t+T)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+nT_2) \tag{E}$$
$$=x_1(t)+x_2(t)=x(t)$$

可见 $T$ 就是 $x_1$ 与 $x_2$ 合成的周期。所以，当频率比为有理数时，可合成为周期振动，但不是简谐振动，合成振动的周期是两个简谐振动周期的最小公倍数。

若 $\omega_1$ 与 $\omega_2$ 之比是无理数，则找不到这样一个周期。因此，其合成振动是非周期的。

若 $\omega_1\approx\omega_2$，对于 $A_1=A_2=A$，则有

$$x=x_1+x_2=A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t$$
$$=2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)t$$

令

$$\omega=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2),\quad \delta\omega=\omega_2-\omega_1$$

上式可表示为

$$x=2A\cos\frac{\delta\omega}{2}t\sin\omega t \tag{1-21}$$

式中的正弦函数完成了几个循环后，余弦函数才能完成一个循环。这是一个角频率为 $\omega$ 的变幅振动，振幅在 $2A$ 与零之间缓慢地周期性变化。它的包络线由下式确定：

$$A(t)=2A\cos\frac{\delta\omega}{2}t \tag{1-22}$$

这种特殊的振动现象称为“拍振”，或者说“拍振”是一个具有慢变振幅的振动，其拍频为 $\delta\omega$，运动波形如图 1-6 所示。拍振的现象在实验测量频率中是很有用的。

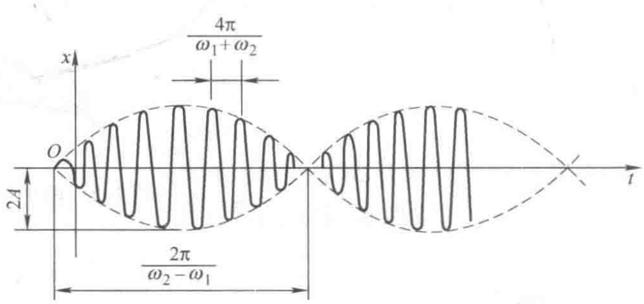


图 1-6　拍振波形

## 1.4　周期振动的谐波分析

工程技术中，许多振动是非简谐的，但它们是周期性的。设周期振动 $x(t)$ 的周期是 $T$，则有

$$x(t)=x(t+nT),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{1-23}$$

根据傅里叶级数理论，任何一个周期函数如果满足狄利克雷（Dirichlet）条件，则可以

展成傅里叶级数，即

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \tag{1-24}$$

式中，$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$称为基频；系数 $a_0$、$a_n$、$b_n$ 由下式确定

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1-25}$$

常数项$\frac{a_0}{2}$表示周期振动 $x(t)$ 在一个周期 $T$ 中的平均值。

式（1-24）也可写成

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n) \tag{1-26}$$

式中

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \varphi_n=\arctan\frac{a_n}{b_n},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{1-27}$$

将其表示成复数形式为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

式中

$$X(n\omega_1)=|X(n\omega_1)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$$

则

$$|X(n\omega_1)|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \varphi_n=\arctan\frac{a_n}{b_n}$$

可见，一个周期振动可视为圆频率顺次为基频 $\omega_1$ 及其整倍数的若干或无数简谐振动分量的合成振动过程。这些分量依据 $n=1，2，3，\cdots$分别称为基频分量、二倍频分量、三倍频分量等。$A_n$ 和 $\varphi_n$ 即圆频率为 $n\omega_1$ 的简谐振动的振幅及相角。因此，在振动力学中将傅里叶展开称为谐波分析。

为清晰表达一个周期函数中所含各简谐分量的频率、振幅及相角的关系，现以圆频率 $n\omega_1$（$n=1，2，3，\cdots$）为横坐标，以与之对应的振幅 $A_n$、初相角 $\varphi_n$ 分别为纵坐标绘制图 1-7。则图 1-7a 称为周期函数的幅值频谱图，简称幅值谱；图 1-7b 称相位频谱图，简称相位谱。图 1-7 表明，周期函数的谱线是互相分开的，故称为离散频谱。

函数的频谱，不但说明了组成该函数的简谐成分，也反映了该周期函数的特性。这种分析振动的方法称为频谱分析。由于自变量由时间改变为圆频率，所以频谱分析实际上是由时间域转入频率域。这是将周期振动展开为傅里叶级数的另一个物理意义。

虽然周期振动的谐波分析以无穷级数出现，但一般可以用有限项近似表示周期振动。

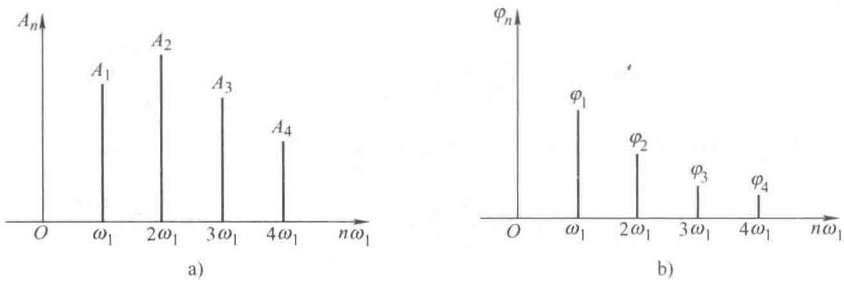


图 1-7 离散频谱
a）幅值谱 b）相位谱

**例 1-1** 已知一周期性矩形波如图 1-8 所示，试对其做谐波分析。

**解:** 一个周期内的矩形波函数 $F(t)$ 可表示为

$$F(t)=\begin{cases} f_0, & 0<t<\pi \\ -f_0, & \pi<t<2\pi \end{cases}$$

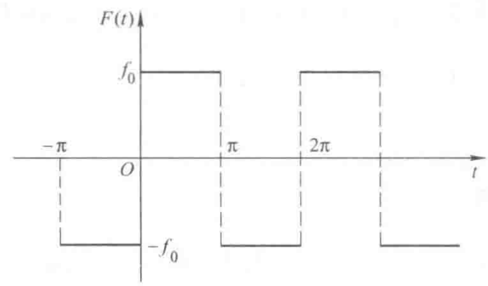


图 1-8 周期性矩形波

由式（1-25）得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\mathrm{d}t=0$$

它表示 $F(t)$ 的波形对于 $t$ 轴对称，故其平均值为零。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f_0\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}f_0\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}f_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}f_0\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t\right]=\frac{2f_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{4f_0}{n\pi},\quad n=1,3,5,\cdots$$

于是，得 $F(t)$ 的傅里叶级数为

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega_1 t=\frac{4f_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t$$

$$=\frac{4f_0}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots\right)$$

将其表示成复数形式为

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

其中

$$F(n\omega_1)=|F(n\omega_1)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$$

则

$$|F(n\omega_1)|=\frac{1}{2}b_n,\quad \varphi_n=\arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=0$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com