高分经验分享！

小鑫考研嘚吧嘚

电子社考研权威辅导丛书

考研

考研数学历年真题解析

（数学二）

潘　鑫◎编著

3

语言生动活泼　通俗易懂

知识回顾翔实　查漏补缺

解题思路连贯　实战精髓

全书视频讲解　效率提升

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
PHEI
http://www.phei.com.cn

电子社考研权威辅导丛书

小鑫考研嘚吧嘚

考研数学历年真题解析（数学二）

潘鑫　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

本书作者深入分析考研数学试题的特点和难点，对2009—2015年考研数学二的真题进行了详细的解读，力求将清晰完整的解题思路呈献给广大考生。通过自学本书，考生可以对考题难度及考点分布有一定程度的了解，并对往年真题的解题技巧和策略有全面的掌握。除此之外，书中含有大量知识点回顾和生动的讲解、举例，对培养考生独立解题思路具有重要意义。

本书配有真题讲解视频，有助于考生提高复习效率，全面掌握解题方法，最终取得优异成绩。

图书在版编目 (CIP) 数据

小鑫考研嘚吧嘚．考研数学历年真题解析．数学二 / 潘鑫编著．—北京：电子工业出版社，2015.8
（电子社考研权威辅导丛书）
ISBN 978-7-121-26738-3

Ⅰ．①小…　Ⅱ．①潘…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ．① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 160044 号

策划编辑：齐　岳
责任编辑：徐　静　齐　岳　　特约编辑：刘　凡
印　　刷：三河市双峰印刷装订有限公司
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：15.75　　字数：360 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版
印　　次：2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：48.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

在大学四年生活接近尾声的时候，何去何从成了最引人注意的话题。在社会竞争日益激烈的今天，继续深造无疑是有志青年不约而同的选择，而其中大多数同学选择考研，所以如何在这场“战役”中夯实基础，走好每一步变得十分关键。本书是一本非常朴实的书，它毫无保留地告诉你每一道题应该怎么做，帮助你把相关知识点吃透，像一位不辞劳苦的老师一遍遍唠叨着类似问题该如何处理。细读本书，你会发现它在众多考研数学辅导书籍中独树一帜，在看似唠叨的讲解中，你会轻轻松松掌握考研数学的实战精髓。

本书定位

本书是一本适合自学的真题解析书，它内容详尽、语言通俗，解题步骤一步不落，在重点难点处还配有知识点回顾及视频讲解。本书的真题解析通俗易懂，不存在让考生费解的跳跃性强的解题步骤，基础薄弱的考生也能迅速看懂解析，轻松掌握知识点，实现会做题、做对题的最终效果。

真题解析书籍的优劣体现在它是“授之以渔”还是“授之以鱼”，书中每一道题的讲解都有举一反三的效果，每一个容易被忽视的细节、容易被钻空子的思维定势、容易被混淆的知识点都被详尽地阐述出来。也许有的同学不理解为什么一道选择题、填空题竟然有4页解析，其实这正体现了本书的最大特色：注重解题思路。只有全面掌握解题思路，在考场上才会游刃有余。如果踏踏实实看完本书，相信通过本书“手把手”的辅导，你会从中悟出一些解题的技巧和道理，在汲取本书的精粹之后，你便可以甩开拐杖，独立行走。

本书特色

1. 语言通俗

市面上的很多考研数学真题解析类书籍的叙述方式都比较晦涩拗口，虽然解题步骤看似简洁明了，但是对于紧锣密鼓准备考研的同学来说，却显得不那么体贴。考生往往需要用很长的时间去理解文字表达的意思和公式推导的步骤，这样不仅降低了复习效率，也使考生的复习情绪更加焦躁。考研辅导书最重要的特点就应该是通俗易懂，毕竟我们需要动脑筋的地方不是揣测作者的意思，而是真正把题做透、做明白。我力图把本书编写得更加

活泼生动，在解题步骤的叙述上避免一切不利于理解的障碍和歧义，希望读者在看书做题的时候能体会到和作者的互动交流，抛弃沉重的负担，轻松掌握知识。

2. 逻辑清晰

本书的编排合理，逻辑关系十分清楚。具体来讲，书中没有一处讲解是可有可无的，每一步推导、每一个细小的知识点对于解题来说都是至关重要的。当考生遇到不会做的题时，这样全面详尽的讲解会让你一下捕捉到自己知识储备的盲点，不论这个盲点有多么微小，都是阻碍你考出理想成绩的绊脚石。本书的讲解就像是多米诺骨牌：一道题被轻轻一推，一类题就都拜倒在我们脚下了。

我是一个标准的90后，痴迷于大学阶段的各种数学类课程。在本科学习阶段就利用课余时间给同学们办讲座，帮助大家顺利通过期末考试。在考研数学的实战中，我取得了近乎满分的成绩，这得益于我在平时学习和备考过程中总结的一套特有的学习方法。在读研阶段，我一边学习一边在各大考研机构授课并录制教学视频，为的是把自己的学习方法教给更多需要帮助的同学，在考研路上助他们一臂之力。

本书的编写经过了多次修改，对题目的分析也尽力达到透彻完整。谨以此书献给所有在考研路上拼搏的同学们，我相信踏实的努力和认真的态度会帮助你们取得满意的成绩。

莫道功名需百战，愿效滴水洞石穿。为有胸怀摘星志，手足协力共登攀。莫道征途路漫漫，愿效江水去不还。大势所向天地宽，终究奔涌归浩瀚。祝同学们考研成功！

潘鑫

2015年6月于北京

目录 CONTENTS

2015 年全国硕士研究生
入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1)下列反常积分中收敛的是(　　)。

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　(B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$

(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$

解：本题是求收敛的反常积分。所谓收敛，指的是计算结果为一个数(而不是∞)。

现在就来分别计算这四个反常积分，看哪个的计算结果为一个数。

第一类反常积分及其计算方法。

第一类反常积分：如果反常积分 $\int_{\square}^{\square}f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在积分上限处没有定义或者在积分下限处没有定义，并且在开区间(下限，上限)内的任意一点都有定义，就称这样的反常积分为第一类反常积分。

第一类反常积分的计算方法：就按照定积分的方法计算，但最终上、下限里面有一个值是无法直接代入的，只能算极限(如果是下限代入不了,就算下限的右极限(除非是无穷，那就不用分左右)，如果是上限代入不了,就算上限的左极限(除非是无穷，那就不用分左右))。

第二类反常积分及其计算方法。

第二类反常积分：如果反常积分 $\int_{\square}^{\square}f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)$ 在积分上限处没有定义并且在积分下限处没有定义，并且在开区间(下限，上限)内的任意一点都有定义，就称这样的反常积分为第二类反常积分。

第二类反常积分的计算方法:按照如下两种方法之一解答。

方法1:和第一类反常积分的计算方法一样,按照定积分的方法做就行了，但最终上、下限都无法直接代入，只能两个算极限(注意：算下限的极限的时候是算下限的右极限(除非

是无穷，那就不用分左右)，算上限的极限的时候是算上限的左极限(除非是无穷，那就不用分左右))。

方法2:利用公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分就都是第一类反常积分了。

第三类反常积分及其计算方法。

第三类反常积分：如果反常积分$\int_{\square}^{\square} f(x)\mathrm{d}x$中的$f(x)$在开区间(下限，上限)内的任意一点都没有定义，就称这样的反常积分为第三类反常积分。

第三类反常积分的计算方法：利用公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$，将一个积分拆解成两个积分。这样，每个积分都是第一类或者第二类反常积分了。但是注意，c必须是没有定义的点。

以上就是反常积分的计算方法。有些同学可能会有这样的疑问：在高等数学教材中，反常积分分成了两类，这里为什么分成了三类呢?

这个问题很简单：教材中对反常积分的分类并不是从计算方法的角度来分类的，而上述是完全从计算方法的角度分类，所以分成了三类，每类对应不同的计算方法。

现在正式来计算四个选项中的反常积分。

先计算(A)选项中所给的反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$。

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$很明显是第一类反常积分，因为被积函数$\frac{1}{\sqrt{x}}$在积分上限$+\infty$处没有定义(任何函数在$+\infty$处都是没有定义的)，而在积分下限2处有定义，并且在开区间$(2, +\infty)$内的每一点都有定义。

所以应该按照第一类反常积分的计算方法来计算。

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_2^{+\infty} = 2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} = +\infty - 2\sqrt{2} = +\infty$$

由于计算结果不是一个数，该反常积分不收敛，所以不能选择(A)选项。

再来计算(B)选项中所给的反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$。

$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$明显是第一类反常积分，因为被积函数$\frac{\ln x}{x}$在积分上限$+\infty$处没有定义，而在积分下限2处有定义，并且在开区间$(2, +\infty)$内的每一点都有定义。

按照第一类反常积分的计算方法计算。

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{2} - \frac{\ln^2 2}{2} = +\infty - \frac{\ln^2 2}{2} = +\infty$$

由于计算结果不是一个数，该反常积分不收敛，所以不能选择(B)选项。

再来计算(C)选项中所给的反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$。

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ 明显是第一类反常积分，因为被积函数 $\frac{1}{x\ln x}$ 在积分上限 $+\infty$ 处没有定义，而在积分下限 2 处有定义，并且在开区间 $(2, +\infty)$ 内的每一点都有定义。

按照第一类反常积分的计算方法计算。

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d(\ln x) = \ln(\ln x)\big|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x) - \ln(\ln 2) = +\infty - \ln(\ln 2) = +\infty$$

由于计算结果不是一个数，该反常积分不收敛，所以不能选择(C)选项。

最后计算(D)选项中所给的反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$。

$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$ 明显是第一类反常积分，因为被积函数 $\frac{x}{e^x}$ 在积分上限 $+\infty$ 处没有定义，而在积分下限 2 处有定义，并且在开区间 $(2, +\infty)$ 内的每一点都有定义。

按照第一类反常积分的计算方法计算。

$$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx = \int_2^{+\infty}xe^{-x}dx = -\int_2^{+\infty}xd(e^{-x}) = -(xe^{-x}\big|_2^{+\infty} - \int_2^{+\infty}e^{-x}dx) = e^{-2}$$

由于计算结果是一个数，该反常积分收敛，所以应该选择(D)选项。

(2) 函数 $f(x) = \lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内(　　)。

(A)连续　　(B)有可去间断点

(C)有跳跃间断点　　(D)有无穷间断点

解：本题的解题思路是：第一步先求出 $f(x)$，第二步判断所求出的 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有无间断点以及有何种类型的间断点。

先进行第一步，即求出 $f(x)$。

情况1：当 $x=0$ 时。

由于 $x=0$，所以 $\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 没有意义，$\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 没有意义，而 $f(x) = \lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$，所以 $x=0$ 不在 $f(x)$ 的定义域内。

情况2：当 $x\neq0$ 时。

只要计算出极限 $\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 即可。值得注意的是，由于是“$t\to$”，所以在计算极

限的时候 x 是当成常数的。

由于 $\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})=1+\frac{\sin0}{x}=1+0=1$, $\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2}{t}=\infty$, 所以 $\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 属于 1^∞ 型的极限计算题，应该用该类型的解题方法来解答，即

$$\lim_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}=\lim_{t\to0}e^{\ln(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\ln(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2}{t}\ln(1+\frac{\sin t}{x})}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2\ln(1+\frac{\sin t}{x})}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2\times\frac{\sin t}{x}}{t}}=e^x$$

综上所述，有

$$f(x)=e^x\qquad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

再来进行第二步，即判断所求出的 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有无间断点以及有何种类型的间断点。

由于 $f(x)=e^x\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

又因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$, 也就是说左右极限存在且相等，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点。本题应该选择(B)选项。

(3)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$，若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则(　　)。

(A) $\alpha-\beta>1$　　(B) $0<\alpha-\beta\leqslant1$

(C) $\alpha-\beta>2$　　(D) $0<\alpha-\beta\leqslant2$

解: 先来求函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$。

把函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$ 改写为 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}, & x>0\\ 0, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$

对于 $x>0$ 和 $x<0$，通过公式来求导函数(因为这两段不是分段函数的分段点)。对于 $x=0$，可通过定义来求导数(因为 $x=0$ 是分段函数的分段点)。即

当 $x>0$ 时:

$$f'(x)=(x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta})'=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

当 $x<0$ 时:

$$f'(x)=(0)'=0$$

当 $x=0$ 时:

左导数为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{0}{\Delta x}=0$

右导数是0。因为$f'(x)$在$x=0$处连续,前提是$f'(x)$在$x=0$处存在(也就是$f'(0)$存在)。所以,假设右导数不为0,意味着左右导数不相等,那么函数$f(x)$在$x=0$处就不可导,即$f'(0)$不存在,这就矛盾了。所以右导数也是0。

即便如此,我们还是把右导数的定义式写出来。因为可以通过写定义式,看看能不能推出什么与α、β有关的结论。

右导数的定义式为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^{\alpha}\cos\frac{1}{(\Delta x)^{\beta}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\cos\frac{1}{(\Delta x)^{\beta}}\end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^{\beta}}=0$,所以必然有$a-1>0$(因为只有当$a-1>0$时,$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^{\beta}}$才属于“$0\times$有界”,计算结果才是0),解得$\alpha>1$。

虽然早已知道右导数为0,但是通过写右导数的定义式得到了$\alpha>1$这样一个有用的结论。

由于左导数 = 右导数 = 0,所以$f'(0)=0$。

综上所述,可得

当$x>0$时,$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}$。

当$x<0$时,$f'(x)=0$。

当$x=0$时,$f'(0)=0$。

即

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0\\0, & x=0\\0, & x<0\end{cases}$$

已知$f'(x)$在$x=0$处连续,说明“极限值=函数值”,可以推出“右极限值=函数值”,转化成数学语言就是:

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=f'(0)$$

由于$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0\\0, & x=0\\0, & x<0\end{cases}$,所以很明显有$f'(0)=0$,所以有

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=0 \tag{1}$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 很明显还等于 $\lim\limits_{x\to0^+}(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta})$，所以有

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}) \tag{2}$$

(1)式、(2)式相结合，得

$$\lim_{x\to0^+}(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta})=0 \tag{3}$$

由于 $\alpha>1$，所以必然有

$$\lim_{x\to0^+}\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}=0 \tag{4}$$

注：(4)式的成立是因为“$0\times$有界$=0$”。

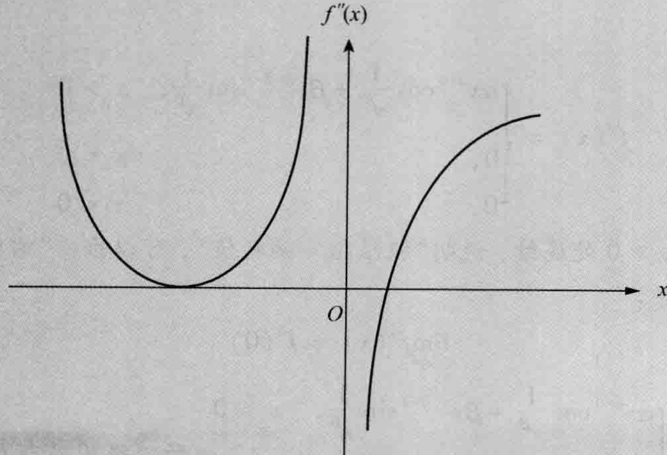
将(4)式代入(3)式，可得

$$\lim_{x\to0^+}\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}=0 \tag{5}$$

(5)式要想成立，必然有 $\alpha-\beta-1>0$(因为只有当 $\alpha-\beta-1>0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$ 才属于“$0\times$有界”，计算结果才是0)，解得 $\alpha-\beta>1$。所以本题应该选择(A)选项。

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其2阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　)。

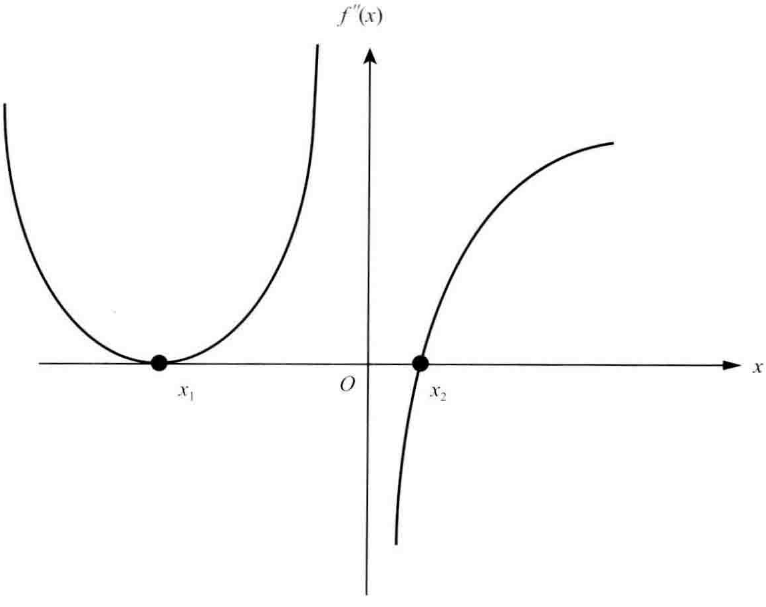
(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3



解：很多同学的心中都有一个思维定势：平面直角坐标系的两个轴肯定是 x 轴和 y 轴。

大家仔细看一下，本题所给的平面直角坐标系的两个轴是 x 轴和 y 轴吗？不是，是 x 轴和 $f''(x)$ 轴。也就是说，本题所给的图像是二阶导函数 $f''(x)$ 的图像，而不是函数 $f(x)$ 的图像。因此审题至关重要。

为了方便后续的讲解，在题中所给的平面直角坐标系中标出两个点 x_1 和 x_2。如下图所示。

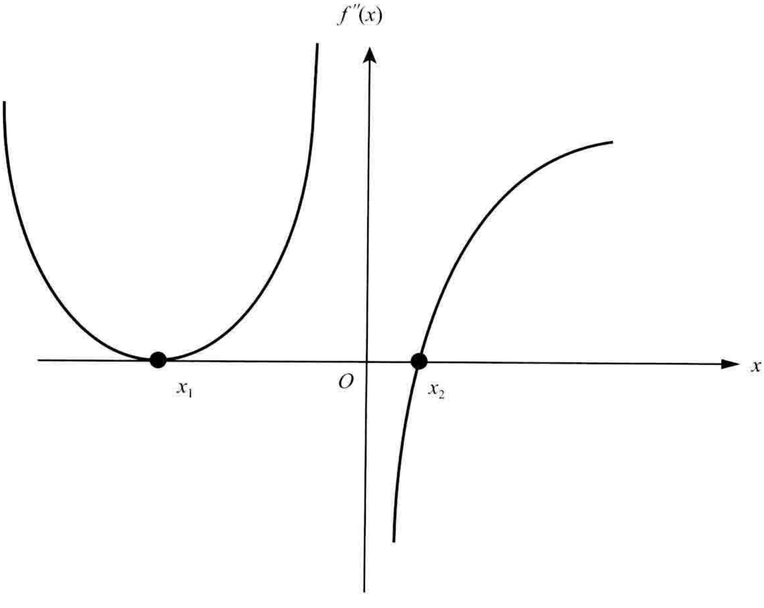


本题是求曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数，而拐点取自二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点。

在上图中，很容易看出：点 $x = x_1$ 和点 $x = x_2$ 是二阶导函数为 0 的点，点 $x = 0$ 是二阶导函数不存在的点。

可能有的同学就说："一共三个点嘛，所以本题选(D)。"这种说法是完全错误的，因为并非所有二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点都一定是拐点，而是拐点从二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点中取罢了。

那么，在 $x = x_1$、$x = x_2$、$x = 0$ 这三个点中，究竟哪个是拐点呢？判断的方法是：看每个点两侧的二阶导函数是否一个大于0一个小于0。如果是，那么该点就是拐点。如果不是，那么该点就不是拐点。



先来判断点 $x = x_1$ 是不是拐点。

由上图可知，$x = x_1$ 两侧的二阶导函数都是大于0的，所以 $x = x_1$ 不是拐点。

再来判断点 $x = 0$ 是不是拐点。

由上图可知，$x = 0$ 左侧的二阶导函数大于0，右侧的二阶导函数小于0，所以 $x = 0$ 是拐点。

最后来判断点 $x = x_2$ 是不是拐点。

由上图可知，$x = x_2$ 左侧的二阶导函数小于0，右侧的二阶导函数大于0，所以 $x = x_2$ 是拐点。

综上所述，曲线 $y = f(x)$ 一共有两个拐点，所以本题应该选择(C)选项。

(5)设函数$f(u,v)$满足$f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|$与$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|$依次是(　　)。

(A) $\frac{1}{2}$, 0　　　　(B) 0, $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$, 0　　　　(D) 0, $-\frac{1}{2}$

解：令$u=x+y, v=\frac{y}{x}$，可以解得$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$。

已知

$$f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2 \tag{1}$$

把$u=x+y, v=\frac{y}{x}$代入(1)式的等式左侧，把$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$代入(1)式的等式右侧，得

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2} \tag{2}$$

由于$f(u,v)=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2}$，所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\left.\frac{2u(1-v^2)(1+v)^2-0}{(1+v)^4}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\frac{2\times1\times(1-1^2)(1+1)^2-0}{(1+1)^4}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=\left.\frac{-2vu^2(1+v)^2-2(1+v)u^2(1-v^2)}{(1+v)^4}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$$

所以本题应该选择(D)选项。

(6) 设D是第一象限中的曲线$2xy=1$、$4xy=1$与直线$y=x$、$y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x,y)$在D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　)。

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

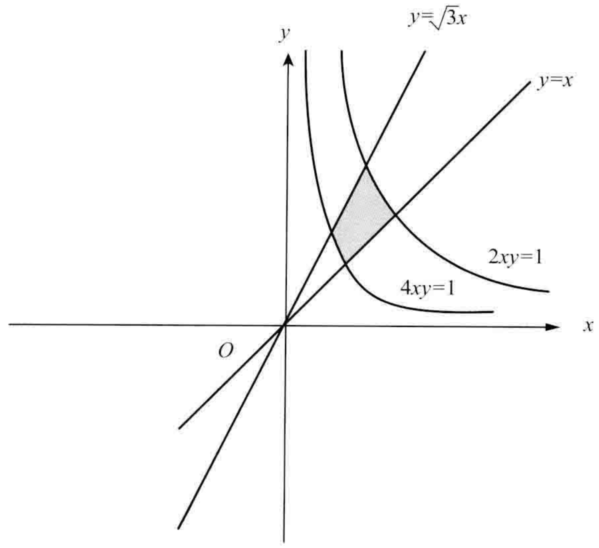
(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

解： 本题是计算二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分或者用"直角坐标系法"计算，或者用"极坐标系法"计算。

本题中所给的四个选项都是用"极坐标系法"来计算的。立刻可以把(C)选项和(D)选项排除掉。因为当用"极坐标系法"计算二重积分时，除了将被积函数中的 x 表示为 $r\cos\theta$、y 表示为 $r\sin\theta$ 之外，被积函数中还必须乘以一个 r，而(C)选项和(D)选项的被积函数中都没有乘以 r。

(A)选项和(B)选项中所给的被积函数都是正确的，所以要关注的是(A)选项和(B)选项中所给的积分上、下限，看哪个对。

首先，在平面直角坐标系中画出二重积分的积分区域 D，也就是画出第一象限中的曲线 $2xy = 1$、$4xy = 1$ 与直线 $y = x$、$y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域，如下图所示。

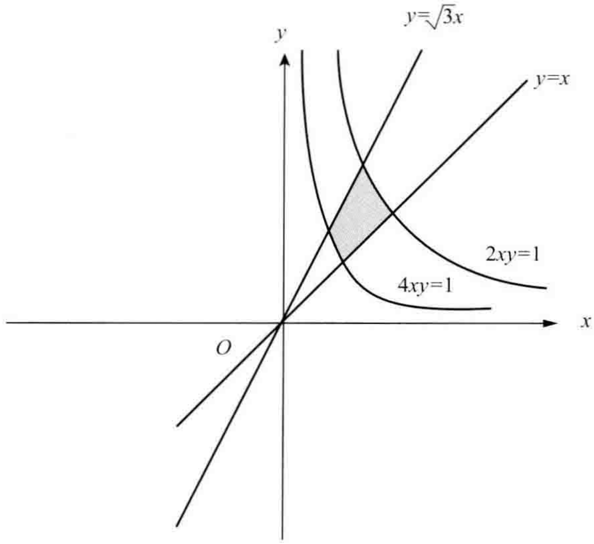


这里给大家指导一下上图的画法：可以看出 $y = x$ 和 $y = \sqrt{3}x$ 都是过原点的直线，如果不知道哪个在上面，就代一个数，比如代 $x = 1$，就可以得到其中一个 $y = 1$ 另一个 $y = \sqrt{3}$，于是就知道哪个应该画在上面了。再来看 $2xy = 1$ 和 $4xy = 1$，整理后就是 $y = \dfrac{\frac{1}{2}}{x}$ 和 $y = \dfrac{\frac{1}{4}}{x}$，这就是双曲线，如果不知道哪个在上面，同样代一个数就可以了。

现在来确定外层积分 θ 的积分上、下限以及内层积分 r 的积分上、下限。

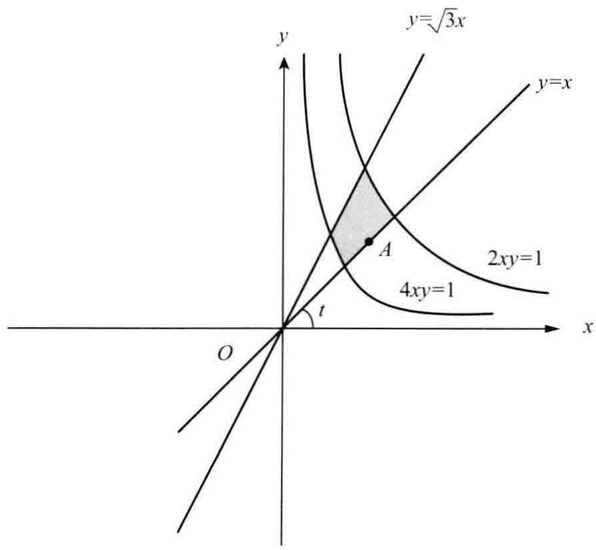
先来确定 θ 的积分上、下限。

大家来看以下阴影区域



先来确定 θ 的积分下限。在阴影区域 D 中有无数个点，在这无数个点中，哪个点和原点的连线与 x 轴正半轴之间的角度最小？很明显在阴影区域的边界 $y=x$ 上取点时，该点和原点的连线与 x 轴正半轴之间的角度最小，是45°，即 $\dfrac{\pi}{4}$。下面解释一下。

在阴影区域的边界 $y=x$ 上取点时，该点与原点的连线与 x 轴正半轴之间的角度最小。所以现在在阴影区域的边界 $y=x$ 上任意取一点 A，如下图所示。



那么点 A 和原点 O 的连线 OA 与 x 轴正半轴之间的角度 t 是多少呢？过点 A 作垂直于 x 轴的直线（垂足为点 B），如下图所示。