工业和信息化部“十二五”规划教材

现代微分几何

孙和军　赵培标 ◎ 编著

中国工信出版集团　電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

工业和信息化部“十二五”规划教材

现代微分几何

孙和军　赵培标　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书是“工业和信息化部‘十二五’规划教材”。本书针对理工科学生的特点和人才培养的需要编写，体现内容的完备性、易懂性、应用性、实践性、文化性和前沿性。全书共6章，主要内容包括：曲线与曲面论，张量代数和外形式，微分流形，切向量场、单参数变换群与切丛，张量场、黎曼流形与列维-齐维塔联络，流形上的积分、微分算子和德拉姆上同调。本书提供配套电子课件、MATLAB程序代码等。

本书可供理工科高等学校的数学、计算机设计、图形处理、物理等专业的研究生和高年级本科生作为学习现代微分几何、微分流形课程的教材使用，也可供数学工作者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

现代微分几何 / 孙和军，赵培标编著. —北京：电子工业出版社，2015.8
工业和信息化部“十二五”规划教材
ISBN 978-7-121-26272-2

I. ①现… II. ①孙… ②赵… III. ①微分几何—高等学校—教材 IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 125049 号

策划编辑：王晓庆
责任编辑：王晓庆
印　　刷：北京中新伟业印刷有限公司
装　　订：北京中新伟业印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：14　　字数：358 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版
印　　次：2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

导　论

数学的理论发展是建立在公理化基础之上的，后人在前人工作基础之上的创新推动了数学的发展。法国数学家庞加莱（J. H. Poincare，1854—1912 年）曾经说过："如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。" 而了解一些几何学发展的历史情况，可以为阅读本书所涉及的微分几何内容提供一个清晰的历史脉络。

杨振宁先生曾为陈省身先生（S. S. Chern，1911—2004 年）写过一首名为"赞陈氏级"的诗："天衣岂无缝，匠心剪接成。浑然归一体，广邃妙绝伦。造化爱几何，四力纤维能。千古寸心事，欧高黎嘉陈。" 这首诗中提到了欧几里得、高斯、黎曼、嘉当、陈省身 5 位数学大师。而这 5 位数学家大致对应于几何学发展的几个时期，可以看成是几何学相应发展阶段的代表人物。以他们的生平和学术贡献为线索和基础，并进行适当的扩充，我们大致可以梳理出几何的发展历程。若以此作为本书学习的一条历史线索，则可以对本书所涉及的知识点有感性的认识。

几何学的系统发展开始于欧几里得（Euclide，公元前 325—265 年）的《几何原本》。在这本发行量仅次于《圣经》的经典著作中，欧几里得研究了平面上的规则几何图形，如点、直线、多边形等。《几何原本》更重要的贡献在于为数学乃至科学的发展提供了构建理论体系的公理化方法。在欧几里得之后的长达两千年的时间里，几何学的研究都是围绕着这些几何对象展开的。因此，在很长的一段时间里，人们认为："几何即欧几里得，欧几里得即几何"。

法国数学家笛卡儿（R. Descartes，1596—1650 年）发明了直角坐标系，将代数方法应用于几何研究，创立了解析几何。这大大拓广了几何学的研究对象：方程对应的曲线、曲面等都纳入几何学的研究范畴。这也为后来微积分的发明创造了条件，为微分几何的出现奠定了基础。

17 世纪初，社会进步和生产力发展对变量数学产生迫切的需求。在此背景下，微积分被英国数学家牛顿（I. Newton，1643—1727 年）和德国数学家莱布尼兹（G. H. Leibniz，1646—1716 年）分别独立创立起来。微积分给数学带来了巨大的变革，成为现代数学发展的重要基石。它也给几何研究带来了新的思想和工具。人们开始用微积分来研究曲线和曲面这样的几何对象，这就是微分几何。微分几何（differential geometry）的命名最早来源于由意大利数学家比安基（L. Bianchi，1856—1928 年）所使用的意大利语"geometria differenziale"一词。在黎曼几何出现之前，几何学发展的这个时期都可以划归为古典微分几何阶段。在这个时期，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707—1783 年）、法国数学家蒙日（G. Monge，1746—1818 年）、德国数学家高斯（C. F. Gauss，1777—1855 年）等众多数学家都为微分几何的发展做出了重要贡献。

1854 年，德国数学家黎曼（G. F. B. Riemann，1826—1866 年）发表了《论作为几何基础的假设》（德文原标题：*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*，英文翻译标题：*On the hypotheses which underlie geometry*）的就职演说。这是黎曼几何创立、现代微分几何开端的标志。在这篇具有里程碑意义的演说中，黎曼在高斯等人古典微分几何研究基础之上对空间的观念给予了重新认识，引入了现代数学的核心概念——流形。但限于当时其他数学分支理论的发展，黎曼给出的是流形概念的雏形，并不是现代形式的流形概念。

黎曼几何属于非欧几何。事实上，在黎曼创立黎曼几何之前，俄国数学家罗巴切夫斯基（N. I. Lobachevsky，1792—1856 年）创立了另外一种非欧几何——罗氏几何。而高斯和匈牙利数学家鲍耶（J. Bolyai，1802—1860 年）也是非欧几何的最早发现者。德国数学家希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943 年）曾经指出："19 世纪最有启发性、最重要的数学成就是非欧几何的发现。"

1895 年，庞加莱在他的论文《拓扑》（*Analysis Situs*）中给出了流形定义，这是流形现代概念的先导。之后，在希尔伯特、德国数学家外尔（H. K. H. Weyl，1885—1955 年）、美国数学家惠特尼（H. Whitney，1907—1989 年）和其他数学家的先后努力下，流形、微分流形的现代形式定义最终形成。

1915 年，美国物理学家爱因斯坦创立了广义相对论。而他创立广义相对论的重要数学工具和语言就是黎曼几何和张量分析。这让人们充分认识到微分几何的重要性。同时，这一事件也展现出数学与物理之间的殊途同归、相辅相成的关系。这种关系也被后来的杨-米尔斯规范场论与纤维丛的联络论之间的奇妙对应所再次印证。

20 世纪 20 年代，法国数学家嘉当（Élie J. Cartan，1869—1951 年）很好地继承和发展了达布（J. G. Darboux，1842—1917 年）等人发现的外微分式和活动标架。著名华人数学家陈省身先生将之进一步发展和应用，给出了黎曼流形上的高斯-博内公式（Gauss-Bonnet formula）的内蕴证明，推动了大范围微分几何研究的深入。

现代微分几何已成为现代数学中发展最为迅速的分支之一。现代微分几何为非线性分析提供了舞台和工具，是开展现代数学研究不可或缺的语言和工具。同时，微分几何与多个数学分支相互渗透，产生了一些新的研究领域。例如，它与微分方程的融合交叉产生了几何分析，进而为世纪猜想——庞加莱猜想的解决提供了关键性的技术工具。微分几何也被广泛地应用于大地测量中的地图描绘、生物数学中的 DNA 结构研究、图像处理、计算机辅助设计、建筑业中曲面的浇筑、机械加工业曲面工件的制作等方面。

流形是现代微分几何和现代数学的核心概念，也是本书的主要研究对象。"流形"（manifold）最早来源于德文的 Mannigfaltigkei 一词，出现于 1854 年黎曼所发表的那篇著名的就职演说。"流形"的中文翻译最早是由我国著名数学家江泽涵先生给出的，出自南宋民族英雄、爱国诗人文天祥所作的《正气歌》中的一句诗："天地有正气，杂然赋流形"。这句诗的大意是说：天地间有一股正气，纷杂地散步在各种形体上。流形为人们开展微分几何及其他数学研究、认识自然界提供了广阔的天地。曾获得菲尔兹奖和阿贝尔奖的著名英国数学家阿蒂亚（M. Atiyah，1929 年—）在其报告《20 世纪的数学》中谈到"从局部到整体"、"维数的增加"、"从线性到非线性"、"几何与代数"等问题。这些问题都是现代微分几何中的重要问题，都与流形有着密不可分的联系。流形的附加结构为我们学习现代微分几何提供了一条主线。事实上，根据研究的需要，我们可以在流形上添加合适的附加结构：度量结构、微分结构、代数结构、复结构等，从而获得微分流形、李群、复流形等。仅就度量结构而言，就有黎曼流形、伪黎曼流形、次黎曼流形、芬斯勒流形等之分。我们不妨用"天地有真理，杂然赋流形"来概括流形附加结构及其作用：渐次增加的这些附加结构纷杂地附加在流形上，我们将以此为工具探究数学和自然中不同空间形式的真理——流形的性质。流形的多种附加结构为我们开展现代微分几何研究提供了工具，也带来了众多困难而又令人着迷的公开问题。这其中有一部分已在数学家们孜孜以求的不断努力下得以解决，但是还有许多未解决的问题，有待包括各位读者在内的有心人去继续探索。

前　　言

“微分几何”在我国研究生数学教育课程体系中占据着重要地位，它承担着向研究生普及现代数学知识、培养学生数学思维和创新能力的重要功能。随着我国建设创新型国家步伐的加快，创新型人才培养的客观需要、学生知识背景和需求的变化都对研究生微分几何课程的教学提出了新的要求。在主持江苏省高等教育学会“十二五”高等教育科学研究规划课题、江苏省研究生教育教学改革研究与实践课题、南京理工大学研究生课程教学模式改革项目、南京理工大学高等教育教学改革研究课题的过程中，第一作者对“现代微分几何”课程的教学内容和教学方法做了一系列的改革尝试。本书是作者在多年讲授的“现代微分几何”课程的教案基础上，结合相关教学改革实践编写而成的。“工业和信息化部‘十二五’规划教材”项目为本书的出版提供了契机。本书可供理工科高等学校的数学、物理、计算机设计、图形处理等专业的研究生和高年级本科生作为学习现代微分几何、微分流形的课程教材使用，也可供数学工作者参考使用。

针对理工科学生的特点和人才培养的需要，本书注意体现内容的完备性、易懂性、应用性、实践性、文化性和前沿性。

第一，为了增强教材内容的完备性、提高教材的适用性，本书整合了曲线论、曲面论的主干内容和拓扑学的基本概念。本书内容可以分为古典微分几何和现代微分几何两部分：第一部分也就是本书的第 1 章，着重介绍古典微分几何的曲线和曲面主干理论，还包括公理化方法建立的欧氏空间的概念、向量代数和向量分析内容。第二部分是本书的第 2 ~ 6 章，介绍的是现代微分几何的基本概念、思想和方法，主要内容包括张量、外形式、微分流形、子流形、切向量场、单参数变换群、切丛、张量场、黎曼流形、协变微分、外微分式、流形上的积分、斯托克斯定理、流形上的微分算子、拉普拉斯算子的特征值、德拉姆上同调和霍奇分解定理等。我们希望通过这样的内容安排，能让具有微积分知识基础的读者自然地由古典微分几何进入现代微分几何。考虑到近年来许多理工科数学专业的研究生并没有古典微分几何的知识基础，以及服务于高年级本科生选修的需要，这样的安排还是有所裨益的。事实上，古典微分几何的曲线和曲面是现代微分几何中流形的低维例子，其概念和性质是研究和理解流形有关概念和性质不可或缺的基础。纵观全书，我们也希望通过这样的安排，可以为读者呈现几何学从欧氏几何、空间解析几何、古典微分几何直到现代微分几何的历史发展脉络和理论体系。

第二，为了加强教材内容的实践性，本书在第 1 章中安排了基于 MATLAB 的几何图形绘制的内容。这既是为了发挥数学软件在绘制几何图形方面的优势，帮助我们更好地理解曲线、曲面和流形等微分几何研究对象的概念和性质，也是为了顺应数学软件普及和使用增加的趋势，提高理工科学生使用数学软件的能力。

第三，为了突出教材内容的思想性、文化性和趣味性，本书将数学文化的有关内容有机地融入到教材中。创新型人才培养的一个重要任务是要寻找合适的工具来给予学生的创新人

格成长以正面的引导。而数学家是数学发展的引导者和实施者，数学理论中包含了由他们的创新精神和意志凝结而成的精神财富。我们以附录的形式着重介绍了笛卡儿（R. Descartes，1596—1650 年）、欧拉（L. Euler，1707—1783 年）、高斯（C. F. Gauss，1777—1855 年）、嘉当（Élie J. Cartan，1869—1951 年）、黎曼（G. F. B. Riemann，1826—1866 年)、惠特尼（H. Whitney，1907—1989 年）、纳什（John Nash，1928 年—）、陈省身（S. S. Chern，1991—2004 年）、爱因斯坦（A. Einstein，1879—1955 年）、列维-齐维塔（T. Levi-Civita，1873—1941 年）、贝尔特拉米（E. Beltrami，1835—1899 年）、德拉姆（G. de Rham，1903—1990 年）的生平及学术贡献。他们与本书相关章节内容的历史发展背景紧密相关。同时，他们的生平和学术研究故事亦能带给读者很多启迪。例如，黎曼：40 岁时即英年早逝，但在数学的多个领域中做出了开创性的贡献，被后人誉为最具创新精神的数学家之一；纳什：30 岁前在博弈论和流形嵌入定理方面做出重要工作，而后罹患精神分裂症，30 多年后神奇地康复了，并在晚年获得诺贝尔经济学奖；高斯、罗巴切夫斯基（N. I. Lobachevsky，1792—1856 年）、鲍耶（J. Bolyai，1802—1860 年）："春天一到，紫罗兰竞相开放"，他们都是非欧几何的发现者，但对待自己研究结果和数学研究的态度和方式却截然不同。除了附录，本书在导论、各章引言和正文等处也穿插介绍了微分几何理论历史发展情况、数学家的学术贡献等内容。本书共提及 130 余位数学家，他们是几何、微分几何相关理论发展和一些重要公开问题研究的关键人物。我们希望读者能从这些数学家的生平和学术研究故事中感受数学家在数学理论的发现和创立过程中所展现出的创新精神和人格魅力；能了解微分几何理论知识背后的历史发展情况，并发现后续学习和研究的线索。希望这样的安排能对提高理工科研究生的数学修养、增加其学习兴趣和培养其创新能力有所帮助。

第四，为了体现教材内容的应用性、前沿性和学科交叉性，本书介绍了微分几何研究领域中一些有代表性的研究结果和公开问题的研究进展情况，展示了微分几何在其他数学分支和学科中的应用。另外，本书对流形的微分结构给出了一些新颖的解释。对重要的专业词汇，本书给出相应的英文翻译。

希望这些编写安排和尝试能对提高理工科微分几何课程的教学质量起到抛砖引玉的效果。

教学中，可以根据教学对象和学时等具体情况对书中的内容进行删减和组合。为适应教学模式、教学方法和手段的改革，本书提供配套电子课件、MATLAB 程序代码等，请登录华信教育资源网（http://www.hxedu.com.cn）注册下载。

本书由孙和军、赵培标编著，孙和军负责全书内容的编写，赵培标负责校核。在本书的写作过程中，第一作者得到了国家自然科学基金项目（批准号：11001130）、江苏省和南京理工大学相关教改项目的支持和资助，作者在此表示衷心的感谢。感谢"工业和信息化部'十二五'规划教材"项目和评审专家对本教材的肯定。感谢我的妻子王海侠博士，她为书稿的整理、打印和相关插图的制作做了大量工作。回望学术研究之路，感谢我的导师杨洪苍研究员、吴报强教授的引领。回望教学之路，感谢杨孝平教授和南京理工大学各位同事的支持和帮助。感谢电子工业出版社王晓庆编辑的细致和敬业。

欢迎专家学者和读者对本书提出指正和建议，这对本书的后续修订和完善都是宝贵的财富。

孙和军

2015 年 7 月于南京理工大学

目　录

第1章

曲线与曲面论

算术符号是书写出来的图形，而几何图形是绘画出来的公式。

——希尔伯特

古典微分几何起源于将微积分应用于几何对象的研究中，欧氏空间中的曲线和曲面是古典微分几何的主要研究对象。18 世纪初，英国数学家牛顿（I. Newton，1643—1727 年）和德国数学家莱布尼兹（G. H. Leibniz，1646—1716 年）发明了微积分，这为数学研究提供了新的思想和工具。人们开始用微积分来研究曲线和曲面这样的几何对象，微分几何得以创立和发展起来。在此之后到德国数学家黎曼创立黎曼几何为止，都属于古典微分几何时期。欧拉、蒙日、高斯等被公认是古典微分几何的奠基人。

1766 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707—1783 年）出版了《关于曲面上曲线的研究》，这是微分几何发展史上的一个里程碑。法国数学家蒙日（G. Monge，1746—1818 年）将微积分应用到曲线和曲面的研究中。1807 年，蒙日出版了《分析在几何中的应用》（*Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'Ecole impériale polytechnique*），对此前微分几何中的许多结果做了较为系统的整理。这是最早的一本微分几何专门教材，它在当时传播微分几何的过程中发挥了重要作用，该书前后共印了 5 版，一直发行到蒙日去世 40 多年后。

1827 年，德国数学家高斯（C. F. Gauss，1777—1855 年）发表了具有标志意义的论文《关于曲面的一般研究》（*Disquisitiones circa superficies curvas*）。这篇论文的结果奠定了近代形式曲面论的理论基础。他还获得了如下著名的高斯绝妙定理（Theorema Egregium）：曲面的高斯曲率被第一基本形式所完全决定。这一定理的重要性在于：在前人对微分几何研究了 150 年之后，高斯第一次发现了仅依赖于第一基本形式的几何量和性质，这是微分几何中的根本性内容。以此为开端，内蕴几何学（intrinsic geometry）得以发展起来。从现代微分几何的观点来看，曲面的第一基本形式就是其度量。因此，从某种意义上来说，这也为后来建立在度量基础之上的黎曼几何等现代微分几何的创立和发展奠定了基础。

本章的目的是帮助读者掌握古典微分几何中的主干内容，以便为后续微分流形等有关概念和结果的学习奠定基础。在本章中，我们将用公理化的方法建立欧氏空间和欧氏向量空间的概念，介绍向量的代数运算与向量分析的基本概念和性质。然后着重介绍古典微分几何的主体知识——曲线论和曲面论，说明如何利用微积分的思想和工具来研究这两类低维几何对象的性质。本章内容以高斯绝妙定理这一古典微分几何中的重要结果作为结束。因为三维欧氏空间中的几何对象具有直观性，所以本章的学习将为后续微分流形的抽象概念和结果提供具体的实例和模型。

1.1 度量空间与欧氏空间

生活在公元前三世纪亚历山大城的古希腊几何学家欧几里得（Euclid，公元前 325—265 年）被公认为是几何学之父。在《几何原本》（*Elements*）这本不朽著作中，他将一些确定的基本命题作为公理，用演绎推导的公理化办法获得其他结论，形成一套逻辑严密的知识体系，欧氏几何也得以创立发展起来。欧氏几何和公理化方法是几何学、现代数学和科技发展的基石。两千多年来，《几何原本》被翻译成多种语言，据统计，已经有 2000 多个版本问世。它一直被视为学习几何学最好的入门教科书。在西方世界，它的发行量仅次于《圣经》，堪称是数学的圣经。《几何原本》的最早中文译者、明朝数学家徐光启（1562—1633 年）曾这样评价此书："此书有三至三能：似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难。易生于简，简生于明，综其妙在明而已。"这当然也可看成是对欧氏几何的评价。美国物理学家爱因斯坦（A. Einstein，1879—1955 年）也曾这样描述他在 12 岁时接触到《几何原本》和欧氏几何的震撼："那种清澈和确定的感觉，让我留下了难以形容的印象。"高维欧氏空间是推广几何研究对象的基础。

本节中，我们先介绍度量空间的定义和例子，然后利用公理化的方法建立向量空间、欧氏向量空间、仿射空间和欧氏空间的概念。

1.1.1 度量空间

19 世纪末，德国数学家康托尔（G. F. L. P. Cantor，1845—1918 年）创立了集合论，为各种抽象空间的建立、点集拓扑学的发展奠定了基础。度量空间的概念最早出现于法国数学家弗雷歇（M. Fréchet，1878—1973 年）在 1906 年提交的名为 *Sur quelques points du calcul fonctionnel* 的博士论文中。弗雷歇发现许多分析学的结果都涉及函数间的距离关系，由此抽象出度量空间的概念，奠定了抽象空间的理论基础。

定义 1.1.1（直积） 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 n 个集合，称：

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} X_i &= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, n\}\end{aligned}$$

为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的笛卡儿积（Cartesian product），也称为直积（direct product），称 x_i 为 $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} x_i$ 的第 i 个坐标。特别地，n 个集合 X 的直积 $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n个}$ 记为 X^n。

【例 1.1.1】 设 S^1 为单位圆，$I = [0,1]$，则直积 $S^1 \times I$ 表示以 S^1 为底、I 为高的圆柱面上的点构成的集合。

度量空间是一种特殊的拓扑空间，其定义如下。

定义 1.1.2（度量空间） 设 X 为非空集合，称映射 d: $X \times X \to R$ 为 X 上的一个度量(metric)，若 $\forall x, y, z \in X$，有：

（1）非负性：$d(x, y) \geqslant 0$，并且等号成立当且仅当 $x = y$；

（2）对称性：$d(x, y) = d(y, x)$；

（3）三角不等式：

$$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z) \tag{1.1.1}$$

称 (X,d) 为度量空间（metric space），简记为 X。称 $d(x,y)$ 为空间 (X,d) 中点 x 和 y 之间的距离（distance）。

我们也可以将性质（1）拆成：（4）$d(x,y)\geqslant 0$；（5）$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$。另外，（4）可由性质（2）、性质（3）和（5）推出：

$$2d(x,y)=d(x,y)+d(y,x)\geqslant d(x,x)=0$$

空间的几何性质依赖于其上的度量，不同的度量造就了不同的几何学，例如，黎曼几何、伪黎曼几何、罗氏几何、芬斯勒几何。

【例 1.1.2】 设 $R^n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in R\}$，$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$，定义：

$$d_0(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当}x=y\text{时}\\ 1, & \text{当}x\neq y\text{时}\end{cases} \tag{1.1.2}$$

$$d_1(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \tag{1.1.3}$$

$$d_2(x,y)=\max\{|x_i-y_i||\mathrm{i}=1,\cdots,n\} \tag{1.1.4}$$

$$d_3(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \tag{1.1.5}$$

验证可知 d_i 都为 R^n 上的度量。称 d_0 为 R^n 上的离散度量，称 d_1 为 R^n 上的常用度量，称 (R^n,d_1) 为 n 维欧氏空间，简记为 R^n。

【例 1.1.3】 设 $R^\infty=\left\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in R,\sum_{i=1}^{+\infty}x_i^2<+\infty\right\}$，定义映射 d：$R^\infty\times R^\infty\to R$ 为：$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^\infty$

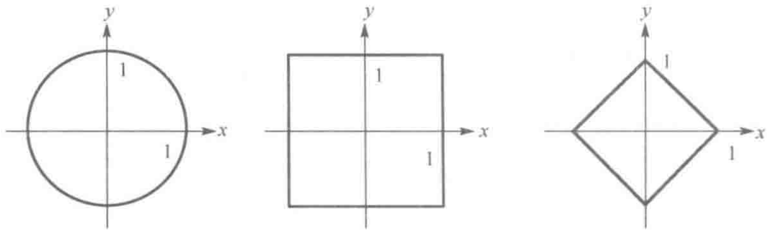
$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2} \tag{1.1.6}$$

验证可知 d 为 R^∞ 上的度量，称 (R^∞,d) 为希尔伯特空间（Hilbert space），简记为 R^∞。

希尔伯特空间是有限维欧氏空间的一个推广。它以德国数学家希尔伯特（D. Hilbert，1862—1943 年）的名字命名。20 世纪初，希尔伯特和施密特（E. Schmidt，1876—1959 年）对积分方程（Integral Equations）进行了研究。在此过程中，希尔伯特研究了希尔伯特空间。值得一提的是，希尔伯特对康托尔的集合论给予了支持和捍卫。希尔伯特曾说："没有人能够把我们从康托尔建立的乐园中赶出去。"在 1929 年出版的关于无界自伴算子的著作 *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*（Mathematische Annalen, 1929, 102: 49–131）中，美国数学家冯·诺伊曼（J. Von Neumann，1903—1957 年）最早使用了"希尔伯特空间"（Hilbert Space）这个名词。

定义 1.1.3（邻域） 设 (X,d) 为度量空间，$\varepsilon>0$，$x\in X$，称 X 的子集 $B(x,\varepsilon)=\{y\in X|d(x,y)<\varepsilon\}$ 为 (X,d) 的以 x 为中心，ε 为半径的邻域（neighborhood）或开球。

【例 1.1.4】 在例 1.1.2 中，度量空间 (R^2,d_i) 的以 O 为中心、1 为半径的邻域 $B_i(0,1)$，$i=1,2,3$。它们的图形如图 1.1.1 所示。而 $B_0(0,1)$ 由原点构成独点集。



(a) $B_1(0, 1)$　　(b) $B_2(0, 1)$　　(c) $B_3(0, 1)$

图 1.1.1　邻域的图形

定义 1.1.4（开集）　设 B 为度量空间 (X,d) 的所有邻域构成的集合，$A \subset X$，若存在 $B_0 \subset B$，使得 $A = \bigcup_{B \in B_0} B$，则称 A 为度量空间 (X,d) 的开集（open set）。度量空间 (X,d) 的所有开集构成的集簇记为 τ_{d}。

我们可以在度量空间上定义连续映射。

定义 1.1.5（连续映射）　设 (X,d) 与 $(Y,\tilde{d})$ 为两个度量空间，若映射 f: $X \to Y$，$x \in X$ 满足：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得：当 $d(x,y) < \delta$ 时，有 $\tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$，则称映射 f 在 x 处连续。若映射 f 在 X 的每一点 x 处都连续，则称 f: $X \to Y$ 为连续映射（continuous mapping）。

1.1.2　向量空间

定义 1.1.6（向量空间）　数域 F 上的向量空间（vector space）是指交换群 V，其上的群运算加法与数乘运算满足：$\forall \lambda$，$\mu \in F$，$\vec{u}, \vec{v} \in V$，有：

（1）$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$，$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$；

（2）$(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$；

（3）$1\vec{v} = \vec{v}$。

定义 1.1.7（向量空间的基底）　设 V 是数域 F 上的一个向量空间，$\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ 是向量空间中 V 的一组线性无关的向量，若 V 中的任一个向量 $\vec{v}$ 都可以被 $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ 线性表出，即存在 $a^1, \cdots, a^n \in F$，使得：

$$\vec{v} = a^1\vec{v}_1 + \cdots + a^n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a^i\vec{v}_i \tag{1.1.7}$$

则称 $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ 为向量空间 V 的一组基底（basis），记为 $\{v_i\}$。同时，称向量空间 V 的维数（dimension）是 n，记为 $\dim V = n$。

当向量空间 V 取定基底 $\{v_i\}$ 后，V 中的向量 $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a^i\vec{v}_i$ 就与 n 元数组 $(a^1, \cdots, a^n)$ 建立了一一对应。换句话说，n 维向量空间与这些 n 元数组所构成的集合同构。我们称 $(a^1, \cdots, a^n)$ 是向量 $\vec{v}$ 在基底 $\{v_i\}$ 下的坐标。

按照著名的爱因斯坦求和约定（Einstein summation convention），式（1.1.7）可以记为 $\vec{v} = a^i\vec{v}_i$，即同一指标在乘积的上、下指标中同时出现两次，就表示要关于该指标对所有可能的值求和。在本书的相关部分，我们将不加指明地使用爱因斯坦求和约定来表示相关和式。

【例 1.1.5】　设 $\vec{v}_1 = (0,1,1)$，$\vec{v}_2 = (1,-1,2)$，$\vec{v}_3 = (-1,-2,1)$ 是三维向量空间 V 的一组基底，求向量 $\vec{v} = (3,3,6)$ 在该组基底下的坐标。

解：设 $\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}a^i\vec{v}_i$，则

$$(3,3,6)=(a^2-a^3,a^1-a^2-2a^3,a^1+2a^2+a^3)$$

解方程组可得 $a^1=3$，$a^2=2$，$a^3=-1$。所以，向量 $\vec{v}=(3,3,6)$ 在该组基底下的坐标是 $(3,2,-1)$。

定义 1.1.8（欧氏向量空间） 对给定的向量空间 V，定义映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle$：$V\times V\to R$，使其满足：$\forall\lambda\in F$，$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}\in V$，有：

（1）线性：

$$\langle\vec{v}_1+\lambda\vec{v}_2,\vec{v}\rangle=\langle\vec{v}_1,\vec{v}\rangle+\lambda\langle\vec{v}_2,\vec{v}\rangle \tag{1.1.8}$$

（2）对称性：

$$\langle\vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle=\langle\vec{v}_2,\vec{v}_1\rangle \tag{1.1.9}$$

（3）正定性：$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle\geqslant 0$ 并且等号成立当且仅当 $\vec{v}=0$；

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为向量空间 V 上的欧氏内积（Euclidean inner product）。指定了欧氏内积 $\langle,\rangle$ 的向量空间 V 上的欧氏内积称为欧氏向量空间（Euclidean vector space），记为 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$。我们也将向量空间 V 上的欧氏内积记为 $g(\cdot,\cdot)$。

利用内积，我们可在向量空间 V 上引入模或范数（norm），即对 $\forall\vec{v}\in V$，定义向量 $\vec{v}$ 的模为：

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$$

模为 1 的向量称为单位向量。若向量 $\vec{u},\vec{v}\in V$ 满足 $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$，则称向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 是正交的（orthogonal）。

定义 1.1.9（单位正交基底） 若欧氏向量空间 V 的一组基底 $\{\vec{e}_i\}$ 满足：

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\langle\vec{e}_i,\vec{e}_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当i=j时\\ 0, & 当i\neq j时\end{cases} \tag{1.1.10}$$

则称 $\{\vec{e}_i\}$ 是欧氏向量空间 V 的单位正交基底（orthonormal basis），也称为规范正交基、幺正基。其中，δ_{ij} 称为克罗内克符号、克氏符号、克罗内克符号函数或克罗内克 δ（Kronecker delta）。它以德国数学家克罗内克（L. Kronecker，1823—1891 年）的名字命名。

设 $\{\vec{v}_i\}$ 是 n 维欧氏向量空间 V 的一组基底，令：

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$$

$$\vec{e}_k=\frac{\vec{v}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle\vec{e}_i-\vec{v}_k\rangle\vec{e}_i}{\left\|\vec{v}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle\vec{e}_i-\vec{v}_k\rangle\vec{e}_i\right\|},\quad k=2,\cdots,n \tag{1.1.11}$$

易证 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是欧氏向量空间 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的一组单位正交基底。所以，在欧氏向量空间 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中总存在一组单位正交基底。上述构造单位正交基底的过程称为施密特正交化（Schmidt's orthogonalization）。

1.1.3 仿射空间

从组成空间的元素来看，向量空间是由向量构成的空间，而仿射空间则是点的空间。

定义 1.1.10（仿射空间） 设 A 为非空集合，V 为 n 维向量空间。若存在映射：基底 $A\times A\to V$，满足：

（1）$\forall p,q\in A,\ \overrightarrow{pq}\in V$；

（2）$\forall p\in A,\ \overrightarrow{pp}=0\in V^n$；

（3）$\forall p\in A,\ \vec{v}\in V$，$\exists q\in A$，使得：$\overrightarrow{pq}=\vec{v}$；

（4）$\forall p,q,\vec{r}\in A,\ \overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}=\overrightarrow{pr}$；

则称 A 为 n 维仿射空间（affine space），称 V 是与仿射空间 A 伴随的向量空间。

粗略地说，向量空间的几何化是仿射空间，仿射空间的代数化是向量空间。

定义 1.1.10 中的条件（3）表明：取定欧氏空间 V 中的一个向量 $\vec{v}$ 后，仿射空间 A 中的所有点都可以根据条件（3）利用 $\vec{v}$ 找到一个对应点，使得这两点通过映射映为 $\vec{v}$。对仿射空间 A 而言，向量空间 V 中的向量 $\vec{v}$ 给出了仿射空间 A 到自身的一个变换。我们称其为向量 $\vec{v}$ 在仿射空间 A 中决定的平行移动。

条件（3）还表明：在仿射空间 A 中，过直线 L 外一点 p，能且只能作一条直线与直线 L 平行。这一条件与欧几里德平行公设的要求是一致的。

定义 1.1.11（仿射空间的基底） 设 A 为与 n 维向量空间 V 伴随的仿射空间，$\forall o\in A$，$p\in A$，有 $\overrightarrow{oq}\in V^n$。若存在 V 的一组基 $\{\delta_i\}$，使得：$\forall p\in A$，有：

$$\overrightarrow{oq}=\sum_{i=1}^{n}a^i\delta_i=a^i\delta_i \tag{1.1.12}$$

则称 $\{\delta_i\}$ 为 A 的一组基，称 $(o,\{\delta^i\})$ 为仿射空间 A 的一个坐标系（coordinate system）或标架（frame），称 $(a^1,\cdots,a^n)$ 为点 p 在坐标系 $(o,\{\delta^i\})$ 下的坐标。

特别地，若 V^n 为欧氏向量空间，可取 $\{\delta_i\}$ 为单位正交基底。

1.1.4 欧氏空间

定义 1.1.12（欧氏空间） 称与 n 维欧氏向量空间 V 伴随的仿射空间 A 为欧氏空间（Euclidean space），记为 E^n。若 $\{\delta_i\}$ 为向量空间 V 中的单位正交基，则称 $\{o,\delta_i\}$ 为欧氏空间 E^n 的一个单位正交标架，相应的坐标系称为欧氏空间 E^n 的笛卡儿坐标系（Cartesian coordinate system）。

定义 1.1.13（欧氏空间中两点间的距离） 欧氏空间 E^n 中任意两点 p 和 q 之间的距离定义为：

$$d(p,q)=\sqrt{\left\langle\overrightarrow{pq},\overrightarrow{pq}\right\rangle} \tag{1.1.13}$$

称 d 为 E^n 上的距离函数（distance function）。

E^n 关于距离函数 d 构成度量空间。

【例 1.1.6】 设 $\{o,\delta_i\}$ 为欧氏空间 E^n 的一个单位正交标架，点 p 和 q 的坐标分别为 $(a^1,\cdots,a^n)$ 和 $(b^1,\cdots,b^n)$，则 $\overrightarrow{pq}=\sum_{i=1}^{n}(b^i-a^i)\delta_i$。从而，有：