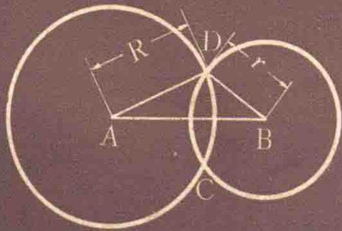
数学进修用书



文潜

圆

YUAN

数学进修用书

圆

文 潜

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书比较系统地介绍和论证了有关圆的概念和定理，其中有些内容还运用运动、变换的观点加以介绍和论述，把不少定理统一和概括了起来。内容丰富，叙述由浅入深，由易到难。每章、每节选有适量的思考题、练习题，最后还选有一定难度的综合练习题。

数学进修用书

圆

文 潜

*

浙江人民出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 5.125 字数 116,000

1979年9月第 一 版

1979年9月第一次印刷

印数：1—8,500

统一书号：7103·1066

定 价：0.43 元

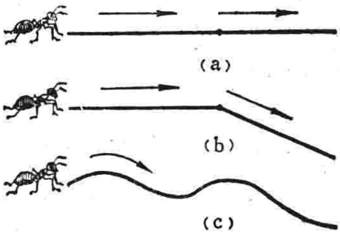
目　　录

引　言

在《直线形》中，大家学习了一些由直线、射线、线段所组成的平面几何图形，并且掌握了它们的一些基本性质．这些性质在实践上是很有用的，在理论上也是进一步学习其他几何图形的基础，希望大家要牢固地掌握它们．

但是，在现实生活和生产中碰到的几何图形，除了直线形以外，还有由各种各样曲线所组成的．例如：翻开我们伟大祖国的地图，可以看到，我们的国境线，我们各省、市、自治区的境界线，都不是单纯由线段构成的，而是由弯弯曲曲很不规则的曲线组成的；又如人造地球卫星轨道，行星运行轨道，炮弹射出后所走的轨道等等，也都是各种曲线组成的，不过，它们比地图上的曲线稍许规则些．现实生活和生产斗争中既然碰到一些由曲线组成的几何图形，为了发展生产，进一步进行理论的研究，我们就有必要在掌握直线形基本性质的基础上，来学习有关曲线形的知识．

那末，什么是曲线呢？可以由下面的例子通俗地解答这个问题：在一块平地上，有一个蚂蚁，如果它保持向一个方向爬去，则它所走的路线是一段直线，如图 0－1（a）；但如果它爬到某一点时突然转个方向，再保持向这个方向一直爬去，则它所走的路线是由两条线段组成的，如图0-1（b）；如果这个蚁蚂在前进时，随时随地都在转弯，都在改变方向，它走的路



(a)

(b)

(c)

图 0-1

线如图0-1(c)那样，我们说，它走的路线是一条曲线．路线(a)叫做直线，路线(b)叫做折线，路线(c)叫做曲线．所以，转弯并不是曲线的特征，只有连续不断地、随时随地地转弯，才是曲线的特征．通俗地说：弯曲是曲线的特征，而折断不是曲线的特征．

拿两根同样长度的铁丝，如图0-2(a)，把它们合并在一起，紧贴在平面上，然后用手在相同长度上给予相同的弯曲方法，则这两条铁丝就变成两条曲线，如图0-2(b)．这两条曲线在对应相同长度的地方有同样的弯曲程度，因此，它们在对应长度相同的地方都可以重合起来，结果，整个可以重合起来．但是，如果把其中一条倒过来就不一定再能和另一条重合了．这就给我们一个印象：平面上两条曲线如果在对应相同长度的地方具有相同的弯曲程度，则它们一定是可以重合的．在几何中，凡是可以重合的图形，都作为具有相同性质的．这样一来，就可以看到，一条平面曲线最基本的性质是由它在每一点的弯曲程度决定的．

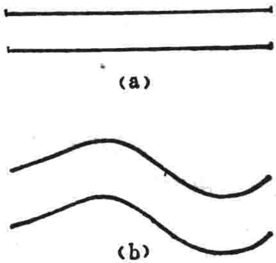


图 0-2

什么叫"弯曲程度"呢？现在我们再取两根不同长度的铁丝，如图0-3(a)，如果把它们都弯成圆形，得到如图0-3(b)的大小两个圆，原来对应长度相同的两个B点，在小圆上弯子就转得快些，在大圆上弯子就转得慢些．这又给我们一个印象：小的圆弯曲程度比大的圆弯曲程度要大些．

对同一个圆说，如果我们取下它的某一段弧，如图0-4中的AB弧，把它移到同圆中的其他另一部分CD弧上，适当放置后，都是能重合起来的．这表示：同一个圆上任何点的弯曲

程度是一样的.

这样一来，就可以用圆作为衡量弯曲程度的标准了. 从这个观点看来，圆是最简单的曲线，又是进一步研究其他曲线的

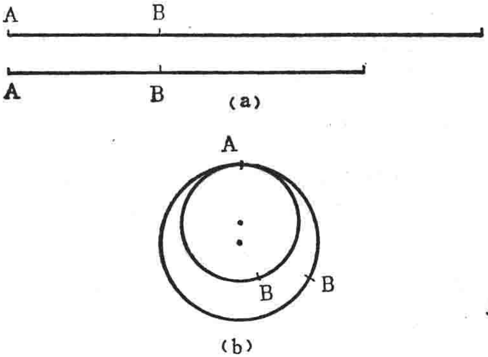


图 0-3

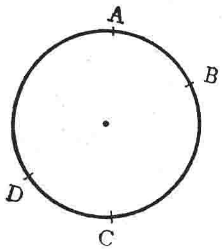


图 0-4

基础. 至于怎样表达“弯曲程度”这个量，不属初等几何的范围，这里就不讲了.

太阳、满月、车轮等等，都给我们以圆的形象，因此，圆是大家所熟知的图形. 从上面的讨论中可以看到，圆的一部分可以和自己的任意另一部分重合起来，这一性质和直线的性质相同；但也有不同的地方：直线的一段放在直线的另一段上，当两手捏住它的两端点任意旋转一下，仍然可以重合，圆弧和圆弧的重合就没有这么自由了，它要在一定的放置方法下才能重合；而一般的曲线，这一段和另一段一般说来，不管你怎么放都是不会重合的，这是因为它们的弯曲程度随时在改变，而圆的弯曲程度，一直是不变的缘故.

在中学平面几何中所应用的方法一般叫做初等数学的方法，它适用于研究一些相对静止的，孤立不变的问题，而在研

究随时随地在变化的问题时，就感到非常不便．因此，对一般曲线，由于它的弯曲程度随时在变化，用平面几何的方法去研究就非常困难．这样，就规定我们在中学平面几何中所研究的曲线只能限于最简单但又是最基础的曲线——圆了．

在我们这本小册子里，有一部分内容，作为启发读者能较深入地去研讨有关问题，还有一部分内容，可作为参考，这两部分内容，都用较小号的字排印，附在有关部分的后面．对于初次学习几何的读者，或者只希望粗略了解中学几何内容的人，这一部分和第三章，均可略去不读．

在每一小节后面，附有适当的练习题；在每一章后面，附有一定数量的总练习题，这些都是向读者提供的基本习题．最后还附有适量的综合题，这是难度稍高一点的题目，可供参考用．所有以上习题都附有答案或简单提示，但答案和提示只代表一种解法，读者还可以找出其他解法或更好的解法．

另外，在有关节次后面，还附有一些思考题，对这些题不再另附答案．

如上所述，"圆"是最简单的曲线，是用初等方法比较容易研究的一种曲线，也是中学平面几何中研究的唯一的一种曲线；但另一方面，它是衡量其他曲线的弯曲程度的标准，因而也是比较重要的一种曲线．所以，我们学好了、熟练地掌握了有关圆的基本性质，也就为进一步学习其他曲线打下了基础，让我们好好地来学习"圆"吧．

第一章　圆

§1　圆的基本性质

1.在对大量事物观察、比较、分析后，可以得到圆的概念，圆的特点就是它的周界上的点，到圆心的距离都相等．各种车辆的轮子，都是圆形，就是利用圆的这个特点．我们把车轴安置在圆心上，这样，当车子前进时，车身到地面的距离就会保持不变，车子也就保持平稳前进．由这些事实，我们可以归纳出圆的概念：

定义　在平面上到一个定点O的距离都等于一个定长R的点的集合(或轨迹)所组成的图形叫做**圆**．定点O叫做**圆心**，定长R叫做圆的**半径**．

说得清楚些，应当是：到O点的距离都等于R的那些平面上的点所组成的曲线叫做圆周，圆周所包围的平面上的区域叫做**圆面**．但在一般情况下，我们就把圆周简单地叫做圆．由此可知，一个圆的大小和位置由它的圆心位置和半径的长短完全确定．因此，当我们说“已知一个圆”时，就是指知道了它的圆心位置和半径的长度．

2.一条直线上的点有无限多个，但是，当我们知道了它上面的两个点的位置时，这条直线也就完全确定了．对于圆，情况又怎么样呢？让我们逐步分析一下．

首先，在平面上给定了一点A，要作一个圆，让它通过A

点，这样的圆的位置和大小，显然是不能确定的．如图 1-1，在平面上随意选一点 B，以 B 为圆心，以 AB 的长为半径的圆都通过 A 点．所以，平面上任何一点(除去 A 点)都可以选作这种圆的圆心，因此，作这种圆是很自由的，可以说，平面上有无穷多个圆通过 A 点．

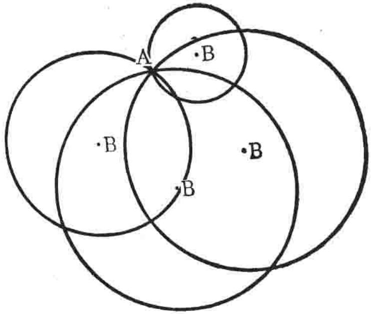


图 1-1

如果我们从 A 点出发，任作一射线 l，如图 1-2，当我们的圆心 B 点只在 l 上选取时，就得到一系列大小不等、圆心排在射线 l 上的圆．当 B 点愈向 A 移动时，所得到的圆就愈小．如果 m 是通过 A 点和 l 垂直的直线，则可以看到，当 B 点愈靠近 A 点时，所作的圆在 A 点旁边离开 m 愈快；当 B 点愈远离 A 点时，所作的圆在 A 点旁边就愈向 m 靠近．在这样的一系列的圆中，没有最大的圆，也没有最小的圆．当 B 点向 A 接近或远离 A 的两个极端方向发展时，所得的圆就逐渐缩小变为一点，或逐渐展平变为直线．因此，有时为了便于研究连续变化的图形，我们把点和直线都看作特殊的圆．这样一来，我们就可以说：点是半径长度为零的圆，直线是半径长度为无限的圆．

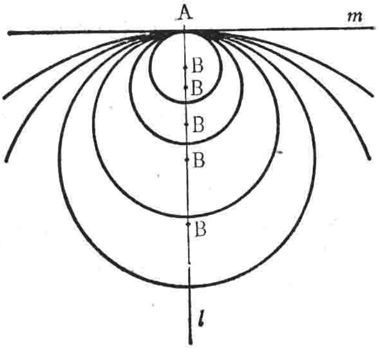


图 1-2

现在，我们在平面上给定两个不同的点A和B，如图1-3，要作一个圆，使它通过A点和B点．我们知道，这个圆既然要通过A点和B点，就是说，这个圆的圆心到A点和B点必然等距离，因此，圆心只能落在线段AB的垂直平分线l上．反过来，在l上任意取一点O，则$OA=OB$，所以以O为圆心，OA为半径的圆就一定通过A点和B点．显然，这样的圆也有无限多个，不过它们的圆心没有太多的自由了，它们不能在平面上任意取，只能在l上取．在这些圆中，有一个最小的，就是以AB的中点M为圆心，以AM为半径的圆．

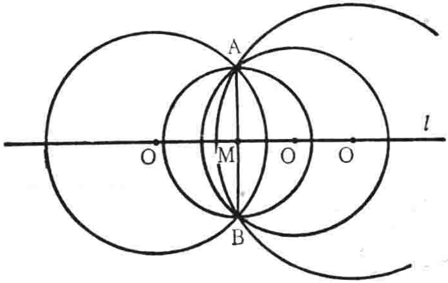


图 1-3

我们看到，通过平面上一点的圆有无限多个，通过平面上两点的圆也有无限多个，但这两个无限多却大不一样．为了区分这两个无限多的不同，我们把直线上点的个数记为∞^1或∞个，把平面上点的个数记为∞^2个，因此，我们可以说，在平面上通过一点的圆有∞^2个，通过两点的圆有∞个．

最后，我们在平面上给定三个不同的点A、B和C，如图1-4，要作一个圆，使它通过A、B、C三点．因为这个圆要通过A、B两点，根据上面讨论，它的圆心必定在AB的垂直平分线l_1上；同理，这个圆要通过B、C两点，它的圆心又必定

在 BC 的垂直平分线 l_2 上．因此，我们要作的圆，它的中心是 l_1 和 l_2 的交点．由于 A、B、C 三点是平面上不相同的三点，所以 l_1 和 l_2 是两条不相同的直线，它们的位置关系只有两种可能：(1) l_1 和 l_2 相交，这时它们的交点 O 唯一地被确定了．而且因为 O 在 l_1 上，所以 $OA=OB$；又 O 在 l_2 上，所以 $OB=OC$，由此得到 $OA=OB=OC$，所以，O 也必然在 AC 的垂直平分线上．以 O 为中心，以 OA 为半径的圆就是所要求的圆，它是完全被确定下来了．(2) 如果 l_1 平行 l_2，则可以看到（图 1－5），这时 A、B、C 在同一直线上．在这样情况下，要求作的圆的圆心找不到，所以过 A、B、C 的圆就作不起来．

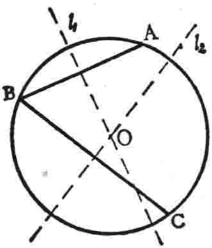


图 1-4

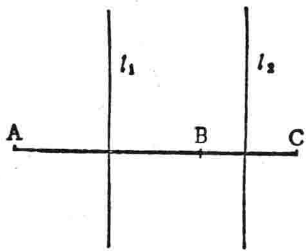


图 1-5

通过以上讨论，我们可以得到

定理 过平面上不在一直线上的三点，可以作一个圆，而且只能作一个圆．

所以我们说：不在一直线上的三点确定一个圆．从以上讨论，也容易得到下面结果．

定理 任一个三角形 ABC 的三边 AB、BC、CA 的垂直平分线，一定交于一点．这点叫做三角形的**外心**．习惯上用 O 表示 $\triangle ABC$ 的外心．

三角形的这一性质，在《直线形》中已经知道了．以三角形 ABC 的外心 O 为中心，以 $OA(=OB=OC)$ 为半径的圆通过 A、B、C 三点，称为三角形 ABC 的**外接圆**，三角形 ABC 叫做这个圆的**内接三角形**.

因此，我们知道：任意三角形都有一个外接圆.

在《直线形》中，我们已经知道三角形的中位线平行于第三边，如图1－6，设 M、N、P 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点，则三角形 MNP 的三边 MN、NP、PM 分别平行于 AB、BC、CA，所以 $\triangle ABC$ 的 BC 边的垂直平分线 MO 也垂直 PN，因而它是 $\triangle MNP$ 的 PN 边上的高；同理，$\triangle ABC$ 另两边的垂直平分线 NO 和 PO 分别为 $\triangle MNP$ 的边 PM、MN 上的高．这样一来，$\triangle ABC$ 的三边的垂直平分线，就转化为 $\triangle MNP$ 的三边上的高线，因此，我们推得

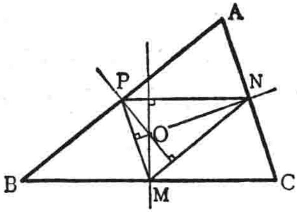


图 1-6

定理　任一三角形的三边上的高线交于一点.

证明　这个证明过程只不过是上面分析的倒推过程.

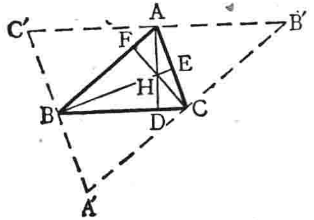


图 1-7

如图1－7，设 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三边上的高，过 A 点作 BC 的平行线 $B'C'$，过 B 点作 AC 的平行线 $A'C'$，过 C 点作 AB 的平行线 $A'B'$，所作的三条平行线分别交于 A'、B'、C'，得到三角形 $A'B'C'$.

由于作法，知道 $AC'BC$ 是

平行四边形，$AB'CB$ 也是平行四边形，所以 $AC'=BC=AB'$，即 A 点是 $B'C'$ 的中点. 且 $AD\perp B'C'$（$\because AD\perp BC$，又 $BC\parallel B'C'$）. 所以 AD 是 $B'C'$ 的垂直平分线；同理，BE、CF 分别为 $C'A'$ 和 $A'B'$ 的垂直平分线，因此，AD、BE、CF 是 $\triangle A'B'C'$ 三边的垂直平分线. 根据上一定理，知道它们交于一点.（证毕）

定义 三角形 ABC 的三边上的高的公共点称为三角形 ABC 的**垂心**. 垂心习惯上用 H 表示.

3. **定义** 连接圆 O 的圆周上任意两点的线段叫做圆 O 的**弦**；过圆心 O 的弦叫做圆 O 的**直径**；从圆心 O 到弦的距离叫做**弦心距**.

例如在图 1－8 中，AB、CD 都是圆 O 的弦，OM、ON 分别是它们的弦心距；EF 是圆 O 的一条直径. 容易看到，直径的弦心距是零，直径是最长的弦，直径的长度是半径的两倍.

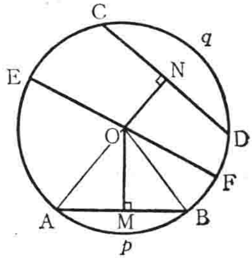


图 1-8

定义 圆周的一部分叫做**弧**. 大于半圆周的弧叫**优弧**，小于半圆周的弧叫**劣弧**.

例如，在图 1－8 中从 A 经过 p 到 B 这一段圆周称为弧 AB，记作 $\overset{\frown}{AB}$. 一般，如果没有特别说明，我们所说的弧都指劣弧部分. 例如 $\overset{\frown}{AB}$ 是指 $\overset{\frown}{ApB}$ 部分，$\overset{\frown}{CD}$ 是指 $\overset{\frown}{CqD}$ 部分.

定义 顶点在圆心的角叫做**圆心角**（或**中心角**）. 如图 1-8 中的 $\angle AOB$.

有了以上一些基本概念，我们很容易得到以下一系列结论：

定理 圆关于它任一条直径是对称的.

定理 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这弦所分划

的两条弧.

定理 弦的垂直平分线必定通过圆心.

定理 在同圆或等圆中，如果两圆心角相等，则它们所对的弧也相等；所对的弦也相等；对应的弦心距也相等.

定理 在同圆或等圆中，如果两弧相等，则它们所对的圆心角也相等；所对的弦也相等；所对应的弦心距也相等.

定理 在同圆或等圆中，如果两条弦相等，则它们所对的圆心角也相等；所对的弧也相等；所对应的弦心距也相等.

定理 在同圆或等圆中，如果两条弦对应的弦心距相等，则两条弦也相等；所对的圆心角也相等；所对的弧也相等.

定理 在同圆或等圆中，如果两个圆心角不等，则大的圆心角所对的弧也较大；大的圆心角所对的弦也较大，而对应的弦心距反而较小.

注意：以上定理中所说的弧都指劣弧而言，因而所说的圆心角都指小于180°的角而言. 当然，有些定理对优弧及超过180°的圆心角也是成立的.

以上这些定理的证明由读者自己完成.

在命题的结构形式的研究中，我们知道，如果把一个命题的假设和结论部分对换，则得到它的逆命题. 但是，当一个命题的假设部分或结论部分不止一条时，则一个命题就可能出现好几个逆命题. 这样的命题我们称之为复杂的命题. 例如，上面一连八个命题中，第四个命题就是一个复杂的命题，而第五、六、七命题都可以看作它的逆命题. 第八个命题是第四个命题的否命题，读者试把第五、六、七命题对应的否命题补充出来.

例 1 证明：圆内两条平行弦所夹的两段弧相等.

如图1－9，已知 AB 和 CD 是圆 O 的两条弦，并且

$AB \parallel CD$，求证 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

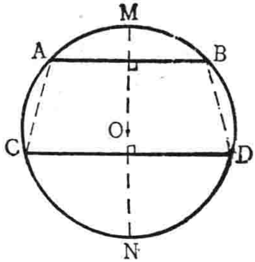


图 1-9

证明： 过圆心O作直径$MN \perp AB$，则$MN \perp CD$. 根据前面定理知：$\overset{\frown}{CAM}=\overset{\frown}{DBM}$，$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，相减即得：$\overset{\frown}{CAM}-\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{DBM}-\overset{\frown}{BM}$，即$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.（证毕）

从这个性质即刻得到

推论： 圆内接梯形是等腰梯形.

从图 1-9 可以看到，如果 $ABDC$ 是圆O的内接梯形，$AB \parallel CD$，则知$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，所以 $AC=BD$，即 $ABDC$ 是等腰梯形.

例 2 过圆内一点的所有弦，以垂直于过这点半径的弦为最短.

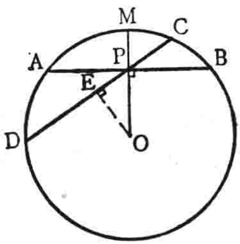


图 1-10

如图 1-10，设P为圆O内一已知点，OM为过P点的半径，$AB \perp OM$于P，又CD为过P点的另外任一弦，则$CD>AB$.

证明 作$OE \perp CD$，E为垂足，则$\triangle OPE$是直角三角形，OP为斜边，所以$OP>OE$. 由于OP和OE分别为AB和CD弦的弦心距，所以$CD>AB$.（证毕）

例 3 求证：过圆周上一点的所有弦的中点的集合是以过这点的半径为直径的圆.

如图 1-11，设P是圆O上一已知点，过P点作圆O的所