经济管理学术文库·金融类

Choquet积分和集值Choquet积分及其在金融中的应用

On Choquet Integral and Set-Valued Choquet Integral with Their Applications in Finance

王洪霞／著

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

经济管理学术文库 • 金融类

Choquet积分和集值Choquet积分及其在金融中的应用

On Choquet Integral and Set-Valued Choquet Integral with Their Applications in Finance

王洪霞 / 著

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

Choquet 积分和集值 Choquet 积分及其在金融中的应用/王洪霞著. —北京：经济管理出版社，2015.9
ISBN 978-7-5096-3888-0

Ⅰ. ①C… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①微积分—应用—金融学—研究 Ⅳ. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 204866 号

组稿编辑：王格格
责任编辑：张 艳 王格格
责任印制：黄章平
责任校对：车立佳

出版发行：经济管理出版社
（北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 A 座 11 层 100038）
网 址：www. E-mp. com. cn
电 话：（010）51915602
印 刷：北京九州迅驰文化传媒有限公司
经 销：新华书店
开 本：720mm×1000mm/16
印 张：9.5
字 数：210 千字
版 次：2015 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5096-3888-0
定 价：42.00 元

前　言

在许多对于经济、金融问题的研究中，经常会遇到不能用传统的可加测度与线性期望理论解释的问题。为此，非可加的容度和非线性的 Choquet 积分理论越来越受到人们的重视。本书的主要目的是进一步完善 Choquet 积分和集值 Choquet 积分理论，并研究其在金融中的应用。

本书主要包括四部分内容。第一部分是关于容度和 Choquet 积分的几个理论成果。迄今为止关于条件 Choquet 期望的研究成果很少，本书首先研究凹容度的性质，并且给出几种有用的凹容度。在此基础上，在凹容度情形下给出条件 Choquet 期望的定义，证明其具有正时齐性、转移不变性、非对称性、次可加性和单调性，并进而给出条件 Choquet 期望的 C_r 不等式、Jensen 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。接着，研究了上、下概率，这里的上、下概率是风险中性测度集的上、下确界，我们利用倒向随机微分方程的知识得到了上、下概率满足的几个不等式。进一步地，将研究关于 bi-capacity 的 Choquet 积分，此积分是 Choquet 积分的一个推广，可用来解释 Grabisch 在 2006 年研究多准则决策问题时提出来的一个新的悖论。

第二部分内容是关于 Choquet 积分在应用方面的两个成果。一方面讨论容度下的不确定性风险厌恶的问题。首先利用 Choquet 期望值和 Choquet 方差给出不确定性风险溢价的概念，其次利用 Choquet 积分的性质和 Jensen 不等式给出不确定性风险溢价的估计。特别地，给出了扭曲概率下的不确定性风险厌恶的简单形式和例子。另一方面讨论一种特殊的扭曲概率，即 Wang 变换在期权定价中的应用。我们利用 Wang 变换给出了欧式期权的定价公式。

第三部分是关于集值 Choquet 积分，即集值随机变量关于容度的积分的研究。首先研究的是集值 Choquet 积分的一些性质，然后将容度空间上随机变量序列的几乎处处收敛、几乎一致收敛、依容度 μ 收敛和依均值收敛的概念，推广到

关于集值随机变量序列的收敛情形，进而得到容度空间上集值随机变量序列的 Egoroff 定理、Lebesgue 定理和 Riesz 定理，还将给出容度空间上集值随机变量序列的一致可积的概念。其次，证明集值 Choquet 积分序列的 Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理，以及单调收敛定理。最后，基于 Choquet 可积有界集值随机变量关于容度的积分，提出了一个新的风险度量方式，利用上海证券交易市场的股票数据对各种风险度量做了最优资产组合选择的实证分析比较，说明此风险度量方式是可行的和有效的。

第四部分内容是集值容度以及关于集值容度的 Choquet 积分。集值容度不仅是单值容度的推广，也是一维情形下的集值测度的推广。本部分讨论集值容度的一些性质，并给出集值容度的选择集的概念；然后基于集值容度的选择集，给出关于集值容度的 Choquet 积分的概念，并研究其性质。

符号表

$\equiv$	恒等于
P	概率测度
R	实数集
$\mathcal{P}_0(R)$	实数集的非空子集的全体
K(R)	实数集闭子集的全体
$\mathcal{P}_k(R)$	实数集的非空紧子集的全体
$\mathcal{P}_c(R)$	实数集的非空凸子集的全体
$\mathcal{P}_{kc}(R)$	实数集的非空紧凸子集的全体
N	自然数集
E_P	关于 P 的数学期望
E_μ	关于容度 μ 的 Choquet 期望
2^Ω	集合 Ω 的幂集
$N(\mu,\sigma^2)$	均值为 μ，方差为 σ^2 的正态分布
Φ	标准正态分布函数
I_A	示性函数
a.e.	几乎处处
$A_n\uparrow A$	集合序列 A_n 单调递增趋近于 A
$A_n\downarrow A$	集合序列 A_n 单调递减趋近于 A
A_c	集合 A 的余集

目 录

第1章　绪论

容度和容度下的 Choquet 积分是概率测度和数学期望的自然推广。Choquet 积分在金融、经济、多目标决策、保险等许多领域都有很广泛的应用。

集值随机变量既能描述事物发展的随机性质，又能描述事物发展状态的不确定性，这种双重性质让集值随机变量成为数理经济学研究中的一个重要工具。尝试将集值随机变量同 Choquet 积分理论联系起来，研究集值随机变量的 Choquet 积分是对 Choquet 积分理论的进一步推广，进而研究此推广积分的性质和应用，将是一个很有价值的课题。

1.1　Choquet 积分的研究现状及问题

众所周知，经典概率测度的理论体系已经趋于完善，它在经济、信息、工程控制等领域有着广泛的应用。基于经典的概率测度与数学期望建立起来的 von Neumann-Morgenstern 期望效用理论（EU）[1] 在 20 世纪五六十年代盛行的数理经济学理论中起着重要作用。然而在人的行为起主导作用的经济市场、金融市场、保险等领域中，许多现象用经典概率并无法解释。现实生活中存在着许多非可加的现象，例如，在北京市场上 1 斤鸡蛋卖 5 元，如果买 5 斤可能只需要付23 元；买 10 斤则可能只需要付 45 元。建立在经典概率与线性期望基础上的期望效用理论的最著名的悖论就是 Allais 悖论 [2] 和 Ellsberg 悖论 [3]，简单叙述如下：

所谓 Allais 悖论出自下面两对关于抽奖形式的描述。假定状态空间中一共有三个状态——0M、100M、500M，其中 M 表示 1 万美元。对应于上述三个状态，

Allais 设计如下两对抽奖 A 和 B，C 和 D：

$$A=\left\{0,\ \frac{89}{100};\ 100,\ \frac{11}{100};\ 500,\ 0\right\}$$

$$B=\left\{0,\ \frac{90}{100};\ 100,\ \frac{0}{100};\ 500,\ \frac{10}{100}\right\}$$

$$C=\{0,\ 0;\ 100,\ 1;\ 500,\ 0\}$$

$$D=\left\{0,\ \frac{1}{100};\ 100,\ \frac{89}{100};\ 500,\ \frac{10}{100}\right\}$$

其中抽奖 A 表示抽到 0M 的概率是 $\frac{89}{100}$，抽到 100M 的概率是 $\frac{11}{100}$，抽到 500M 的概率是 0；其他抽奖形式可类似理解。当用 A，B 和 C，D 分别对实验对象进行测试时，结果为 B＞A 和 C＞D。根据 von Neumann–Morgenstern EU 理论，则存在一个效用函数 U，使得：

$$0.1U(500)+0.9U(0)>0.11U(100)+0.89U(0)$$

$$U(100)>0.01U(0)+0.89U(100)+0.1U(500)$$

整理上述两式，发现两者互相矛盾，这就是违背 EU 理论的 Allais 悖论。

再看另一个用期望效用理论不能解释的 Ellsberg 悖论[3]：假定一坛中共有 90 个三种颜色的球——30 个红色的球，其他是黑色和白色的球，但是黑色球和白色球的具体数量未知。如果从中任意抽取一个，则它肯定是三种颜色中的一个。设计如下四种赌博方式：

单位：万美元

	红球（R）	黑球（B）	白球（W）
l_1	100	0	0
l_2	0	100	0
l_3	100	0	100
l_4	0	100	100

其中 l_1 表示当抽取的是红球时，实验对象会得到 100 万美元，其他情形可类似理解。当分别提供 l_1，l_2 和 l_3，l_4 对实验对象进行测试时，结果分别为 $l_1>l_2$ 和 $l_4>l_3$。这表明：

$$\begin{aligned}U(100)P(B)&=U(100)(P(\{B,\ W\})-P(\{W\}))\\&>U(100)(P(\{R,\ W\})-P(\{W\}))=U(100)P(R)\end{aligned}$$

此与 $l_1>l_2$ 矛盾。这就是违背 EU 理论的 Ellsberg 悖论。

在经济理论中，Allais 悖论和 Ellsberg 悖论是困扰经济学家多年的问题。所以在这种背景下，发展非线性期望理论成为必然。Allais 悖论和 Ellsberg 悖论均表明：在经济决策中我们要注意非可加不确定性问题。为此，首先要弱化概率公理化刻画中可加性的条件。这恰好可以由 Choquet 在 1953 年提出的非可加的测度，即容度[4] 概念来解释。有了容度的定义之后，Choquet 又接着考虑了有界随机变量关于容度的积分，即 Choquet 积分。Choquet 积分不满足可加性，它是非线性积分，容度和 Choquet 积分是经典概率测度和数学期望的自然推广。国内外越来越多的学者开始发展容度和 Choquet 积分理论，并且研究了 Choquet 积分在经济、金融、决策理论等领域中的应用。

在 Choquet 积分理论方面，1982 年 Greco[5] 首次讨论了 Choquet 积分的表示定理，探讨了一个泛函在什么条件下可表示为 Choquet 积分。1986 年 Schmeidler[6] 在论文“Integral Mathematical Representation without Additivity”中对 Choquet 积分的表示定理有了更新的研究成果。宋永生和严加安（2006[7]，2009[8]）在更弱的条件下讨论有关 Choquet 积分的表示定理。Radon-Nikodym 定理在经典概率论中的作用很重要，有关 Choquet 积分框架下 Radon-Nikodym 定理的讨论可见 Graf（1980）[9]。单调收敛定理、Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理在 Choquet 积分框架下成立需要一定的条件，具体可见 Denneberg（1994）[10]。1997 年 Ghirardato[11] 指出，针对一类特殊函数，即切面共单调（slice-comonotonic）函数，关于容度的 Fubini 定理仍然成立。关于容度的大数定律，Maccheroni 和 Marinacci（2005）[12] 利用集值随机变量的分布与 Choquet 容度的关系，给出了容度下的独立同分布随机变量序列的大数定律，大大简化了 Marinacci 在 1999 年对该定理的证明。陈增敬（2010）[13] 在不同的独立条件下得到了更广泛的容度下的独立同分布的强大数定律与重对数律，证明了中心极限定理（2011）[14]。陈增敬（2005）[15] 研究了上、下概率满足的不等式，这里的上、下概率是先验概率测度集的上、下确界，他在文中给出了次凹容度的概念，并指出上、下概率是一对次凹容度。Mesiar（1995）[16] 和 Klement，Mesiar 和 Pap（2010）[17] 讨论了 Choquet 积分的推广积分 Choquet-like 积分。目前，如何合理定义条件容度和条件 Choquet 积分是一个困扰研究者的问题，关于这方面的文献有 [18-23]。

在应用方面，1973 年 Huber（1973）[24] 利用 Choquet 积分理论去解释稳健 Bayesian 推断的含义，Wasserman 和 Kadane（1990）[25] 证明了容度的 Bayes’定

理。关于 Choquet 积分在统计方面应用的综述文章可见 Wasserman（1990）[26]。1989 年 Schmeidler [27] 在论文"Subjective Probability and Expected Utility without Additivity"中将主观概率及容度引入经济的研究中，提出了非可加测度框架下的 Choquet 期望效用理论（CEU），给出了该理论的公理化刻画，为经济理论的研究提供了一种全新的方法。关于这方面的文献还可参考 Quiggin（1993）[28] 和 Yaari（1987）[29]。在 Choquet 期望效用理论下，王增武和严加安（2007）[30] 给出了 Allais 悖论和 Ellsberg 悖论的合理解释。Grabisch 和 Labreuche（2008）[31] 得到了关于 Choquet 期望效用理论的较好的结果。2005 年陈增敬 [32] 在论文"Choquet Expectation and Peng's g-expectation"中讨论了数学期望的两种推广——Choquet 期望和 g 期望。在文献 [27] 中，Schmeidler 还给出了不确定厌恶的定义；Epstein（1999）[33] 基于偏好关系给出了特殊容度下的风险厌恶的定义及其一些刻画。宋永生和严加安（2006 [7]，2009 [8]）用 Choquet 积分对风险度量的公理化系统进行了修改刻画。Chateauneaf 等（1996）[34] 首次明确指出利用 Choquet 积分进行定价。Chen 和 Kulperger（2006）[35] 讨论了上（下）Choquet 定价和最大、最小定价之间的关系。扭曲概率是介于概率测度和容度之间的一种特殊容度，此类容度在保险领域中有重要的应用。Wang 等（1997）[36] 基于扭曲概率，即 Wang 变换（Wang transform）首次给出保费原理在风险意义下的公理化刻画。Schied（2006）[37] 研究了不确定意义下的最优投资问题。Jin 和 Zhou（2008）[38] 在完备的连续市场情形下讨论了行为投资组合问题。他们假设资产过程服从一般的伊藤（Itô）过程，投资者偏好满足累积展望理论的三个特征，首次提出分而治之的想法，对原始优化问题分解为分别关于相对和损失的正部和负部问题，并提出了分位数方法来攻克概率扭曲这个难点。他们得到了与在传统的期望效用理论下不同的最优投资组合，投资者将接受在熊市情形下的一个固定的损失，借此获得在牛市情形下的收益。Choquet 积分理论在多目标决策中有很重要的应用，Grabisch（1996）[39] 首次采用 Choquet 积分代替原来的加权平均，来处理多准则决策问题。然而，2006 年，Labreuche 和 Grabisch（2006）[40] 在研究多准则决策问题时提出了一个用 Choquet 积分也无法解释的悖论，为了解释这个悖论，进而提出了关于 bi-capacity 的 Choquet 积分。此外，Choquet 积分理论在金融经济学中也有非常重要的应用：如不确定占优 [41]、博弈论 [42]、最优合同问题 [43] 等。Choquet 积分理论及其他方面的应用，请参见文献 [44-46]。

关于 Choquet 积分理论及其应用的文献已有很多，但到现在为止关于容度的条件期望及其性质的研究还很少见，一些特殊容度比如凹容度、上概率、下概率、扭曲概率等的性质和应用需进一步研究，在容度框架下的风险厌恶问题还有待进一步深入研究。这都是本书所要研究的内容。

1.2 集值随机变量及其研究现状

集值随机变量就是以 n 维欧式空间或 Banach 空间上的集合为值的随机变量。不同于普通的随机变量，它既描述了客观事物发展的随机性，又描述了事物发展状态的不确定性。这种不确定性反映出主观上的宽容性和客观上不可掌握的可变性，特别在经济、金融领域内最为明显。因此，研究集值随机变量不仅有理论上的重要价值，而且对于金融系统、随机控制系统等现实问题也有着重要意义。

Aumann (1965) [47] 从单个人的动因对经济分配影响的角度引进了集值映射的积分的定义和性质。Vind (1964) [48] 在一篇经济学文章中从群体效应出发引进了集值测度，它是以 Banach 空间的子集为值的测度。法国学者 Custem (1969) [49] 提出了紧凸集值鞅的概念，Debreu (1970) [50] 给出了集值映射的 Radon-Nikodym 定理，从而建立了两种经济观点之间的联系。由于 Debreu 把两种不确定性用量化形式描述出来，应用现代数学手段，建立了经济模型的一般均衡理论，使他在 1983 年获得了诺贝尔经济学奖。Artstein (1972) [51] 系统地研究了集值测度。Kendall (1973) [52] 用强关联函数研究了随机集，即可测集值映射，特别是严格证明了随机集的分布与可测集值映射的对应定理。日本的 Hiai 和 Umegaki (1977) [53] 给出了闭集值随机变量的条件期望的概念。Neveu (1972) [54]，Hess (1991) [55]，Luu (1984 [56]，1985 [57])，Papageorgiou (1987) [58]，李寿梅和 Ogura (1998 [59]，1999 [60]) 分别在不同的条件下讨论了集值鞅、上鞅与下鞅的收敛性。李寿梅和关丽 (2007) [61] 对集值渐近鞅的分解和收敛性进行了研究。张文修、李寿梅等 (2007) [62] 对集值随机过程进行了研究。Taylor 和 Inoue (1985) [63]，李寿梅，Ogura，关丽等 (2003 [64]，2006 [65]，2008 [66]) 研究了集值随机变量序列的大数定理与中心极限定理。2002~2005 年，Miranda，Couso

和 Gil [67-69] 研究了由集值随机变量产生的上、下概率所包含的信息与集值随机变量的选择集所产生的概率分布集包含的信息之间的关系。李俊刚和李寿梅（2008 [70]，2009 [71]），张金平和李寿梅等（2009 [72]，2009 [73]）研究了集值随机过程的 Lebesgue 积分、Itô 积分及集值随机微分方程。

1.3 关于集值 Choquet 积分理论的发展现状及问题

集值随机变量关于容度的积分简称为集值 Choquet 积分，集值 Choquet 积分可以用来描述现实生活中许多复杂的不确定现象。

对于集值 Choquet 积分的研究仅有少许几篇文章。Jiang 等（1997）[74] 介绍了集值 Choquet 积分的概念，并且讨论了此类积分的一些性质。Jiang 等（2003 [75]）研究了集值 Choquet 积分序列的上、下极限。Zhang 等（2004 [76]）指出并修正了上述文献中的一些错误，并且证明了关于 m-连续和连续的容度的集值 Choquet 积分序列的 Kuratowski 收敛定理。

但到目前为止，关于集值 Choquet 积分序列的 Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理以及单调收敛定理成立的条件太强，集值 Choquet 积分的性质还需进一步研究，关于集值 Choquet 积分在金融中应用的研究几乎还是空白。

1.4 本书内容及结构

尽管关于 Choquet 积分理论的研究已有大量的结果，但在其理论、应用和推广方面还需进一步研究。

论文的内容安排如下：

第 2 章在容度和 Choquet 积分的框架下进一步讨论几个理论问题。首先在回顾容度和 Choquet 积分的基本定义与性质的基础上研究凹容度的性质，并给出几

个特殊的凹容度的例子。其次在凹容度情形下给出条件 Choquet 期望的定义，研究其性质；证明条件 Choquet 期望的 C_r 不等式、Jensen 不等式、Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。关于上、下概率的几个研究结果是在第 2.4 节给出的，这里的上、下概率是指风险中性测度集的上、下确界，是特殊的容度。第 2.5 节将研究关于 bi-capacity 的 Choquet 积分，此积分可用来解释 Grabisch 在 2006 年研究多准则决策问题时提出来的一个新的悖论。

第 3 章主要给出 Choquet 积分在应用方面的两个成果。第 3.1 节讨论容度下的不确定性风险厌恶的问题，首先利用 Choquet 期望值和 Choquet 方差给出不确定性风险溢价的概念，并利用 Choquet 积分的性质和容度下的 Jensen 不等式给出不确定性风险溢价的估计。因为扭曲概率使用简易，并且在实际中有特殊作用，我们还给出了扭曲概率下的不确定性风险厌恶的简单形式和例子。第 3.2 节讨论 Wang 变换在期权定价中的应用，给出了欧式期权的定价公式。

第 4 章主要讨论集值 Choquet 积分即集值随机变量关于容度的积分的性质、收敛定理及其在风险管理中的应用。第 4.1 节给出一些关于集值随机变量的预备知识。第 4.2 节研究的是集值 Choquet 积分的一些性质。第 4.3 节将研究容度空间上集值随机变量序列的收敛和一致可积，将容度空间上随机变量序列的几乎处处收敛、几乎一致收敛、以容度 μ 收敛和以均值收敛的概念，推广到关于集值随机变量序列的收敛情形，还将给出容度空间上集值随机变量序列的一致可积的概念。第 4.4 节将证明集值 Choquet 积分序列的 Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理以及单调收敛定理。在第 4.5 节，利用 Choquet 可积有界集值随机变量关于容度的积分构建一个新的风险度量方法，并给出实证分析来说明此风险度量方式是可行的和有效的。

第 5 章主要介绍集值容度以及关于集值容度的 Choquet 积分。集值容度不仅是单值容度的推广，也是在一维情形下的集值测度的推广。首先，讨论集值容度的一些性质，并给出集值容度的选择集的概念；其次，基于集值容度的选择集，给出关于集值容度的 Choquet 积分的概念，并研究其性质。