普通高等教育“十五”国家级规划教材

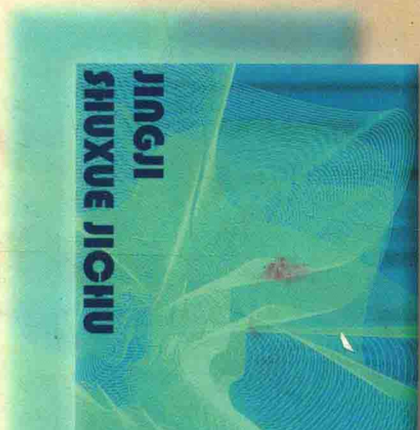
教育部高职高专规划教材

Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

陈光潮 主编

经济数学基础

（下）



中国财政经济出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材
教育部高职高专规划教材

经济数学基础（下）

陈光潮　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础．下/陈光潮主编．—北京：中国财政经济出版社，2002.7

普通高等教育“十五”国家级规划教材．教育部高职高专规划教材

ISBN 7－5005－5853－8

Ⅰ．经…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．①经济数学—高等学校：技术学校—教材②线性代数—高等学校：技术学校—教材③概率论—高等学校：技术学校—教材④数理统计—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 041730 号

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www.cfeph.com

E－mail：cfeph@drc.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

发行电话：88190616　88190655（传真）

北京财经印刷厂印刷

850×1168 毫米　32 开　13.125 印张　309000 字

2002 年 12 月第 1 版　2005 年 1 月北京第 2 次印刷

定价：20.00 元

ISBN 7－5005－5853－8/F·5146

（图书出现印装问题，本社负责调换）

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和专业主干课程。计划先用2～3年的时间，在继承原有高

职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

"教育部高职高专规划教材"是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的，适合高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2000年12月

前　言

本教材是根据《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》中有关高职高专教育要以培养应用型专门人才为根本任务，以适应社会需要为目标，要求培养“德智体美”全面发展的高等技术应用性专门人才的重要精神，遵循教育部制定的经济管理类高职高专教育的培养目标和具体要求编写而成。第一章至第三章由首都经济贸易大学的张全执笔撰写，第四章、第五章由石家庄经济学院的段生贵执笔撰写，第六章至第十章由暨南大学陈光潮执笔撰写。本书具有以下特点：

一、整体设计

力求在体系的设置上体现数学的基础性，在方法的处理上体现数学的工具性，在例子选取上体现数学的应用性。

二、线性代数部分

1. 打破已有教材按照研究对象设置章节的体系，注重矩阵、向量、线性方程组、行列式等之间的内在联系，以它们所具有的逻辑关系为线索展开。

2. 首先掌握线性代数的基本工具——矩

阵与线性方程组，然后通过向量的研究掌握各种研究对象的内在性质及其原因，进而深入学习、理解、掌握线性代数的各种方法。

3. 根据近年来计算机数学软件的发展，对行列式的计算做了淡化处理。

4. 行列式的内容相对独立。教师在使用本教材时，可根据实际情况和具体需要进行选择，甚至可以完全略去行列式的内容，而不影响整个体系的逻辑联系。只是注意，在第四章处理特征值时，将方程组有非零解的充要条件（行列式为零）改为系数矩阵不满秩。

三、概率论与数理统计部分

1. 对于教材内容的论述与表达上，采用了三种策略，其一，在可能的情况下，尽量用通俗的语言代替数学语言或数学的形式表述；其二，数学表述与通俗表述二者兼用；其三，单一的数学表述。

2. 文字通俗，论述简洁。可要可不要的内容，坚决不要，可简可烦的内容坚决从简。

3. 淡化理论证明，强化现实应用。

4. 简化形式表达，强化本质特征和逻辑联系，注重逻辑思维能力的培养与提高。

5. 许多问题的论述从例子开始，由浅入深，由简到难，从实际到理论，又从理论回到实践，注重引导，注重提高思考问题、分析问题、判断问题、解决问题的能力，注重动手能力的培养。

由于作者的水平有限，差错和不当之处在所难免，敬请批评指正。

作者

2002 年 3 月

目　　录

第一章

线性方程组与矩阵初步

内容提示

本章讨论矩阵的概念与基本运算——矩阵加法、数乘矩阵、矩阵的转置与矩阵的乘法；矩阵的分块运算；逆矩阵的概念；矩阵的基本性质．线性方程组的基本性质与求解方法——用增广矩阵的初等行变换求方程组的解．并讨论方程组有唯一解、无穷多组解、无解的条件．

在自然科学、工程技术与管理科学中经常要处理多个参数的问题，这些参数就是变量．变量要受到一些条件的约束，对这些条件进行化简，使它们成为最简单的形式——变量的一次方程，就构成了线性方程组．实际问题中大量的数据通常以矩形表的形式出现，例如，n 个参数的 s 组测量值就是一个 s 行 n 列或 n 行 s 列的矩形表，矩阵就是各种矩形表共有的数学形式．本章研究矩阵的基本运算与基本性质、线性方程组的基本性质与求解方法，这些是研究线性代数的基础，线性代数中很多问题都可以转化为线性方程组的解与矩阵的初等变换，这些将贯穿线性代数的始终，因此这一章是线性代数的基础．

第一节
矩阵及其运算

一、矩阵的概念

在社会经济生活中，人们经常要处理许多数据．这些数据中有相当多是以表格的形式出现的．例如：表 s 是某单位职工的工资表片断，其中每行代表一个职工，每列代表工资中的一项．表 a 是某工厂的一张生产日报表．该工厂有三种产品，由四个班组生产，表的每一行代表一个班组，每一列代表一种产品．

表 s

	基本工资	职务补贴	奖金	生活补贴	书报费	交通费
周华	500	300	200	80	20	10
李雪	500	300	200	80	20	10
王文	600	400	200	80	20	10
张欣	700	500	200	80	20	10
谢方	800	550	300	80	20	10
李宁	700	500	200	80	20	10
邵丽	600	400	300	80	20	10
郭宁	700	500	200	80	20	10

表 a

	产品Ⅰ	产品Ⅱ	产品Ⅲ
第一组	20	12	17
第二组	18	11	18
第三组	22	14	12
第四组	21	13	15

这些表格虽然内容不同，但它们的数据部分都是由若干行与列组成的，因此它们在数学上有许多共性. 我们将这种由行与列组成的数据表称为**矩阵**，通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}\cdots$或（a_{ij}）、（b_{ij}）$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots n$. 表示. 在线性代数中用下面的方法表示矩阵.

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 & 80 & 20 & 10 \\ 500 & 300 & 200 & 80 & 20 & 10 \\ 600 & 400 & 200 & 80 & 20 & 10 \\ 700 & 500 & 200 & 80 & 20 & 10 \\ 800 & 550 & 300 & 80 & 20 & 10 \\ 700 & 500 & 200 & 80 & 20 & 10 \\ 600 & 400 & 300 & 80 & 20 & 10 \\ 700 & 500 & 200 & 80 & 20 & 10 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 20 & 12 & 17 \\ 18 & 11 & 18 \\ 22 & 14 & 12 \\ 21 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{S}$ 代表表 s 的数据，其中第 i 行与第 j 列交叉处 s_{ij} 表示第 i 位职工工资中的第 j 项.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代表表 a 的数据，其中第 i 行与第 j 列交叉处 a_{ij} 表示第 i 个班组生产第 j 种产品的件数.

矩阵中的数称为矩阵的**元素**，通常用带有两个下标的字母 a_{ij}、b_{ij} 表示. 其中第一个下标表示该元素所在的行，称为**行脚标**. 第二个下标表示它所在的列，称为**列脚标**. 用这种方式表示元素的位置类似于电影院用×排×号表示一个座位的位置. 为了说明一个矩阵的形状，我们定义由 m 行 n 列组成的矩阵称为 **m 乘 n 阶矩阵**. 例如 $\boldsymbol{A}$ 是 4 乘 3 阶矩形，可表示为 $\boldsymbol{A}_{4\times3}$；$\boldsymbol{S}$ 是 8 乘 6 阶矩阵，可表示为 $\boldsymbol{S}_{8\times6}$.

a_{i1}，a_{i2}，$\cdots$，a_{in} 称为 m 乘 n 阶矩阵（a_{ij}）的第 i 行. a_{1j}，a_{2j}，$\cdots$，a_{mj} 称为 m 乘 n 阶矩阵（a_{ij}）的第 j 列. 只有一行的矩阵称为**行矩阵**，简称行；只有一列的矩阵称为**列矩阵**，简称

列.

在本课程中，如无特别说明，矩阵的元素都是实数，称为**实矩阵**.

行数与列数相等的矩阵称为**方阵**，n 行 n 列的方阵称为 **n 阶方阵**或 n 阶矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_n$. 方阵中的元素 a_{11}、a_{22}、…、a_{nn} 称为**对角线上的元素**，一般矩阵中的元素 a_{ii} 称为**准对角线上的元素**. 两个行数、列数分别相等的矩阵称为**同型矩阵**，两个同型矩阵如果对应元素相等则称两个矩阵**相等**. 即：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$；$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$. $i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots n$.

如果 $a_{ij}=b_{ij}$ $i=1, 2, \cdots, m$； $j=1, 2, \cdots n$. 则称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

二、矩阵的线性运算

定义 1.1.1 **矩阵的加法** 两个矩阵对应元素相加所得到的矩阵称为这两个矩阵之和. 即：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$；$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，如果 $\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})$，$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots n$.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+2 & 2+3 & 3+5\\ 2+1 & 5+3 & 8+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 8\\ 3 & 8 & 8\end{pmatrix}$$

显然，矩阵的加法只能在同型矩阵中进行.

容易验证：**矩阵的加法满足交换律与结合律**.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**，通常用 $\boldsymbol{O}$ 表示. 显然对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则称 $(-a_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$.

不难看出：$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$. 利用负矩阵，可以定义矩阵的减法：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

定义1.1.2　数乘矩阵　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，k 是个实数，$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})$ 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**，简称**数乘**.

例 2　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 8\end{pmatrix},\quad 3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 6 & 15 & 24\end{pmatrix}$$

容易验证矩阵的数量乘积满足下列性质：

对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}$

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(3) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(4) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

以及 $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$；$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 注意这里等号左边的 0 是实数 0，右边的 $\boldsymbol{O}$ 是零矩阵.

矩阵的加法和数乘称为矩阵的**线性运算**.

三、矩阵的乘法

看本章开始的表 a. 用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示，其中第 i 行表示第 i 个班组；第 j 列表示生产第 j 种产品.

表 a

	产品Ⅰ	产品Ⅱ	产品Ⅲ
第一组	20	12	17
第二组	18	11	18
第三组	22	14	12
第四组	21	13	15

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}20 & 12 & 17\\ 18 & 11 & 18\\ 22 & 14 & 12\\ 21 & 23 & 15\end{pmatrix}$$

表 b

	成本	价格
产品Ⅰ	20	25
产品Ⅱ	30	36
产品Ⅲ	40	50

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}20 & 25\\30 & 36\\40 & 50\end{pmatrix}$$

用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示该厂每一件产品的成本和价格. 它有 3 行 2 列，第 i 行代表第 i 种产品，第一列代表每件产品的成本，第二列代表每件产品的单价.

由这两张表也就是矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，可以计算出该厂每个班组生产一天所消耗的成本与创造的产值. 这组数据用表 **c** 表示，它对应矩阵 $\boldsymbol{C}$.

表 c

	总成本	总产值
第一组	c_{11}	c_{12}
第二组	c_{21}	c_{22}
第三组	c_{31}	c_{32}
第四组	c_{41}	c_{42}

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\\c_{31} & c_{32}\\c_{41} & c_{42}\end{pmatrix}$$

c_{11}表示第一组一天消耗的总成本，它等于第一组生产的三种产品的数量分别乘上这三种产品的成本，也就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行各元素与矩阵$\boldsymbol{B}$ 的第一列各元素的对应乘积之和：

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=20\times20+12\times30+17\times40$$

c_{12}表示第一组一天创造的总产值，它等于第一组生产的三种产品的数量分别乘上这三种产品的价格，也就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行各元素与矩阵$\boldsymbol{B}$ 的第二列各元素的对应乘积之和：

$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=20\times25+12\times36+17\times50$

c_{21}表示第二组一天消耗的总成本，它等于第二组生产的三种产品的数量分别乘上这三种产品的成本，也就是矩阵 **A** 的第二行各元素与矩阵 **B** 的第一列各元素的对应乘积之和：

$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=18\times20+11\times30+18\times40$

……

依此类推：

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}\quad i=1，2，3，4；j=1，2$

是矩阵 **A** 的第 i 行各元素与矩阵 **B** 的第 j 列各元素的对应乘积之和

由此得到**矩阵乘法**的定义：

定义1.1.3

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$是 $m\times n$ 阶矩阵，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$是 $n\times p$ 阶矩阵，

定义 $m\times p$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1P} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix};$$

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$