胡金德 谭泽光 考研数学系列

命题人与阅卷人联袂打造

2016考研数学考前冲刺10套卷

（数学二）

清华大学 胡金德
清华大学 谭泽光
主编

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

2016考研数学

考前冲刺10套卷

（数学二）

清华大学 胡金德
清华大学 谭泽光
主编

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是专门为参加2016年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)的考生量身打造的,是一本为考生在考前冲刺阶段提供检查复习、体验实战、熟悉考情、提高成绩的辅导用书。本书作为本系列丛书的收尾篇,是对考研数学真题的全真模拟。编者从事考研数学辅导工作十多年,对考研真题的命题趋势以及命题"陷阱"有深入的把握,望此书能对广大考生有所裨益。

图书在版编目(CIP)数据

2016考研数学考前冲刺10套卷. 数学二 / 胡金德,谭泽光主编. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社,2015.8

ISBN 978-7-5124-1864-6

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①胡… ②谭… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第181609号

2016考研数学考前冲刺10套卷(数学二)

胡金德 谭泽光 主编

责任编辑 张冀青

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:8.5 字数:218千字

2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-1864-6 定价:23.80元

前　言

本书是为参加 2016 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)的考生编写的辅导用书，以供考生在考前冲刺阶段体验实战、熟悉考情、查漏补缺、提高成绩之用。

编者从事考研数学辅导工作十多年，对考研真题的命题趋势以及命题“陷阱”有深入的把握，对广大考生在考研数学复习过程中所遇到的问题有深刻的体会，此次编写这 10 套试卷主要遵循以下两条原则：

第一，争取做到与真题试卷“神似”。即命题严格按照考研数学大纲的要求，遵循考研数学命题的规律，依据近年来命题的趋势；在题型、题量上与真题试卷完全一致；在题目中体现考研命题的指导思想，明确考查内容的重点，在试题形式等方面尽量与真题保持高度的相似性。

第二，争取做到与真题试卷“既形似又有发展”。即在试题的选撰上“神似”，而不“雷同”。在 10 套模拟卷中，我们尽量不用已经在历年考研试卷中出现过的“真题”。模拟卷中试题的构成分为三种情况：第一种，题目与真题“神似形似”，即考查内容、形式与真题大同小异，这主要出现在一些重点和常考内容的考题中；第二种，题目与真题“神似形非”，即其命题思想、内容与能力的考查，与“真题”相似，但与已有真题形式有所不同，这种考题对扩展视野，增强考生应变能力，提高得分概率是有作用的；第三种，少数难一点的题目，内容不超纲，但在数学能力要求上有所提高，这是为了考查和提高考生的数学能力，帮助那些想争取高分的考生更上一层楼。

做模拟题是考前复习的最后阶段，最好从考前三个月开始。10 套卷子一周做一份。我们强烈希望考生将每套试题都当做真正的考研试题，选择安静的“考试”环境，严格把控时间，独立完成，千万不要边做题边对答案。“考试”后再对答案，给自己打分；对考题和自己的答卷进行分析和消化，明确自己的强项和弱项，采取措施查漏补缺，以达到实战模拟的效果。如此 10 个循环下来，功夫不负有心人，要取得考研数学的理想成绩是不难实现的。

最后，祝愿每一位考生都能不负努力，考上理想的学府。

编　者

2015 年 6 月

目　　录

模拟试题(一)

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 若当 $x \to 0$ 时,$e^{\tan x} - e^{x}$ 与 x^{n} 是同阶无穷小量,则 $n =$ ( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(2) 设 $f(x)$ 二阶可导,且当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f''(x) < 0$,若 n 为自然数,则有不等式 ( )

(A) $f\left(\frac{2n+1}{2}\right) + f\left(\frac{2n-1}{2}\right) < 2f(n)$. (B) $f\left(\frac{2n+1}{2}\right) + f\left(\frac{2n-1}{2}\right) > 2f(n)$.

(C) $f(n) - f\left(\frac{2n-1}{2}\right) < \frac{1}{2}f'(n)$. (D) $f\left(\frac{2n+1}{2}\right) - f(n) < \frac{1}{2}f'(n)$.

(3) $\int_{-4}^{0} \sqrt{-4x^{3} - x^{4}}\,dx =$ ( )

(A) 2π. (B) 4π. (C) 6π. (D) 8π.

(4) 满足条件 $\int_{0}^{1} f(xt)\,dt = \alpha f(x)$ $(x > 0, \alpha$ 是常数) 的函数 $f(x) =$ ( )

(A) $cx^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ (c 为任意常数). (B) $x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

(C) $cx^{1-\frac{1}{\alpha}}$ (c 为任意常数). (D) $x^{1-\frac{1}{\alpha}}$.

(5) 若对任何实数 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ 都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$,且 $f'(0) \neq 0$,则 $f(0) =$ ( )

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) $\sqrt{2}$.

(6) 若直线与曲线 $C_1: y = x^{3} + 3$ 和 $C_2: y = x^{3} - 1$ 都相切,则该直线与 C_1, C_2 的切点分别为 ( )

(A) $(-1,2)$ 和 $(1,-2)$. (B) $(1,4)$ 和 $(-1,-2)$.

(C) $(-1,2)$ 和 $(-1,-2)$. (D) $(-1,2)$ 和 $(1,4)$.

(7) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$,则关系式

① $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$, ② $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$, ③ $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$, ④ $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$

中正确的个数是 ( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}$ 都是 4 维列向量,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\beta}$ 有通解 $k[1,-1,0,2]^{\mathrm{T}} + [1,2,1,0]^{\mathrm{T}}$,则下列关系式中错误的是 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.　　(B) $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$.

(C) $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.　　(D) $\boldsymbol{\beta}-3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$.

二、填空题:9 ～ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)}-x\right)=$ ________.

(10) 若极限 $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(ax^2+x^4+bx^5\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$存在，则 l 的值为________.

(11) 设 $f(x),g(x)$ 有连续的二阶导数,若 $u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)+f(x)+g(y)$，则 $x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=$ ________.

(12) 累次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=$ ________.

(13) 常微分方程 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ 的通解为________.

(14) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$,其中 $b\neq0$. $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$. 则 a,b 应满足________.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$有连续导函数,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)\right]=1$. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $y(x)$ 是由方程 $x+y=xy+1$ 确定的隐函数,函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导,且 $g'(0)=g''(0)=1$. 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-y(x)}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 且在 $x=0$ 点连续,求 $f'(0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且满足$\left[1+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]f'(x)=1+[f(x)]^2$,证明:$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续的三阶导数,$f(0)=1,f(1)=2,x=\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点. 证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得$|f'''(\xi)|\geqslant24$.

(19)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\sin(n\pi x)|\cdot\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

(20)(本题满分 11 分)

已知 $f(x)=3x^2+ax^{-3}(a>0)$,若当 $x>0$ 时,总有 $f(x)\geqslant 20$ 成立,试求 a 的取值范围.

(21)(本题满分 11 分)

已知平面图形 D 由 y 轴、曲线 $y=\mathrm{e}^x(x\geqslant 0)$ 和该曲线过原点的切线围成,求 D 的面积和 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,问

(Ⅰ)$\boldsymbol{A}$ 是什么矩阵时,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$,必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$;

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}$ 是什么矩阵时,有 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$;

(Ⅲ)当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$,求所有的 $\boldsymbol{B}_{3\times 3}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 n 阶方阵,满足 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=n$,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$.

证明:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,并求 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及 $|\boldsymbol{A}|$.

模拟试题(一) 答案与解析

(1)【答案】 C

【解析】 **思路一:**当 $x\to 0$ 时,

$$e^{\tan x}-e^{x}=e^{x}(e^{\tan x-x}-1)\sim \tan x-x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x\sim\frac{x^3}{3}.$$

所以,当 $x\to 0$ 时, $e^{\tan x}-e^{x}\sim\frac{x^3}{3}$. 可见 $n=3$.

思路二:由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{x^n}=\alpha$, 其中 α 是非零常数, 则

$$\begin{aligned}\alpha&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(e^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-x}-1}{x^n}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{nx^{n-1}\cos^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{nx^{n-1}}.\end{aligned}$$

由上述关系可得 $n=3$ 且 $\alpha=\frac{1}{3}$.

---

(2)【答案】 A

【解析】 易知 $f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=f\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{2n-1}{2}\right)=f\left(n-\frac{1}{2}\right)$.

思路一:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2n+1}{2}\right)+f\left(\frac{2n-1}{2}\right)-2f(n)&=\left[f\left(\frac{2n+1}{2}\right)-f(n)\right]-\left[f(n)-f\left(\frac{2n-1}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}f'(\xi_1)-\frac{1}{2}f'(\xi_2)\\&=\frac{1}{2}[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]=\frac{\xi_1-\xi_2}{2}f''(\xi)<0,\end{aligned}$$

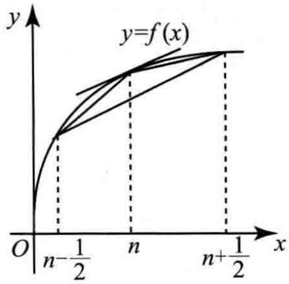
因为 $f''(x)<0$,且 $\frac{2n-1}{2}<\xi_2<n<\xi_1<\frac{2n+1}{2}$.

故选项 A 成立 ,选项 B 不成立.

另外

$$\begin{aligned}f(n)-f\left(\frac{2n-1}{2}\right)-\frac{1}{2}f'(n)&=\frac{1}{2}f'(\xi_1)-\frac{1}{2}f'(n)\\&=\frac{\xi_1-n}{2}f''(\zeta)>0,\end{aligned}$$

因为 $f''(x)<0$, $\frac{2n-1}{2}<\xi_1<n$.



所以选项 C 不成立,同理选项 D 也不成立.

思路二:因为当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f''(x)<0$,所以 $(0,+\infty)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的上凸区间. 其图形如右图所示.

由函数的凸性可知,曲线在其弦线的上方,因而肯定了选项 A,否定了选项B. 又由于 $f''(x)<0$,所以 $f'(x)$ 是减函数,即切线斜率是随 x 增加而变小,因而否定了选项 C 和选项 D . 故选择 A.

(3)【答案】 D

【解析】

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{0}\sqrt{-4x^3-x^4}\,\mathrm{d}x&=-\int_{4}^{0}\sqrt{4u^3-u^4}\,\mathrm{d}u=\int_{0}^{4}u\sqrt{4u-u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\int_{0}^{4}u\sqrt{4-(2-u)^2}\,\mathrm{d}u=\int_{-2}^{2}(2-t)\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t\\&=4\int_{0}^{2}\sqrt{4-t^2}\,\mathrm{d}t=8\pi.\end{aligned}$$

(4)【答案】 A

【解析】 令 $xt=u$, 则有 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$, 从而得

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\alpha x f(x),$$

将上述等式两边对 x 求导,得

$$f(x)=\alpha f(x)+\alpha x f'(x),\ 即\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-\alpha}{\alpha x}.$$

这是个一阶可分离变量的微分方程,解得 $f(x)=cx^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$,其中 c 为任意常数.

(5)【答案】 B

【解析】 依题,令 $x_1=0,x_2=0$,得

$$f(0+0)=f(0)\cdot f(0)\Rightarrow f(0)[1-f(0)]=0\Rightarrow f(0)=0\ 或\ f(0)=1.$$

又

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0)\cdot[f(\Delta x)-1]}{\Delta x},$$

因为 $f'(0)$ 存在, 即极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0)\cdot[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}$ 存在,所以

当 $f(0)=0$ 时, $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0)\cdot[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$,不合题意,舍去.

当 $f(0)\neq 0$ 时,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0)\cdot[f(\Delta x)-f(0)]}{\Delta x}=f(0)\cdot f'(0)\Rightarrow f'(0)[f(0)-1]=0.$$

又 $f'(0)\neq 0$,故 $f(0)=1$.

(6)【答案】 B

【解析】 设直线与曲线 $y=x^3+3$ 的切点横坐标为 x_1，与 $y=x^3-1$ 的切点横坐标为 x_2. 则依题设有，直线斜率 $k=\dfrac{x_1^3+3-(x_2^3-1)}{x_1-x_2}=3x_1^2=3x_2^2$，且 $x_1\neq x_2$.

由此有 $x_1=-x_2$，则由 $\dfrac{x_1^3-x_2^3+4}{x_1-x_2}=3x_1^2$ 得

$$4x_1^3+2=3x_1^3\Rightarrow x_1^3=1\Rightarrow x_1=1,x_2=-1,$$

将 x_1,x_2 代入曲线方程，得两切点分别为(1,4) 和(−1,−2).

(7)【答案】 D

【解析】 观察 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的关系：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

用初等矩阵表示，即为 $\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{B}$. 其中

$$\boldsymbol{E}_{13}=\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix},\quad |\boldsymbol{E}_{13}|=-1\neq 0,\quad \boldsymbol{E}_{13}^{-1}=\boldsymbol{E}_{13},\quad \boldsymbol{E}_{13}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_{13},$$

则

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}|=|\boldsymbol{A}|,\\&\boldsymbol{E}_{13}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B},\\&\boldsymbol{E}_{13}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\\&\boldsymbol{E}_{13}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

故 ①、②、③、④ 都成立，应选 D.

(8)【答案】 B

【解析】 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$ 有通解 $k[1,-1,0,2]^{\mathrm{T}}+[1,2,1,0]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}k+1\\-k+2\\1\\2k\end{bmatrix}$,

故有 $\boldsymbol{\beta}=(k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2k\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k 是任意常数.

由通解的表达式可知，无论 k 是何值，$\boldsymbol{\beta}$ 的表达式中必包含 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 项. 因选项 B 中 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_4$ 没有 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 项，故不可能正确，故应选 B.

当 $k=0$ 时，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，故选项 A 正确.

当 $k=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4$，故选项 C 正确.

当 $k=-1$ 时，$\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4$，故选项 D 正确.

(9)【答案】 $-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$

【解析】 **思路一:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{x}\right)}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left\{\left[1-\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{x^2}\sum_{k\neq j=1}^{n}a_ka_j+\cdots+(-1)^n\frac{1}{x^n}\prod_{k=1}^{n}a_k\right]^{\frac{1}{n}}-1\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(-\frac{1}{nx}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

思路二:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{x}\right)}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left\{e^{\frac{1}{n}\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{x}\right)\right]}-1\right\}=-\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{a_k}{x}\right)\right]$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x}\right)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

---

(10)【答案】 $-\frac{1}{10}$

【解析】 令 $x=\frac{1}{u}$,则原极限可化为

$$l=\lim_{u\to0}\left(\frac{a}{u^2}+\frac{1}{u^4}+\frac{b}{u^5}\int_0^u e^{-t^2}dt\right)=\lim_{u\to0}\frac{1}{u^5}\left(au^3+u+b\int_0^u e^{-t^2}dt\right)$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{3au^2+1+be^{-u^2}}{5u^4},$$

因上述极限存在,当 $u\to0$ 时,上式分子必趋于零,得 $b=-1$,从而

$$l=\lim_{u\to0}\frac{3au^2+1-e^{-u^2}}{5u^4}=\lim_{u\to0}\frac{3au^2+1-\left[1-u^2+\frac{u^4}{2}+o(u^4)\right]}{5u^4}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{3au^2+u^2-\frac{u^4}{2}+o(u^4)}{5u^4},$$

因上述极限存在,所以 $3a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$,则

$$l=\lim_{u\to0}\frac{-u^4+o(u^4)}{10u^4}=-\frac{1}{10}.$$

---

(11)【答案】 $xf''(x)$

【解析】 依题

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)+f'(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)+f''(x)$$

$$=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)+f''(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

故

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x\left[\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)+f''(x)\right]+y\left[-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$=xf''(x).$$

---

(12)【答案】 $e^{-\frac{1}{2}}$

【解析】

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{y^2}^1 dx$$

$$=\int_0^1(1-y^2)e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int_0^1 y\,d(e^{-\frac{y^2}{2}})$$

$$=\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy+(ye^{-\frac{y^2}{2}})\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}.$$

---

(13)【答案】 $x=Cy-ye^y$

【解析】 **思路一：** 将 y 看成自变量，x 看成 y 的函数，则原方程是关于未知函数 $x=x(y)$ 的一阶线性微分方程：

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-ye^y,$$

此方程的通解为

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(C-\int ye^y e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy\right)=Cy-ye^y\quad(\text{其中 }C\text{ 是任意常数}).$$

思路二： 采用凑微分法

$$xdy-ydx=y^2e^ydy\Rightarrow\frac{xdy-ydx}{y^2}=e^ydy,$$

$$\Rightarrow d\left(-\frac{x}{y}\right)=de^y$$

$$\Rightarrow-\frac{x}{y}=e^y+C\Rightarrow x=Cy-ye^y.$$

---

(13)【答案】 $a=-2b$

【解析】 对于三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，由 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，得 $r(\boldsymbol{A})=3-1=2$.

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行、列变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a&b&b\\b-a&a-b&0\\b-a&0&a-b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+2b&b&b\\0&a-b&0\\0&0&a-b\end{bmatrix}$$

因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，故 $a=-2b$ 且 $a\neq b$，即 $a=-2b(\neq 0)$(因为 $a=b\Leftrightarrow\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$).

(15)【解析】 记 $q(x)=f'(x)+\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)$，则 $q(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，

$$\lim_{x\to+\infty}q(x)=1.$$

关于 $f(x)$ 的方程 $f'(x)+\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}f(x)=q(x)$ 是一阶线性非齐次微分方程.

设 $u(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}\mathrm{d}t}$，则有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)f(x)]=u(x)q(x)$，

$$u(x)f(x)=u(0)f(0)+\int_0^x u(t)q(t)\mathrm{d}t.$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{u(x)}u(0)f(0)+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{u(x)}\int_0^x u(t)q(t)\mathrm{d}t\\&=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)q(x)}{u'(x)}.\end{aligned}$$

由 $u(x)$ 表达式，得 $\dfrac{1}{u(x)}=\mathrm{e}^{-\int_0^x\frac{2t}{\sqrt[3]{1+t^3}}\mathrm{d}t}$，$\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}q(x)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^3}}\cdot\lim_{x\to+\infty}q(x)=2.\end{aligned}$$

(16)【解析】 首先，$x+y=xy+1\Rightarrow 1+y'=xy'+y\Rightarrow y''=xy''+2y'$.

所以 $y'=\dfrac{y-1}{1-x}$，$y''=\dfrac{2y'}{1-x}=\dfrac{2(y-1)}{(1-x)^2}$. 从而有 $y(0)=1,y'(0)=0,y''(0)=0$.

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则

$$a=f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-y(x)}{x}=\lim_{x\to0}[g'(x)-y'(x)]=1,$$

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{g(x)-y(x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-y(x)-x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-y'(x)-1}{2x}=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{y'(x)}{x}\right]\\&=\frac{1}{2}[g''(0)-y''(0)]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(17)【证明】 设 $y(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$y(0)=0,\quad y'(0)=f(0)=0,\quad y'(x)=f(x),\quad y''(x)=f'(x).$$

求 $y(x)$ 的问题变成二阶微分方程初值问题：$\begin{cases}(1+y)y''=1+(y')^2,\\ y(0)=y'(0)=0.\end{cases}$

这是缺自变量的可降阶方程，令 $y'(x)=p(y)$，则 $y''(x)=p'(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\cdot p'(y)$.

问题变成：$\begin{cases}(1+y)p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2\\ p(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y}\\ p(0)=0\end{cases}\Rightarrow\int_0^p\dfrac{p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\int_0^y\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y}$

$$\Rightarrow\ln(1+p^2)\Big|_0^p=2\ln(1+y)\Big|_0^y\Rightarrow 1+p^2=(1+y)^2\Rightarrow\pm\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+y)^2-1}}=\mathrm{d}x.$$

先考虑 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+y)^2-1}}=\mathrm{d}x\\ y(0)=0\end{cases}\Rightarrow(1+y)+\sqrt{(1+y)^2-1}=\mathrm{e}^x$

$$\Rightarrow(1+y)-\sqrt{(1+y)^2-1}=\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1.$$

由方程 $\begin{cases}\dfrac{-\mathrm{d}y}{\sqrt{(1+y)^2-1}}=\mathrm{d}x\\ y(0)=0\end{cases}$ 也可推出同样结果：$y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$.

由泰勒级数可知

$$\begin{aligned}y&=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\right]-1\\&=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\geqslant\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.\end{aligned}$$

---

(18)【证明】 在 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 处，将 $f(x)$ 展开成二阶带拉格朗日余项的泰勒公式：

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\zeta)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\zeta_0)\left(\frac{-1}{2}\right)^3=a=1,\ \zeta_0\in(0,1)\qquad①$$

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}f'''(\zeta_1)\left(\frac{1}{2}\right)^3=b=2,\quad \zeta_1\in(0,1)\qquad②$$

式②－式①得

$$\frac{1}{48}[f'''(\zeta_1)+f'''(\zeta_0)]=b-a=1,$$

$$\frac{f'''(\zeta_1)+f'''(\zeta_0)}{2}=24(b-a)=24.$$

由于 $f'''(x)$ 在 $(0,1)$ 中连续，由介值定理知，存在 $\xi\in(\zeta_0,\zeta_1)\subset(0,1)$，使得

$$f'''(\xi)=\max[f'''(\zeta_1),f'''(\zeta_0)]\geqslant\frac{f'''(\zeta_1)+f'''(\zeta_0)}{2}=24.$$

(19)【解析】

$$\begin{aligned}\int_0^1|\sin(n\pi x)|\cdot\ln(1+x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin(n\pi x)|\cdot\ln(1+x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin(n\pi x)|\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\xi_k)\frac{1}{n\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin u|\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\xi_k)\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin u\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\xi_k)\frac{1}{n},\quad\left(\frac{k-1}{n}\leqslant\xi_k\leqslant\frac{k}{n},k=1,2,\cdots,n.\right)\end{aligned}$$

由定积分的定义,得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\sin n\pi x|\cdot\ln(1+x)\mathrm{d}x&=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\xi_k)\frac{1}{n}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left[x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x\right]=\frac{2}{\pi}(2\ln 2-1).\end{aligned}$$

(20)【解析】 根据已知条件,应先求函数的最值点.

$$f'(x)=6x-3ax^{-4},$$

由 $f'(x)=6x-3ax^{-4}=0$,得驻点 $x_0=\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{5}}>0$.

又 $f''(x)=6+12ax^{-5}$,则

$$f''\left[\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right]=6+12a\left(\frac{a}{2}\right)^{-1}=30>0,$$

所以 $x_0=\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$ 是 $f(x)=3x^2+ax^{-3}(a>0)$ 在$(0,+\infty)$的唯一极值点,故

$$f\left[\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right]=3\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{5}}+a\left(\frac{a}{2}\right)^{-\frac{3}{5}}=\frac{5}{\sqrt[5]{4}}\sqrt[5]{a^2}$$

是 $f(x)=3x^2+ax^{-3}(a>0)$ 在$(0,+\infty)$内的最小值.

由已知得$\frac{5}{\sqrt[5]{4}}\sqrt[5]{a^2}\geqslant 20$,解得 $a\geqslant 64$.

(21)【解析】 曲线 $y=\mathrm{e}^x(x\geqslant 0)$ 在(x_0,e^{x_0})处的切线方程为

$$y=\mathrm{e}^{x_0}+\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0).$$

令 $x=0,y=0$,得 $x_0=1$,故曲线 $y=\mathrm{e}^x(x\geqslant 0)$ 过原点的切线方程为 $y=\mathrm{e}+\mathrm{e}(x-1)$,所以 D 的面积为

$$\int_0^1[e^x-e-e(x-1)]dx=\frac{e}{2}-1.$$

D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi e-\pi\int_1^e \ln^2 y dy=\frac{1}{3}\pi e-\pi(e-2)=\frac{2\pi}{3}(3-e).$$

(22)【解析】 （Ⅰ）当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$. 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

（Ⅱ）当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，存在 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$. 因 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，此时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 将 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解合并成方阵，设为 $[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]$，并令 $[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n]+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{E}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$.

（Ⅲ）解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&3&4\\2&-2&-4\\1&-2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&3&4\\0&4&4\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&3&4\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A})=2$. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有通解 $k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}k\\-k\\k\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\\-k_1&-k_2&-k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，令

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\\-k_1&-k_2&-k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\\-k_1&-k_2&-k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+k_1&k_2&k_3\\-k_1&1-k_2&-k_3\\k_1&k_2&1+k_3\end{bmatrix},$$

其中 $k_i(i=1,2,3)$ 是任意常数，则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$.

(23)【证明】 $r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=n$.

若 $r(\boldsymbol{B})=n$，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆. 由 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^T-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，两边左乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}^T=2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=2\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=2^n$.

若 $r(\boldsymbol{C})=n$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆，由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，右乘 $\boldsymbol{C}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}\sim-\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|=(-1)^n$.

若 $r(\boldsymbol{B})\neq n$，$r(\boldsymbol{C})\neq n$，因 $r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})=n$，设 $r(\boldsymbol{B})=r$，则 $r(C)=n-r$.

① 由 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{A}$ 有 $\lambda=-1$，且至少有 $n-r$ 个线性无关的特征向量（因 $r(\boldsymbol{C})=n-r$，$\boldsymbol{C}$ 中有 $n-r$ 列线性无关，且是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=-1$ 的特征向量）. 故 $\lambda=-1$ 至少是 $n-r$ 重根.

② 由 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^T-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，两边转置，得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{0}$. 知 $\boldsymbol{A}$ 有 $\lambda=2$，且至少是 r 重根，$\boldsymbol{B}^T$ 的 r 个线性无关列向量即是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda=2$ 的特征向量.

由 ①，② 知，$\lambda=-1$ 是 $n-r$ 重根，$\lambda=2$ 是 r 重根，从而可知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$. 且

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{E}_{n-r}&\\&2\boldsymbol{E}_r\end{bmatrix},\quad |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\Lambda}|=(-1)^{n-r}2^r.$$