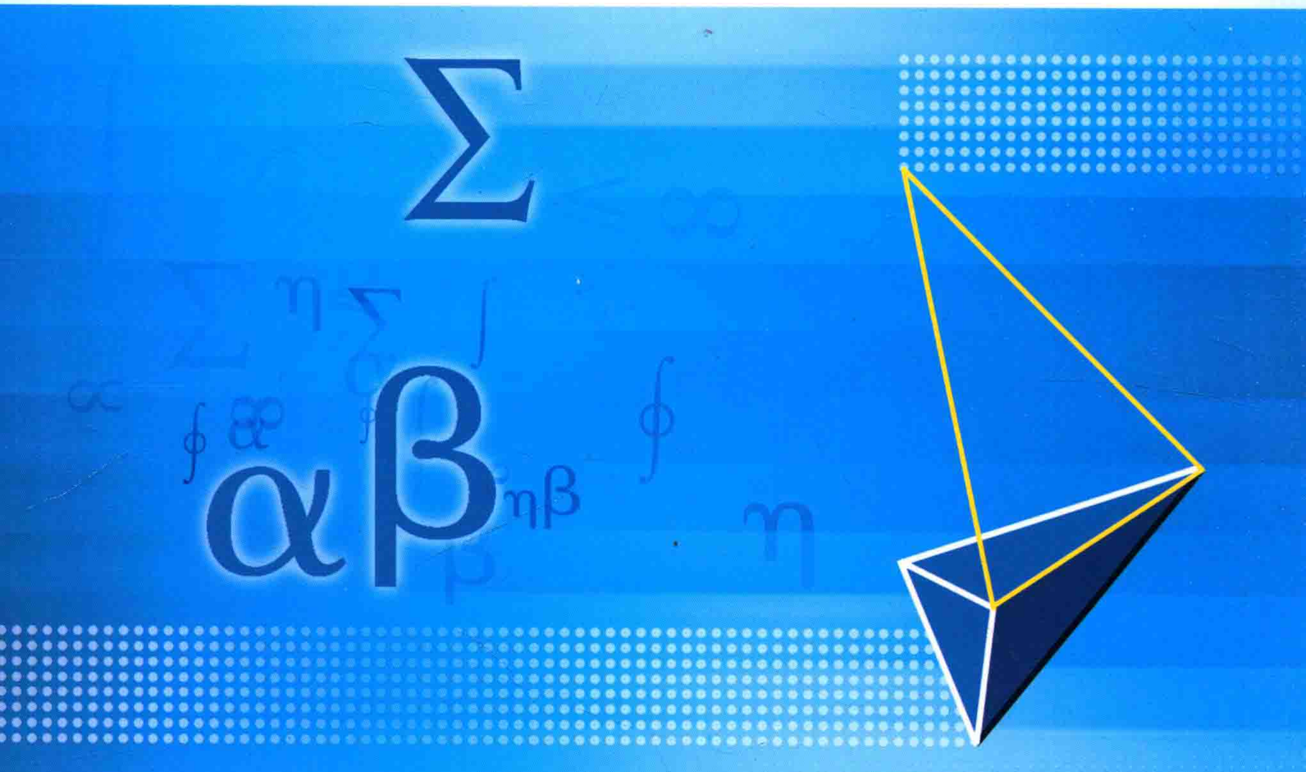
高等职业教育“十三五”规划教材
高职国家精品资源共享课程配套教材

应用数学与计算

YINGYONG SHUXUE YU JISUAN

主编 张耘



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等职业教育“十三五”规划教材
高职国家精品资源共享课程配套教材

应用数学与计算

主　编　张　耘
副主编　陈玉花

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书适用于高职高专院校理工类、经济管理类等各专业，是专为国家精品资源共享课程“应用数学与计算”编写的一本配套教材。本教材结合了多年来从事高等职业教育中高等数学、线性代数、概率论及数理统计课程的教学经验和课程改革成果编写而成。全书共分九章，内容主要包括函数、极限与连续；导数、微分及应用；不定积分；定积分及应用；常微分方程；矩阵；线性方程组；概率论与数理统计初步；拓展知识（数学实验、数学建模）。全书的每小节均配备有习题，且每章都配备一套综合练习题和一套提高题。书后附录给出了初等数学基本公式、常见分布数值表、常用 Mathematica 命令分类检索以及各章习题、综合练习题与提高题的答案。

本书在高职高专学生的接受能力和理解程度的基础上，在符合教学大纲和满足教学最基本要求的前提下讲授“一元微积分、线性代数、概率论与数理统计初步”的基本内容，并进行一定的“数学实验、数学建模”等方面的拓展教学。力图在叙述上通俗易懂、例题选取贴切、注重渗透数学思想。注重“知识、能力和素养”的三方面培养，强调基础知识的训练和综合能力的拓展。

本书可作为高等职业教育、高职院校工科类、经济类或其他各非数学专业选用的教材，也可作为专升本、自学考试、成人教育等的辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学与计算/张耘主编. --北京：北京邮电大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-5635-4629-9

Ⅰ.①应… Ⅱ.①张… Ⅲ.①应用数学 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 316996 号

书　　　名：应用数学与计算
著作责任者：张　耘　主编
责 任 编 辑：马晓仟
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发　行　部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：北京源海印刷有限责任公司
开　　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　　张：17
字　　　数：443 千字
版　　　次：2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4629-9　　　定　价：35.00 元

前　言

《应用数学与计算》是高等职业教育"十三五"规划教材，本教材的编写是依托校级课题"高等职业教育课程建设—高级应用数学"的建设成果，是为国家精品资源共享课程"应用数学与计算"专门编写的一本配套教材。

本教材的编写旨在以贴近生活实际的案例引入高等数学的**基本概念**，以清晰、简洁的语言阐述高等数学的**基本思想**，以经典直观的方式探究高等数学的**基本方法**。突出数学的核心能力培养功能，体现数学思想的本质，淡化数学的严密性和系统性。

本教材的编写思路及主要特点如下。

1. 打破传统数学教材中对教学内容的描述方式，用"通俗、直观、易懂"的叙述代替"严谨、缜密、推导"的套路，避免理论的抽象性，增强了理论的实用性。

2. 贯彻"理解概念、强化应用"的教学原则，注重"从实际中来，到实际中去"，以问题为引线，进行数学概念的介绍、数学思想的挖掘，并在数学应用中逐步引入数学建模的思想。

3. 凸显数学"工具性"的作用。并不主张一味删减理论知识，在把握知识的系统性和连贯性的同时注重揭示和体现数学本身固有的文化内涵和思想方法，培养学生的数学素养。

4. 在内容阐述上，把握"简明扼要、条理清楚、深入浅出、通俗易懂"的总体方针。在习题编排上，本着"难易适度、贴近实际、与例题呼应、容易上手"的原则，着力满足高职数学课程的教学要求。

5. 本教材在各章习题、综合练习题、拓展提高题的选取中，注意结合各专业特点以及专为高职高专学生提升能力、备战数学竞赛和专升本而精心选取。

本教材内容精简实用、叙述通俗易懂、知识覆盖面广、习题资源丰富、数学试验例题选取均由实际教学经验总结而来，本教材的编写是对高职生的"知识、能力、素质"三方面培养需求进行的一次有益尝试。

本教材符合当前高等职业教育中"高素质技术技能型"人才培养的要求，非常适用于各类高职高专院校数学课程教学的选用。

本教材由张耘任主编，陈玉花任副主编。参加本书编写工作的还有付春茹、王新苹、玲玲、陈艳燕、徐坚。

本教材的编写和出版，得到了北京邮电大学出版社有关领导和编辑的大力支持，并得到了同行专家提出的宝贵意见，编者在此一并表示感谢！

本教材在编写过程中虽经过反复推敲与修改，但受编者水平与时间仓促所限，难免会出现纰漏和错误，不足之处恳请同行教师不吝赐教。

编　者
2016 年 1 月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

【导学】　函数是微积分学的主要研究对象，极限是微积分学的理论基础，连续则是函数的一个重要性态. 本章在总结中学已有函数的基础上，进一步阐述函数的概念及性质，理解初等函数和分段函数的概念. 介绍极限的概念及运算，讨论函数的连续性及连续函数的性质，为后续知识的学习奠定坚实的基础.

1.1　函　数

【教学要求】　函数是描述事物变化过程中变量相依关系的数学模型，是数学的基本概念之一. 本节要求掌握函数的基本概念，基本初等函数的图像和性质，理解初等函数的概念，会建立简单的函数关系.

1.1.1　函数的概念及性质

在研究自然的、社会的以及工程技术领域中的某些现象时，人们经常会遇到各种不同的量，比如，时间、速度、质量、温度、成本和利润等，这些量一般可以分为两类，其中一类在所研究的过程中保持不变，这样的量我们称之为**常量**，而另一类在所研究的过程中是变化的，这样的量我们称之为**变量**.

在同一过程中，往往会有几个变量同时变化，但是它们之间的变化不是孤立的，而是按照一定的规律相互联系、相互制约着，也即它们之间存在着相互依赖关系，举例如下.

例 1　自由落体规律

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

式中 h 表示下降的距离，t 表示下落的时间，g 表示重力加速度(视为常量).

此公式给出了一个物体在自由降落的过程中，距离 h 与时间 t 之间的相互依赖关系，它描绘的是自然现象中的某种变化规律.

例 2　某手机品牌产量与成本之间的规律

$$C=7\,000+100x,$$

式中 C 表示总成本，x 表示产量，其中固定成本为 7 000(常量).

此公式给出了一个手机品牌在生产经营活动中，其总成本 C 与产量 x 之间的相互依赖关系，它描绘的是生产经营活动中的某种变化规律.

上述两例中这种变量与变量之间的相依关系，用数学的语言描述出来就得到函数的定义.

1. 函数的概念

定义 1 设 x,y 是两个变量,若对非空数集 D 中每一个值 x,按照一定的对应法则 f,总有**唯一**确定的数值 y 与之对应,则称变量 y 是 x 的**函数**,记作:

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中:x 为**自变量**,y 为**因变量**,数集 D 为**定义域**,f 是**函数符号**,它表示 y 与 x 的**对应法则**. 函数符号也可由其他字母来表示,如 g,h,F,G 等.

当自变量取定 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中的每一个值时,对应的函数值组成的集合称为**函数的值域**,通常用 Z 表示.

由函数的定义可知,定义域和对应法则是函数的两个要素,如果两个函数具有相同的定义域和对应法则,那么它们就是同一个函数.

例 3 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$;　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\ln(x+2)$.

解 (1) 要使 $y=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$有意义,则分母

$$x^2-3x-4\neq 0,$$

解得 $x\neq -1$ 且 $x\neq 4$,所以函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,+\infty)$.

(2) 要使 $y=\sqrt{2-x}+\ln(x+2)$有意义,则有

$$\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ x+2>0\end{cases},$$

解得$-2<x\leqslant 2$,所以函数的定义域为$(-2,2]$.

例 4 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$,求 $f(0)$,$f(1)$,$f(-x)$,$f(x^2+1)$.

解 这是已知函数的表达式,求函数在指定点的函数值. $f(0)$是当自变量 x 取 1 时函数 $f(x)$的函数值,需将 $f(x)$表达式中的 x 换为数值 1,即 $f(0)=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$.

同理可得

$$f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0;$$

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{x+1}{x-1};$$

$$f(x^2+1)=\frac{x^2+1-1}{x^2+1+1}=\frac{x^2}{x^2+2}.$$

例 5 研究下列各对函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, $g(x)=x+2$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$, $g(x)=\sin x$.

解 (1) 因为 $f(x)$的定义域为 $D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域为 $D_g=\mathbf{R}$,显然两个函数的定义域不同,所以 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(2) 虽然两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,但 $f(x)=|\sin x|$,对应法则不同. 所以 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

2. 函数的表示法

函数的表示法有三种：解析法、列表法、图像法.

(1) **解析法**：函数的对应法则用数学表达式表示. 这在高等数学中是最常见的函数表示法，它便于我们进行理论研究.

例如，函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 就是用解析法表示的函数，当 x 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内取任意值时，可由该式计算出相应的 y 值.

(2) **列表法**：将一系列自变量 x 的值与对应的函数值 y 列成表格的形式.

例如，某超市前三个季度每月某洗衣机的零售量 s(单位：台)如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
零售量 s	60	78	64	88	95	66	49	53	55

表 1-1 给出了该超市洗衣机零售量 s 随月份 t 变化而变化的函数关系，这个函数关系是用表格表示的，它的定义域 $D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

当月份 t 在其定义域 D 内取任意值时，从表格中都可查到零售量 s 的一个对应值.

(3) **图像法**：函数的对应法则用建立在平面直角坐标系上的几何图形来表示.

例如，气象台每天用自动记录仪把一天中的气温变化情况自动描绘在记录纸上(如图 1-1 所示). 这是用图形表示的函数，气温 y 与时间 x 的函数关系由曲线给出.

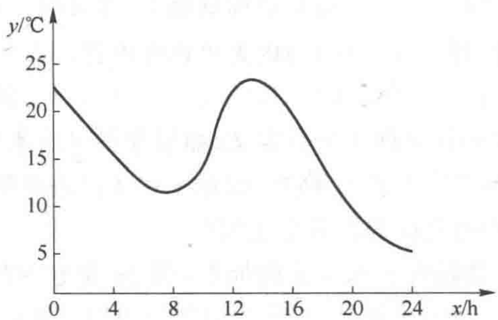


图 1-1

它的定义域为 $D=[0,24]$. 当时间 x 在其定义域 D 内取任意值时，在曲线上都可以找到一个与之对应的气温值 y.

3. 函数的性质

(1) 函数的奇偶性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 内有定义，若对于任意的 $x\in I$，如果恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

从几何特征来看，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称，如图 1-2 所示.

例如，$y=x^2$，$y=x^4$，$y=\cos x$ 都是偶函数；而 $y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数.

(2) 函数的单调性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内的任意两点 x_1，x_2，若当 $x_1<$

x_2时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 内是**单调增加**的；对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 内是**单调减少**的.

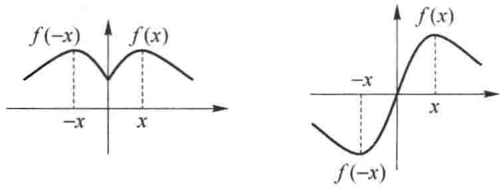


图 1-2

在几何上，单调增加(减少)函数的图形是沿 x 轴的正向渐升的(或渐降的)，如图 1-3 所示.

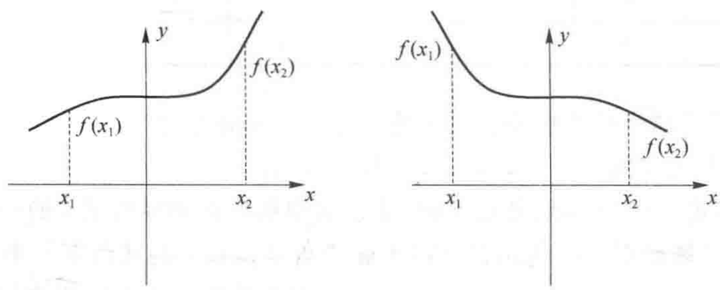


图 1-3

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$内是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$内是单调减少的，而函数 $y=x^2$ 在整个定义域区间$(-\infty,+\infty)$内无单调性可言.

(3) 函数的周期性

定义 4 设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，如果存在一个不为零的实数 T，对于任意的 $x\in I$，有$(x+T)\in I$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$是**周期函数**，实数 T 称为**周期**. 通常所说的周期函数的周期指的是函数的最小正周期.

例如，$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而 2π 是它的最小正周期，故 $y=\sin x$ 的周期是 2π. 函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x, y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

(4) 函数的有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，对于任意的 $x\in I$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 I 上**有界**；否则称为**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$ 的图像介于两条直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间，即有$|\sin x|\leqslant 1$，这时称 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

4. 分段函数

定义 6 函数定义不是用一个表达式完成的，而是把整个定义域分成若干个区间段，每一个区间段内的 x 对应的函数值 y 用一个表达式给出，这种函数称为**分段函数**.

分段函数的特点是，函数的定义域被分成几个部分，每一部分，函数有不同的表达式，如下面两个重要的分段函数.

例 6 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

称为绝对值函数，是一个分段函数. 它的定义域为 **R**，值域为 $[0,+\infty)$，其图像如图 1-4(a)所示.

例 7　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数，这也是分段函数，记为 $\operatorname{sgn} x$，它的定义域为 **R**，值域为 $\{-1,0,1\}$，图形如图 1-4(b)所示. 对任何实数 x 都有下列关系式：$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$ 成立，所以它起着一个符号的作用.

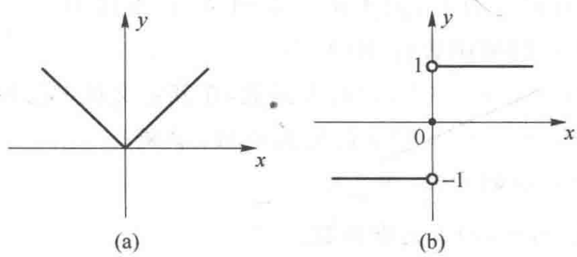


图 1-4

1.1.2　反函数

函数反映的是因变量随着自变量的变化而变化的规律，用另一种语言来说就是：**有两个变量，一个是主动变量(自变量 x)，另一个是被动变量(因变量 y)，主动变量一旦取定了，被动变量也相继唯一确定.** 但是变量之间的制约是相互的，在研究的不同领域里，经常需要更换这两个变量的主次关系，当这种主次关系对换后，仍然成为函数关系，这就是我们所要介绍的反函数.

定义 7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z，若对每一个 $y\in Z$，都有唯一的一个 $x\in D$，使得

$$f(x)=y,$$

这就定义了 Z 上的一个函数，此函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),y\in Z,$$

这时 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由反函数的定义不难发现，$y=f(x)$ 存在反函数当且仅当 f 是 D 到 Z 的一一对应关系，并且反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

在数学上，总习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了满足习惯记法的需要，最后会把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$. $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 互为反函数，它们在同一直角坐标系下是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如，函数 $y=f(x)=x^2,x\in[0,+\infty)$ 与 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x},x\in[0,+\infty)$ 互为反函数，如图 1-5 所示，它们的图像关于 $y=x$ 对称.

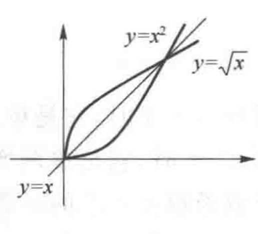


图 1-5

1.1.3 基本初等函数

基本初等函数是中学已经学过的函数，在此仅对它们及它们的图像、性质作以简要复习.基本初等函数分为以下六类.

1. 常量函数

$$y=C \quad (C\text{为常数})$$

常量函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{C\}$；其图像如图1-6所示，是一条平行于x轴的直线.

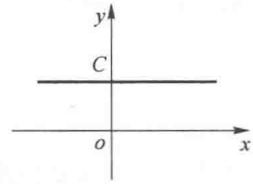


图 1-6

2. 幂函数

$$y=x^{a} \quad (a\text{为实数})$$

幂函数的定义域与常数a有关，但无论a取何值，它在区间$(0,+\infty)$内总有定义.常见的幂函数有(图1-7)：

$y=x$，在其定义域$(-\infty,+\infty)$上，它是奇函数，在其定义域上为增函数.

$y=x^2$，在其定义域$(-\infty,+\infty)$上，它是偶函数，单调减区间为$(-\infty,0)$，单调增区间为$(0,+\infty)$.

$y=\sqrt{x}$，在其定义域$[0,+\infty)$上是增函数.

$y=\dfrac{1}{x}$，在其定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上，它是奇函数，$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$都是它的单调减区间.

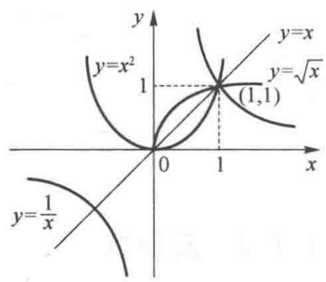


图 1-7

容易从图1-7得到幂函数的如下特征：

(1) 幂函数的图像过$(1,1)$点，即幂函数在$x=1$时的函数值为1；

(2) 幂函数$y=x^a$的图像与$y=x^{\frac{1}{a}}$的图像关于直线$y=x$对称.

3. 指数函数

$$y=a^x(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$$

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，其函数性质与常数a有关，图像如图1-8所示.

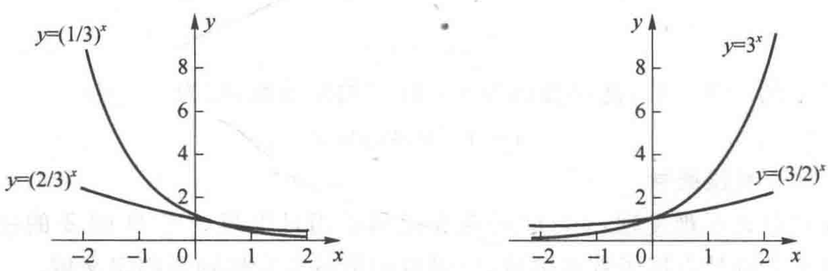


图 1-8

当$0<a<1$时，它是单调减函数，如图1-8(a)所示；

当$a>1$时，它是单调增函数，如图1-8(b)所示.

指数函数$y=a^x$的函数值恒大于0，无论a为何值，指数函数$y=a^x$恒过点$(0,1)$.

常用的指数函数是$y=e^x$，其中$e=2.718\ 28\cdots$.

4. 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$$

对数函数的定义域为$(0,+\infty)$，其图像如图 1-9 所示. 从图 1-9 中可以看到，当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 为单调减函数，当 $a>1$ 时，其为单调增函数. 无论 a 为何值，对数函数 $y=\log_a x$ 恒过点$(1,0)$.

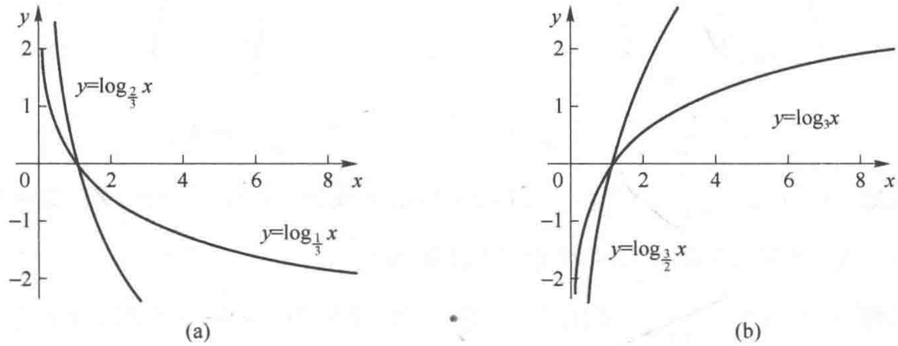


图 1-9

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，因此它们互为反函数.

常用的对数函数有 $f(x)=\lg x$ 和 $f(x)=\ln x$. 前者是以 10 为底的对数函数，称为**常用对数函数**，后者是以 e 为底的对数函数，称为**自然对数函数**. 自然对数函数将是本课程中更为常见的对数函数.

5. 三角函数

三角函数包括六种：正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数.

正弦函数：$y=\sin x$（如图 1-10 所示），定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$.

它的特性是：有界、奇函数、周期函数（周期为 2π）.

余弦函数：$y=\cos x$（如图 1-11 所示），定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$.

它的特性是：有界、偶函数、周期函数（周期为 2π）.

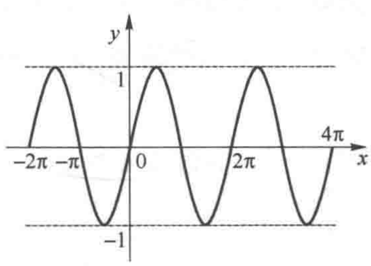


图 1-10

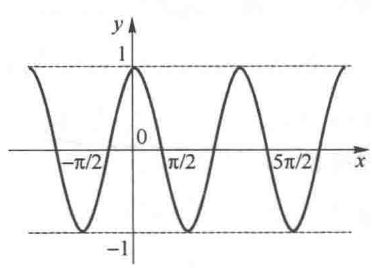


图 1-11

正切函数：$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$（如图 1-12 所示），定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,+\infty)$.

它的特性是：无界、奇函数、周期函数（周期为 π）.

余切函数：$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$（如图 1-13 所示），定义域为 $x\neq k\pi(k\in \mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,+\infty)$.