



信息与计算科学丛书 — 71

图像重构的数值方法

徐国良 陈冲 李明 著



科学出版社



“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书 71

图像重构的数值方法

徐国良 陈 冲 李 明 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

图像重构是计算机断层成像和电镜成像等领域中最重要的研究课题之一。本书的主要内容包括图像重构的数学基础,成像数据的采集原理及采集方法,各种主要的重构算法,如 Fourier 重构方法、反投影方法、代数重构方法等和最近发展起来的有效方法,如 L^2 梯度流、压缩感知、Framelet 方法、Bregman 迭代方法等,以及相应的理论分析。

本书内容新颖、文字简练、可读性强,可作为理工科院校的应用数学、计算数学、生物医学图像处理等专业的研究生和本科生的教材,也可作为相关领域科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

图像重构的数值方法/徐国良,陈冲,李明著. —北京:科学出版社, 2015.10
(信息与计算科学丛书; 71)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-03-045921-3

I. ①图… II. ①徐… ②陈… ③李… III. ①图象处理-数值方法
IV. ①TN911.73 ②0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 239656 号

责任编辑: 王丽平 刘信力 / 责任校对: 张凤琴

责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 10 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2015 年 10 月第一次印刷 印张: 23 1/4 插页: 4

字数: 440 000

定价: 148.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前 言

本书旨在阐述图像重构的数值方法及相关的数学理论. 粗略地说, 图像重构是一种通过物体外部探测数据来构造物体内部信息的技术. 作为一种非常重要的技术, 图像重构已被广泛地应用于生物医学成像的各个领域, 其中包括 X 射线计算机断层成像 (X 射线 CT)、放射性核素成像、超声成像、核磁共振成像以及基于冷冻技术的三维电子显微镜成像 (冷冻电镜成像) 等. 医学成像技术的产生和发展对医疗诊断产生了革命性的影响. 利用这种无损或微损技术, 医生可以比较清楚地了解到人体组织和器官的变化情况, 从而做出更加准确的判断. 1895 年 W. Röntgen 发现 X 射线后, 人们很快就意识到 X 射线在医学成像领域中的应用前景. 在随后的几十年中, X 射线成像技术得到了巨大的发展. 到目前为止, 上述的几种医学成像技术已被广泛采用, 以 X 射线 CT 为例, CT 机现已成为现代各大医院必不可少的诊断设备, CT 扫描已经成为许多病症的必做检查项目.

图像重构的另外一个重要应用是三维电子显微镜成像. 从德国物理学家、诺贝尔奖获得者 E. Ruska 于 1939 年研制出第一台商业电子显微镜开始, 随着加速电压和计算机等硬件设备的不断发展, 现代电子显微镜已成为生物学家不可或缺的实验仪器, 其中冷冻电镜三维成像技术是当前细胞生物学和结构生物学等研究领域解析生物样本结构最重要的实验手段之一. 它与 X 射线晶体成像技术、核磁共振成像技术并列, 成为现代结构生物学研究的三大手段.

除了在生物医学上的应用之外, 图像重构在许多其他领域也有着重要的应用, 如地球探测、考古、天文、无损检测等. 科技人员使用图像重构技术能对探测数据进行反演, 获得被探物体的内部结构, 从而得出更加准确的分析和判断结论.

综上所述可以发现, 图像重构是一个应用非常广泛、关系到人类的健康与生活的研究领域. 在过去的几十年间, 已经发展出大量行之有效的计算方法以及丰富多彩的数学理论, 但仍有大量的、新的、困难的问题亟待解决, 诸如探测数据的高噪声问题, 投影角度稀少、缺失或数据不全问题, 多构象电镜图像的重构问题, 提高重构图像分辨率问题, 提高重构速度和精度问题, 消除或减少各种各样的伪影问题等, 所以图像重构的理论与方法仍是目前十分热门的研究课题. 本书所介绍的内容既包括图像重构领域中已经被广泛采用的、较成熟的理论与方法, 也包括目前受到普遍关注的相关研究工作以及作者在这一领域的研究成果和工作体会. 我们的愿望是把最新、最有用的理论与方法介绍给读者. 但囿于知识所限及个人偏好, 我们的选材定有疏漏或偏颇, 望读者可以通过书中所引专著与文献进行弥补. 书中的其他

错误与不当之处,望读者及专家学者批评指正.

全书共 11 章,第 1 章介绍医学 CT 图像及冷冻电镜图像重构问题的研究背景及发展现状.第 2 章介绍为阅读本书所需要的预备知识,包括 Fourier 变换、Radon 及 X 射线变换、采样定理、样条函数、压缩感知以及小波变换等.第 3 章介绍 CT 数据及冷冻电镜图像的采集原理和方法.第 4 章到第 9 章介绍各种图像重构方法,其中第 4 章介绍平行束投影的经典重构方法,包括 Fourier 方法、反投影方法以及代数方法等.第 5 章讨论针对特殊的数据采集方式的医学 CT 图像的重构方法.第 6 章讨论图像重构的梯度流方法,第 7 章是前一章内容的继续,讨论与梯度流方法相关的理论问题,包括收敛性以及稳定性等.第 8 章讨论双梯度下降法.第 9 章介绍基于稀疏逼近的图像重构方法,其中包括压缩感知方法、Framelet 方法以及 Bregman 迭代方法.第 10 章讨论冷冻电镜图像重构的前期准备步骤,包括图像对齐、图像分类以及图像定向等.第 11 章讨论重构图像的分割,包括二维和三维图像的分割.

本书的 1.1 节, 2.2 节, 2.7 节, 3.1 节及 3.2 节, 4.2 节及 4.3 节, 5.1 节及 5.2 节, 6.4~6.7 节, 第 7 章, 9.1 节和 9.3 节由第二作者撰写,而 1.2 节, 2.3 节, 2.4.4 节, 2.5 节及 2.6 节, 2.8 节及 2.9 节, 3.3 节及 3.4 节, 4.1 节, 5.3 节, 6.1~6.3 节, 9.2 节, 10.1 节以及 10.4 节由第三作者撰写,第一作者撰写了本书的其余部分并负责全书的统筹定稿工作.

本书的内容涵盖了中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所、科学与工程计算国家重点实验室、计算几何及图像处理课题组近若干年来的大部分研究工作.先后参加这一课题组研究工作的除了本书的作者外,还有博士研究生,她们是荆竹翠、王霞、冷珏琳、李兴娥.荆竹翠和王霞参与了第 10 章中图像定向方面的工作,而第 10 章中关于图像分类的内容则源自王霞的博士学位论文.第 11 章中关于非均匀光照模型的图像分割方面的内容来源于冷珏琳的博士学位论文.稍后参加本项目的博士研究生李兴娥则仔细研读了本书的初稿,并在讨论班上进行了全面的研讨,提出了许多修改意见.作者向她们对本书内容所作出的贡献深表谢意.在本书定稿之前,张琴博士又仔细阅读全书,进一步提出了改进意见,这对本书质量的提高至关重要.与本书作者合作的还有美国德克萨斯大学奥斯汀分校的 C. Bajaj 教授及 A. Gopinath 博士、中国科学院自动化研究所的叶军涛研究员、中国科学院生物物理研究所的孙飞研究员、北京协和医院的朱以诚博士(主治医师)、西班牙国家生物技术中心的 C. Sorzano 教授以及美国卡内基梅隆大学的张永杰教授,他们均对本书的内容有所贡献,在此一并致谢.

在本项目进行期间,作者曾先后得到国家自然科学基金委员会的创新团队基金(11021101, 11321061)、重大项目基金(10990013)、面上项目基金(60773165, 81173663)以及青年项目基金(11101401, 11301520)的资助.显然,没有这些资助,

本项目是无法顺利完成的。在本书付梓之际，作者向支持的机构致以诚挚的谢意，还特别感谢科学出版社的王丽平女士，她在本书的出版过程中给予了大力的支持并付出了辛勤的劳动。

作者

2014 年 12 月于北京

符号说明

$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{R}^m$	m 维实向量空间
$\mathbb{R}^{m \times n}$	实 $m \times n$ 矩阵空间
$\mathbb{Z}$	整数的集合
$\mathbb{Z}_+$	非负整数的集合
$\mathbb{Z}_+^n$	n 重非负整数指标集
Ω	函数的定义域
$\partial\Omega$	Ω 的边界
$\mathbf{S}^{n-1}$	$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面
θ	$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面上的点
$\mathbf{C}^n$	$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位柱面
$\mathbf{T}^n$	$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面的切丛
$\theta^\perp$	与 $\theta \in \mathbf{S}^{n-1}$ 正交的向量空间
$\mathbf{E}_\theta$	$\theta^\perp$ 上的投影算子
$H(\theta, s)$	$\mathbb{R}^n$ 中垂直于 $\theta \in \mathbf{S}^{n-1}$ 且与原点的距离为 s 的超平面
$\mathbf{R}, \mathbf{R}_\theta$	沿 θ 方向的 Radon 变换
$\mathbf{R}^*, \mathbf{R}_\theta^*$	$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}_\theta$ 的对偶变换
$\mathbf{P}, \mathbf{P}_\theta$	沿 θ 方向的 X 射线变换, 也称为投影变换
$\mathbf{P}^*, \mathbf{P}_\theta^*$	$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{P}_\theta$ 的对偶变换
$\mathbf{I}^\alpha$	Riesz 势
$\hat{f}$	f 的 Fourier 变换
$\check{f}$	f 的逆 Fourier 变换
C^m	m 次连续可微函数的全体
C^∞	无穷次连续可微函数的全体
C_0^∞	具有紧支集的无穷次连续可微函数的全体
$L^p(\Omega)$	范数为 $\left(\int_\Omega f ^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}$ 的函数空间
$\mathcal{S}$	Schwartz 空间
$\mathcal{S}'$	Schwartz 空间的广义函数空间

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	内积空间中两元素的内积
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	三维向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的外 (叉) 积
$\ \mathbf{u}\ _p := \left(\sum_i u_i ^p \right)^{1/p}$	向量 $\mathbf{u}$ 的 p 范数或 ℓ_p 范数
$\ \mathbf{u}\ := \ \mathbf{u}\ _2$	向量 $\mathbf{u}$ 的欧几里得长度
$\mathbf{A}:\mathbf{B}$	矩阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ 的迹
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的 Kronecker 积
$\mathbf{A}^T$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置
A^*	算子 A 的共轭或伴随
$\mathcal{R}(A)$	矩阵或算子 A 的值域
$\mathcal{N}(A), \ker(A)$	矩阵或算子 A 的零空间
tr	方阵的迹
$\det$	方阵的行列式
$\text{diag}(\cdots)$	对角矩阵
$\mathbf{M}$	刚度矩阵
$f * g$	函数 f 与 g 的卷积
$E[\cdot]$	取整运算
H	曲面 (流形) 的平均曲率
K	曲面的高斯曲率
$\mathbf{n}$	曲面 (流形) 的法向
∇	欧几里得空间中的梯度算子
∇_s	参数曲面上的切梯度算子
div	欧几里得空间中的散度算子
div_ϕ	隐式曲面上的散度算子
Δ	欧几里得空间中的 Laplace 算子
Δ_s	参数曲面上的 Laplace-Beltrami 算子
Δ_ϕ	隐式曲面 $\{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) = c\}$ 上的 Laplace-Beltrami 算子
Δ	差分的长度
sinc	sinc 函数
dA	面积元
$dV, d\mathbf{x}$	体积元
$\mathcal{E}, \mathcal{F}$	能量泛函
δ	一阶变分, 也表示 Dirac delta 函数
$\text{card}(\cdot)$	一个有限集合的势 (基数)
$\text{span}[\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k]$	由 $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k$ 所张成的空间

$\text{supp}(\cdot)$	函数的支集
$A \Rightarrow B$	A 蕴涵着 B
$A \Leftarrow B$	B 蕴涵着 A
$A \Leftrightarrow B$	A 与 B 等价
$\text{\AA}$	埃, 10^{-10} 米

目 录

《信息与计算科学丛书》序

前言

符号说明

第 1 章 引言	1
1.1 医学图像重构问题的研究背景及发展现状	1
1.1.1 医学图像重构问题的研究背景	1
1.1.2 医学图像重构问题的发展现状	2
1.2 冷冻电镜图像重构问题的研究背景及发展现状	5
1.2.1 冷冻电镜图像重构问题的研究背景	5
1.2.2 冷冻电镜图像重构问题的发展现状	6
第 2 章 预备知识	9
2.1 记号、函数空间与常用公式	9
2.2 Fourier 变换	11
2.2.1 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换	11
2.2.2 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换	12
2.3 特殊函数	13
2.4 Radon 变换及 X 射线变换	16
2.4.1 Radon 变换及 X 射线变换的性质	17
2.4.2 Radon 变换及 X 射线变换的对偶	19
2.4.3 求逆公式	21
2.4.4 Radon 变换和 X 射线变换的奇异值分解	23
2.5 采样定理及采样格式	24
2.5.1 采样定理	24
2.5.2 可分辨性	28
2.5.3 采样格式	32
2.6 样条函数	34
2.6.1 样条函数的定义及性质	34
2.6.2 刚度矩阵的快速求逆	37
2.6.3 样条基函数乘积的积分	40
2.7 压缩感知	41

2.8 小波变换	47
2.8.1 连续小波变换	48
2.8.2 离散小波变换: 小波框架与正交小波基	50
2.8.3 多分辨分析与小波的构造	52
2.8.4 正交小波分解和重构的快速算法	56
2.9 重构模型及适定性分析	58
第 3 章 CT 数据及冷冻电镜图像的采集原理和方法	62
3.1 CT 数据采集原理	62
3.2 CT 数据采集方法	65
3.2.1 平行投影	65
3.2.2 扇形束投影	67
3.2.3 锥形束投影	67
3.2.4 数据采集模式	68
3.3 冷冻电镜图像采集原理	69
3.4 冷冻电镜图像采集方式	71
第 4 章 平行束投影图像重构的经典方法	73
4.1 Fourier 重构方法	73
4.2 反投影方法	79
4.2.1 滤波反投影方法	79
4.2.2 反投影滤波方法	81
4.3 代数方法	83
第 5 章 医学 CT 图像的重构方法	87
5.1 扇形束投影的图像重构	87
5.1.1 等角扇形束投影的图像重构	87
5.1.2 等距扇形束投影的图像重构	91
5.2 锥形束投影的图像重构	93
5.2.1 Tuy 公式	93
5.2.2 FDK 算法	96
5.2.3 Katsevich 公式	99
5.3 内部问题的小波方法	106
第 6 章 图像重构的梯度流方法	112
6.1 特殊规整项的 L^2 梯度流的显式有限元方法	112
6.1.1 L^2 梯度流方法	112
6.1.2 L^2 梯度流的有限元求解算法	114
6.1.3 B 样条基函数的施密特正交化	116

6.2	Cryo-EM 单颗粒重构的 L2GF 算法	117
6.2.1	算法框架	117
6.2.2	冷冻电镜单颗粒 L2GF 算法数值实验	119
6.3	Cryo-ET 重构的 L2GF 算法	122
6.3.1	算法的一般框架	122
6.3.2	保真项的计算	122
6.3.3	正则项的计算	128
6.3.4	Cryo-ET 重构的数值实验	129
6.4	一般规整项的 L^2 梯度流的显式有限元方法	132
6.5	基于无穷投影角度的梯度流方法	135
6.5.1	基于无穷投影角度的图像重构模型	135
6.5.2	图像重构模型的初步探索	137
6.5.3	显式有限差分方法	142
6.5.4	半隐式有限元方法	147
6.6	有限角度的半隐式有限元方法	160
6.7	混合格式	160
6.7.1	算法提出	161
6.7.2	算法细节和复杂性分析	166
6.7.3	数值实验	167
第 7 章	图像重构的梯度流方法的理论分析	173
7.1	显式有限元方法的收敛性	173
7.1.1	选取 Tikhonov 型正则化项的收敛性分析	173
7.1.2	选取修正 TV 正则化项的收敛性分析	180
7.1.3	稳定性与鲁棒性分析	184
7.2	无穷投影角度半隐式有限元方法的收敛性	185
7.3	有限投影角度半隐式有限元方法的收敛性	194
7.4	混合格式的收敛性	195
第 8 章	冷冻电镜图像重构的双梯度下降法	205
8.1	双梯度下降法	205
8.2	梯度和几何流	206
8.3	数值计算	208
8.3.1	离散化	208
8.3.2	L^2 梯度流	211
8.3.3	计算组合方向	214
8.3.4	步长曲线	215

8.4 数值实验和讨论	219
8.4.1 无噪声数据的数值实验	219
8.4.2 信噪比为 1.0 的有噪声数据的数值实验	220
8.4.3 信噪比为 0.1 的有噪声数据的数值实验	222
第 9 章 基于稀疏逼近的图像重构方法	226
9.1 压缩感知方法	226
9.1.1 压缩感知模型	226
9.1.2 压缩感知模型与统计模型的关系	228
9.2 小波紧框架方法	231
9.2.1 算法及理论分析	232
9.2.2 算法实现及数值实验	236
9.3 Bregman 迭代法	240
9.3.1 经典的 Bregman 迭代算法	240
9.3.2 分裂 Bregman 迭代算法	241
9.3.3 线性化 Bregman 迭代算法	243
9.3.4 线性化分裂 Bregman 迭代算法	243
9.3.5 收敛性分析	252
9.3.6 数值实验	262
第 10 章 冷冻电镜图像的重构的前处理	265
10.1 CTF 矫正、粒子挑选与对齐	265
10.2 电镜图像分类	267
10.2.1 预备知识	267
10.2.2 分类算法	270
10.2.3 实验结果	275
10.2.4 注记	281
10.3 冷冻电镜图像的定向	281
10.3.1 定向问题的描述	281
10.3.2 预备知识	282
10.3.3 基于公共线的定向算法	285
10.3.4 实验结果	292
10.4 Cryo-ET 图像重构的前处理	296
10.4.1 Cryo-ET 图像重构的流程	296
10.4.2 Cryo-ET 图像的对齐	297
第 11 章 重构图像的分割	300
11.1 Mumford-Shah 模型	300

11.2	RSF 模型	302
11.3	光照非均匀的 Mumford-Shah 模型	302
11.3.1	IIMS 模型的水平集形式	304
11.3.2	分裂 Bregman 迭代算法	307
11.3.3	实验结果	312
11.4	分片多项式的 Mumford-Shah 模型	318
11.4.1	水平集形式	319
11.4.2	数值计算	321
参考文献		325
索引		344
《信息与计算科学丛书》已出版书目		347
彩图		

第 1 章 引 言

本章介绍图像重构问题的研究背景和发展现状, 包括医学图像和冷冻电镜图像重构问题的研究背景和发展现状, 还包括本书其余各章的内容概要.

1.1 医学图像重构问题的研究背景及发展现状

医学图像重构 (medical image reconstruction, 又称医学图像重建) 是一门影响人类健康和生活水平的前沿科学技术. 医学成像 (medical imaging) 技术和计算机技术的飞速发展对医学图像重构的理论与方法提出了更高的要求. 近年来, 随着新颖的压缩感知数学理论的建立和先进的医学成像技术在医疗诊断领域的广泛应用, 医学图像重构的理论与方法得到了快速发展, 已经成为当前应用数学、科学计算、医疗诊断与信息技术等交叉领域中最重要的发展方向之一.

1.1.1 医学图像重构问题的研究背景

医学图像重构问题是一个典型的反问题 (inverse problem), 它是研究如何通过对人体组织进行扫描所获数据构造人体内部信息的问题. 作为一种十分重要的技术, 医学图像重构被广泛地应用于医学成像领域^[95, 148, 166, 192], 其中包括 X 射线计算机断层成像 (X-ray computed tomography, X 射线 CT)^[167]、放射性核素成像 (emission computed tomography)^[40]、超声成像 (ultrasonic computed tomography)^[140]、磁共振成像 (magnetic resonance imaging)^[186] 等.

医学图像重构问题与医学成像技术相伴而生, 是医学成像技术的核心组成部分. 医学成像技术的产生与发展对临床医学的影响是革命性的, 特别是医疗诊断. 它改变了传统的诊断方式, 极大地提高了病症诊断的准确程度. 利用这种无损或微损技术, 医生可以比较准确地了解到人体内部器官和组织的变化情况, 从而获得更加准确的诊断结果. 自 1895 年 W. Röntgen 发现 X 射线开始, 人们就很快意识到 X 射线在医学成像中的应用前景. 在随后的几十年中, X 射线成像技术有了很大的发展. 到目前为止, 前面提到的几种医学成像技术一直被广泛地应用着, 以本书所涉及的 X 射线 CT 技术为例: 每年全球 X 射线 CT 扫描仪的销售额已达几十亿美元, 该仪器已经成为现代医院的必要设备, 并且 X 射线 CT 扫描也是许多病症的必做检查^[219].

从纯粹数学的角度来说, 如何根据线积分来重构函数的理论问题已经由奥地利

数学家 J. Radon 于 1917 年解决^[234], 但这一理论结果在很长一段时间内并未得到实际的应用. 直到 20 世纪 60 年代, 在没有发现 J. Radon 的相关工作的情况下, 美国物理学家 A. Cormack 在 1963 到 1964 年连续发表了两篇学术论文^[79, 80], 不仅证实了定义在有限区域内的实值函数可以通过所有与该区域相交的线积分进行重构的理论事实 (该理论推导过程与 J. Radon 的截然不同), 而且创造性地发现可将这种理论应用到放射学和放射线疗法. 1973 年英国的工程师 G. Hounsfield 真正设计出了 X 射线 CT 系统的雏形^[154, 155], 但其重构方法与 J. Radon 和 A. Cormack 的方法均不同, 而是利用 Kaczmarz 迭代法^[165] 求解将线积分投影离散的线性方程组来得到不同组织对 X 射线的衰减系数的分布图像. A. Cormack 与 G. Hounsfield 因在放射医学中所作出的卓越贡献而获得了 1979 年的诺贝尔生理或医学奖^[81, 156].

在短短的几十年时间里, X 射线 CT 的硬件设备从发明到现在已经发生了翻天覆地的变化, 从最初的第一代单放射源单探测器的扫描仪, 到第二代的单放射源多探测器的扫描仪, 再到第三代的单放射源与多探测器同时旋转的扇形束扫描仪, 再到第四代的旋转放射源与静态探测环的扇形束扫描仪, 直到现在的最先进的三维锥形束扫描仪和三维螺旋锥形束扫描仪^[157, 208].

1.1.2 医学图像重构问题的发展现状

针对不同硬件设备的扫描几何, 研究人员提出了许多不同的重构方法. 总的来说, 医学图像重构方法可以分为两大类: 第一类是基于解析的方法 (简称解析法), 第二类是基于迭代的方法 (简称迭代法). 进一步细分, 迭代法又可分为基于代数的方法和基于优化的方法. 特别地, 基于代数的方法有时亦能归结到基于优化的方法中去.

基于解析的方法一般是指不需要进行迭代的方法, 也是当前商用 CT 扫描仪 (commercial CT scanner) 所采用的图像重构算法. 这类方法往往依赖于具体的扫描几何. 解析算法通常都是基于精确的图像重构公式, 对精确的重构公式进行离散或者先逼近再离散而得到. 到目前为止, 基于解析的方法主要有滤波反投影法 (filtered backprojection, FBP)^[33, 169, 170, 235, 261]、反投影滤波方法 (filter of backprojection, BPF)^[22, 94, 268]、加权反投影法 (weighted backprojection, WBP)^[231]、直接 Fourier 方法 (direct Fourier, DF)^[31, 32, 85, 93, 206] 以及基于 DF 方法改进的诸多方法, 如 gridding 算法^[218, 253]、linograms 算法^[108, 109, 226], 等等.

基于代数的方法首先需要构造一个线性方程组, 然后利用数值代数的方法对其进行求解. 这类方法通常需要将物体离散成图像像素或体素, 但不依赖于具体的扫描几何. 基于代数的方法主要有与 Kaczmarz 算法相关的代数重构技术 (algebraic reconstruction techniques, ART)^[137]、同步迭代重构技术 (simultaneous iterative reconstructive technique, SIRT)^[127]、同步代数重构技术 (simultaneous al-