九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版 · 华东师大数学系编

教你用更多的自信面对未来！

一书两用

同步辅导+考研复习

数学分析

（第四版 · 上册）

同步辅导及习题全解

主　编　焦艳芳　李光敏

习题超全解

名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

数学分析（第四版·上册）同步辅导及习题全解

主　编　焦艳芳　李光敏

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第四版·上册)的配套辅导书。

全书按教材内容，对各章的重点、难点做了较深刻的分析，针对各章节全部习题给出详细解题过程，并附以知识点窍和逻辑推理，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，各章还附有典型例题与解题技巧，以及历年考研真题评析。

本书可作为工科各专业学生的“数学分析”课程教学辅导材料和复习参考书，也可作为工科考研强化复习的指导书及“数学分析”课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（第四版·上册）同步辅导及习题全解 / 焦艳芳，李光敏主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2015.7
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-3319-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①焦… ②李… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第140790号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：李　炎　　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 数学分析（第四版·上册）同步辅导及习题全解
作　　者	主　编　焦艳芳　李光敏
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	170mm×227mm　16开本　21.25印张　408千字
版　　次	2015年7月第1版　2015年7月第1次印刷
印　　数	0001—7000册
定　　价	23.00元

前言

数学分析是数学系最重要的一门专业基础课。大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用,至于它的基本概念、思想和方法,更可以说是无处不在。数学专业后继专业课程如微分方程、实变函数和复变函数、概率论、统计及泛函分析、微分几何等课程都要以数学分析为基础。同时数学分析也是数学专业各个方向考研必考的专业基础课。

本书是华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第四版 · 上册)的配套辅导书,主要由如下几部分组成:

1. 本章导航。以图文的形式概括各章知识点及其之间的联系,使读者对全章内容的脉络有一个清晰的了解。

2. 各个击破。对每章知识点作了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确、有的放矢。

3. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。

4. 走近考研。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细的解答,以开拓同学们的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

由于时间仓促及编者水平有限,书中难免有疏漏之处,敬请各位同行和读者批评指正。

编　者
2015 年 6 月

目 录
contents

目录

contents

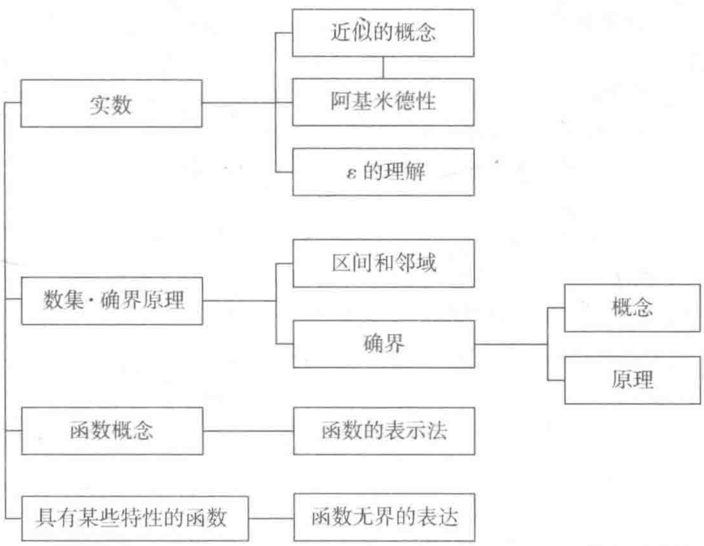
第一章

实数集与函数

本章导航

在数学分析这门学科中，基本研究对象就是定义在实数集上的函数，了解实数和函数的基本概念以及性质是我们继续走下去的第一步. 在初高中阶段，大家对实数的概念已经很熟悉了，本章中实数的内容就是建立在中学知识的基础上更加系统地认知实数. 函数是数学分析中重要的工具，研究函数的性质(包括单调性、奇偶性等)从而得到具体问题的解决方案是我们的重要课题，在本章中我们将给出函数性质的准确定义，毕竟严格是数学的魅力所在.

接下来让我们从知识结构图中来了解一下本章的重要内容.



各个击破

实数

1. 实数集 **R** 由有理数和无理数组成,任何实数都可用一个确切的无限小数或者有限小数来表示.

2. 实数的序关系:

(1) 传递性:若实数 a,b,c,有 $a<b,b<c$,则 $a<c$;

(2) 对任意实数 a,b,两者的大小关系莫过于这三种:

$$a<b,a=b,a>b$$

并且这三种中有且只有一种成立.

3. 实数的 n 位不足近似和 n 位过剩近似:

设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为非负实数,称有理数 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似,而有理数 $\overline{x_n}=x_n+\frac{1}{10}$ 为实数 x 的 n 位过剩近似.

小提示　实数x的n位不足近似x_n当n增大不减,即$\overline{x_0}\leqslant\overline{x_1}\leqslant\cdots\leqslant\cdots$
而过剩近似$\overline{x_n}$,当n增大时不增,即$\overline{x_0}\geqslant\overline{x_1}\geqslant\cdots\geqslant\cdots$

命题:设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 为两实数,则 $x>y\Leftrightarrow\exists n$ 为正整数,使得 $x_n>\overline{y_n}$.

4. 实数性质

(1) 封闭性　实数集 **R** 对加、减、乘、除(除数不为 0) 四则运算是封闭的,即任意两个实数的和、差、积、商仍是实数

(2) 有序性　实数集是有序的,即任意两实数 a,b 必满足下述三个关系之一:$a<b,a>b,a=b$

(3) 传递性　实数的大小关系具有传递性,即若 $a>b,b>c$,则有 $a>c$

(4) 阿基米德性　实数具有阿基米德性,即对任何 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$

(5) 稠密性　实数集 **R** 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数也有无理数

(6) 一一对应关系　实数集 **R** 与数轴上的点有着一一对应关系

例 1　已知 $a>0,b>0,a+b=1$,求代数 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ 的最小值.

分析　该题利用了算术平均不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right)=\left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)$$

$$=5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 5+2\times 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=9$$

则此代数的最小值为 9.

数集·确界原理

区间	有限区间	开区间	设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,则称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**,记作 (a,b)
		闭区间	数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$
		半开半闭区间	数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$
	无限区间		$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$ $(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$,$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$ $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$ **这几类数集称为无限区间**
邻域	邻域		设 $a\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,满足绝对值不等式 $\mid x-a\mid<\delta$ 的全体实数 x 的集合,称为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a;\delta)$ 或 $U(a)$ 即有 $U(a;\delta)=\{x\mid \mid x-a\mid<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$
	空心邻域		**点 a 的空心邻域为** $U^0(a;\delta)=\{x\mid 0<\mid x-a\mid<\delta\}$
	右邻域		**点 a 的 δ 右邻域为** $U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$,记为 $U_+(a)$
	左邻域		**点 a 的 δ 左邻域为** $U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$,记为 $U_-(a)$
确界	上确界		设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 η 满足: ① 对一切 $x\in S$,有 $x\leqslant\eta$,即 η 是 S 的上界; ② 对任何 $a<\eta$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>a$,即 η 又是 S 的最小上界,则称 η 为数集 S 的**上确界**,记作 $\eta=\sup S$
	下确界		设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 ξ 满足: ① 对一切 $x\in S$,有 $x\geqslant\xi$,即 ξ 是 S 的下界; ② 对任何 $\beta>\xi$,存在 $x_0\in S$,使得 $x_0<\beta$,即 ξ 又是 S 的最大下界,则称 ξ 为数集 S 的**下确界**,记作 $\xi=\inf S$
(确界原理)设 S 为非空数集,若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界			

例 2 讨论数集 $N_+=\{n\mid n$ 为正整数$\}$ 的有界性.

分析 任取 $n_0\in N_+$,显然有 $n_0\geqslant 1$,所以 N_+ 有下界 1;

假设 N_+ 有上界 M,则 $M>0$,按定义,对任意 $n_0\in N_+$,都有 $n_0\leqslant M$,这是不可能的,如取 $n_0=[M]+1$(符号 $[M]$ 表示不超过 M 的最大整数),则 $n_0\in N_+$,且 $n_0>M$.

综上所述知:N_+ 是有下界无上界的数集,因而是无界集.

例 3 试证明:设数集 A 有上(下)确界,则这上(下)确界必是唯一的.

分析 设 $\eta = \sup A, \eta' = \sup A$ 且 $\eta \neq \eta'$,则不妨设 $\eta < \eta'$

由上确界定义可知,

同理,有 $\eta' = \sup A$,又因为 $\eta < \eta'$,

所以 $\exists x_0 \in A$ 使 $\eta < x_0$,

这与上确界定义矛盾,所以假设不正确,所以有 $\eta = \eta'$.

同理可证明下确界的唯一性.

小提示 同学们,这个命题可以直接拿来用哦!

函数概念

名称	定义	重点	备注
函数	给定集合 X,若存在某种对应规则 f,对于 $\forall x \in X$,存在唯一 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应,称 f 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数,记为 $y = f(x)$;X 称为**定义域**,x 称为**自变量**,y 为**因变量**,$\{f(x), x \in X\}$ 为**值域**	对应规则;定义域	
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含 $u = g(x)$ 的值域,则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$,即为 g 与 f 的**复合函数**,记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f\circ g$	对应规则;定义域;值域	结合律成立,$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$,但没有交换律
反函数	设 $y = f(x)$ 在 X 上是**一一对应的**,值域为 Y,$\forall y \in Y$,有满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应,由这样的关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$,就称为原函数 $y = f(x)$ 的**反函数**		$f: X \to Y$ $f^{-1}: Y \to X$ $f^{-1}(f) = I_X: X \to X$ $f(f^{-1}) = I_Y: Y \to Y$ $(f^{-1})^{-1} = f: X \to X$ I_X 表示 X 上恒同变换
初等函数	基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算后得到的函数	有限次复合	

例 4 求函数 $y = \dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2+3}}$ 的值域.

分析 利用换元法,令 $t = x^2 + 3$,则有 $y = \dfrac{t+4}{\sqrt{t}}$,

所以 $y = \sqrt{t} + \dfrac{4}{\sqrt{t}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{t} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{t}}} = 4$,

故函数的值域为 $[4, +\infty)$.

例 5 求函数 $f(x) = \begin{cases} x, x < 1 \\ x^2, 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2^x, x > 4 \end{cases}$ 的反函数.

分析 反函数的条件是：定义域与值域一一映射.

①$x<1$时，$f(x)=x$ $\therefore f^{-1}(x)=x$

②$1\leqslant x\leqslant 4$时，$f(x)=x^2$

$$x\in[1,4], f(x)\in[1,16] \quad \therefore x=\sqrt{f(x)}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

③$x>4$时，$f(x)=2^x$

同样满足定义域与值域一一映射的条件

$\therefore x=\log_2 f(x)$

即 $f^{-1}(x)=\log_2 x$

综上所述

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, x<1\\ \sqrt{x}, 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, x>16\end{cases}$$

例 6 设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域和 $f(f(-7))$.

分析 由题意可知

$$\begin{cases}3-x>0\\ 49-x^2\geqslant 0\\ 3-x\neq 1\end{cases}\Rightarrow -7\leqslant x<2 \text{ 或 } 2<x<3.$$

$\therefore$ 定义域为$[-7,2)\cup(2,3)$.

$\because f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}=1$

$\therefore f(f(-7))=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

具有某些特性的函数

有界函数	设 $f(x)$ 为定义 D 上的函数，若存在正数 M，使得每一个 $x\in D$ 有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 则称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**	$\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$，$\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)$
单调函数	设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对任何 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 ①$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**增函数**，特别当严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立时，称 $f(x)$ 为 D 上的**严格增函数**； ②$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**减函数**，特别当严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立时，则称 $f(x)$ 为 D 上的**严格减函数**	严格单调函数必有反函数

奇函数和偶函数	设 D 为对称于原点的数集，$f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对每一个 $x \in D$ 有 $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶(奇)函数**	
周期函数	设 $f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数，若存在 $\sigma > 0$，使得一切 $x \in D$，有 $f(x \pm \sigma) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，σ 称为 $f(x)$ 的一个**周期**	周期函数不一定有**基本周期**，如 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷函数

例 7 证明 $f:X \to \mathbf{R}$ 有界的充要条件为：$\exists M, m$，使得对 $\forall x \in X, m \leqslant f(x) \leqslant M$.

分析 ① 如果 $f:X \to \mathbf{R}$ 有界，由定义可得

$\exists M > 0, \forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leqslant M$，即 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$，

取 $m = -M, M = M$ 即可.

② 反之如果 $\exists M, m$ 使得 $\forall x \in X, m \leqslant f(x) \leqslant M$，令 $M_0 = \max\{|M|+1, |m|\}$，则 $|f(x)| \leqslant M_0$，即 $\exists M_0 > 0$，使得对 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leqslant M_0$，即 $f:X \to \mathbf{R}$ 有界.

例 8 验证函数 $f(x) = \dfrac{5x}{2x^2+3}$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

分析 解法一 由 $2x^2 + 3 = (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{3})^2 \geqslant 2|\sqrt{2}x \cdot \sqrt{3}| = 2\sqrt{6}|x|$，当 $x \neq 0$ 时，有

$$|f(x)| = \left|\frac{5x}{2x^2+3}\right| = \frac{5|x|}{2x^2+3} \leqslant \frac{5|x|}{2\sqrt{6}|x|} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \leqslant 3.$$

$$|f(0)| = 0 \leqslant 3,$$

$\therefore$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$，总有 $|f(x)| \leqslant 3$，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内有界.

解法二 令 $y = \dfrac{5x}{2x^2+3}$，$\Rightarrow$ 关于 x 的二次方程 $2yx^2 - 5x + 3y = 0$ 有实数根.

$\therefore \Delta = 5^2 - 24y^2 \geqslant 0, \Rightarrow y^2 \leqslant \dfrac{25}{24} \leqslant 4, \Rightarrow |y| \leqslant 2.$

解法三 令 $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\mathrm{tg}t, t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 对应 $x \in (-\infty, +\infty)$. 于是

$$f(x) = \frac{5x}{2x^2+3} = \frac{5\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{tg}t}{2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{tg}t\right)^2 + 3} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\mathrm{tg}t}{\mathrm{tg}^2 t + 1} = \frac{5}{\sqrt{6}}\,\frac{\sin t}{\cos t}\,\frac{1}{\sec^2 t}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{6}}\sin 2t, \Rightarrow |f(x)| = \left|\frac{5}{2\sqrt{6}}\sin 2t\right| \leqslant \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

例 9 证明：$y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增函数.

分析 设 $x_1 < x_2, x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$

如 $x_1x_2 < 0$，则 $x_2 > 0 > x_1 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

如 $x_1x_2 > 0$，则 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

故 $x_1^3 - x_2^3 < 0$，结论得证.

课后习题全解

实数(教材上册 P4)

1. 知识点拨 有理数的定义;反证法.

逻辑推理 利用有理数的定义表示出$a+x$,再根据a为有理数,推出x的表达式,而x为无理数,可得到矛盾的结论,所以命题得证.

解题过程 (1) $a+x$ 是无理数.

假设 $a+x$ 是有理数,则存在整数 p_1、q_1,$q_1\neq 0$,使得

$$a+x=\frac{p_1}{q_1} \quad ①$$

a 是有理数,则存在整数 p_2、q_2,$q_2\neq 0$,使得

$$a=\frac{p_2}{q_2} \quad ②$$

将式 ② 代入式 ① 得 $x=\dfrac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2}$

$p_1q_2-p_2q_1$,q_1,q_2 均为整数,$q_1q_2\neq 0$,因此 x 是有理数,与题设矛盾.

所以,$a+x$ 是无理数.

(2) 当 $a\neq 0$ 时,ax 是无理数.

采用与(1)类似方法,$a=\dfrac{p_2}{q_2}$,$ax=\dfrac{p_1}{q_1}$,p_2,q_2,q_1 均不为零.

得 $x=\dfrac{p_1q_2}{p_2q_1}$

p_1q_2,p_2q_1 均为整数,且 $p_2q_1\neq 0$,因此 x 是有理数,与题设矛盾.

所以,ax 是无理数.

2. 知识点拨 对不等式化简,找出零点,再在实数轴上表示出来.

逻辑推理 (1) $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

(2) 将不等式两边同时平方,去绝对值.

(3) 由平方根特性可知 $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$,对不等式两边同时平方,再化简.

解题过程 (1) 分解因式得 $x(x+1)(x-1)>0$

考虑方程 $x(x+1)(x-1)$ 的零点 $0,-1,1$,将数轴分为 4 部分,分别考虑 $x<-1$,$-1<x<0$,$0<x<1$,$x>1$.

经检验,$-1<x<0$ 或 $x>1$ 满足不等式.

因此该不等式的解为

> 小提示 对不等式化简时,平方根下的式子是否满足大于0,分母是否不等于0,移项是否要变号,这些都是易错的地方。

$$\{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$$

在数轴上表示，如图 1-1 所示.

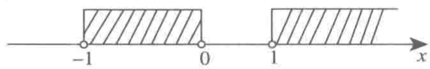


图 1-1

(2) 将不等式两边同时平方，得

$$(x-1)^2 < (x-3)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 6x + 9$$
$$4x < 8$$
$$x < 2$$

在数轴上表示，如图 1-2 所示.

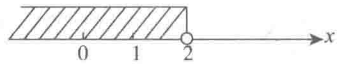


图 1-2

(3) 平方，得

$$3x - 2 - 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} \geqslant 3x - 2$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(2x-1)} \leqslant 0 \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = \frac{1}{2}$$

又 $\because \sqrt{3x-2} \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

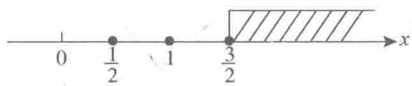


图 1-3

$\therefore x$ 无解

3. 知识点拨 实数集的有序性.

逻辑推理 若 $a \neq b$，则必有 $|a-b| > 0$，又由题目可知，

$\forall \varepsilon > 0$，有 $|a-b| < \varepsilon$，所以 $a \neq b$ 不成立.

解题过程 不妨设 $a \neq b$，由实数有有序性可知

$$|a-b| > 0, \text{令 } \varepsilon_1 = |a-b|,$$

又 $\because \forall \varepsilon > 0$，有 $\varepsilon_1 < \varepsilon$，这明显不成立.

$\therefore a \neq b$ 不成立

$\therefore a > b$，命题得证.

4. 知识点拨 可用多种方法解决.

逻辑推理 ①将不等式平方后展开，即可证明；②细心观察可发现当 $x = 1$ 时，不等式两边相等，考虑利用函数来解决问题.

解题过程 方法一：因 $0 \leqslant (|x|-1)^2 = x^2 + 1 - 2|x|$，则 $x^2 + 1 \geqslant 2|x|$，所以

$$\frac{x^2+1}{|x|} = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geqslant 2$$

当且仅当 $|x|=1$，即 $x=\pm 1$ 时，等号才成立.

方法二：令 $y=x+\frac{1}{x}, x>0$

对 y 求导，$y'=1-\frac{1}{x^2}$，

当 $x\in[0,1)$ 时，$\frac{1}{x^2}>1$. $\therefore y'<0$，$\therefore y$ 在 $[0,1]$ 为减函数.

当 $x=1$ 时，$y=2$

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\frac{1}{x^2}<1$. $\therefore y'>0$，$\therefore y$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数

$\therefore y=2$ 为极小值点

$\therefore x+\frac{1}{x}\geqslant 2, x>0$

当 $x<0$ 时，同理可证.

5. **知识** $|a|+|b|+\cdots+|n|\geqslant|a+b+\cdots+n|$

逻辑 直接由定理即可得.

解题 (1) $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1$

当且仅当 $x\in[1,2]$ 时，等式成立.

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|x-1|+|x-3|$

$\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2$

当且仅当 $x=2$ 时，等式成立.

6. **解题** 欲证 $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leqslant|b-c|$，

只需证 $(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2})^2\leqslant(b-c)^2$. 即证 $2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant-2bc$，

只需证 $a^2+bc\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$，即 $(a^2+bc)^2\leqslant(a^2+b^2)(a^2+c^2)$，

即证 $2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$.

由于 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$，所以 $2bc\leqslant b^2+c^2, a^2>0$，所以有 $2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$ 成立.

所以原不等式成立.

几何意义：二维平面上两点 $A(a,b)$，$B(a,c)$，A，B 到原点的距离分别为 $\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{a^2+c^2}$，A，B 两点间距离为 $|b-c|$，原不等式等价于 $|OA-OB|\leqslant|AB|$，即两边之差小于第三边.

在坐标系中表示，如图 1-4 所示.

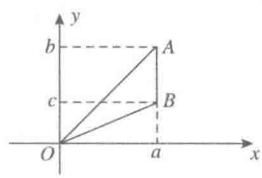


图 1-4

7. **解题** 若 $a<b$，因 $x>0, b>0$

所以 $\begin{cases} a+x<b+x, \\ ax<bx, \end{cases}$

由此可得 $\begin{cases} a+x<b+x, \\ ab+ax<ab+bx, \end{cases}$

变形得 $\begin{cases} \dfrac{a+x}{b+x}<1, \\ \dfrac{a+x}{b+x}>\dfrac{a}{b}, \end{cases}$

即 $\qquad \dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}<1$;

若 $a>b$,因 $x>0,b>0$.

所以 $\qquad \begin{cases}a+x>b+x,\\ ab+ax>ab+bx,\end{cases}$

即得 $\qquad 1<\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a}{b}$.

综合上述结果,结论成立.

8. 知识 反证法;有理数 a 满足 $a=\dfrac{m}{n}$,$mn>0$ 且 m,n 互质.

逻辑 该题的证明完全从有理数和质数的定义上去考虑,活用定义.

解题 不妨设$\sqrt{p}$ 为有理数.

小提示 若一个数能表示成某个自然数的平方的形式,则称这个数为完全平方数。

$\therefore \exists$ 整数 $m,n,mn>0$,且 m,n 互质,

使得$\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$,即 $p=\dfrac{m^2}{n^2}$.

$\because p$ 为正整数 $\quad \therefore pn^2=m^2$

即 $np(n)=m^2$

$\therefore n$ 与 m^2 有互,$\therefore n$ 与 m 不互质

这与假设矛盾

$\therefore \sqrt{p}$ 为无理数.

9. 知识 注意考虑 a,b 的正负.

逻辑 分情况讨论,去掉绝对值符号,化为一般不等式.

解题 (1) $\because |x-a|<|x-b|$,若 $x=b$,则无解.

$\therefore \dfrac{|x-a|}{|x-b|}<1\Rightarrow -1<\dfrac{x-a}{x-b}<1$

即$\begin{cases}\dfrac{x-a}{x-b}+1>0\\ -\dfrac{x-a}{x-b}+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>b\\ b-a<0\\ 2x-a-b>0\end{cases}$ 或$\begin{cases}x<b\\ b-a>0\\ 2x-a-b<0\end{cases}$

① 若 $a=b$,不等式无解

② 若 $a>b,x>\dfrac{a+b}{2}$

③ 若 $a<b,x<\dfrac{a+b}{2}$

(2) $\because |x-a|<x-b$

$\therefore x>b$

由(1) 可知,

当 $b>a$ 时,$x<\dfrac{b+a}{2}$,又 $\because x>b\therefore$ 无解.

当 $b<a$ 时,$x>\dfrac{b+a}{2}$,满足 $x>b$,$\therefore x>\dfrac{b+a}{2}$

(3) 当 $b\leqslant 0$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $b>0$ 时,原不等式等价于:$a-b<x^2<a+b$. 因此有

① 当 $a+b\leqslant 0$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$;

② 当 $a+b>0$ 时,

(ⅰ) 如果 $a>b$,则解为 $\sqrt{a-b}<|x|<\sqrt{a+b}$,

即 $\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$;

(ⅱ) 如果 $a<b$,则解为 $|x|<\sqrt{a+b}$,

即 $-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

数集 · 确界原理(教材上册 P9)

1. **解题** (1) 当 $1-x\geqslant 0$ 时,不等式化为 $1-x\geqslant x$,解为 $x\leqslant\frac{1}{2}$;

当 $1-x<0$ 时,不等式化为 $x-1\geqslant x$,无解.

综上所述,原不等式的解为 $x\leqslant\frac{1}{2}$.

用区间表示为 $x\in(-\infty,\frac{1}{2}]$.

(2) 两边同时平方,得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\leqslant 36$,

化简,得 $x^2+\frac{1}{x^2}-34\leqslant 0$,

分解因式得

$$\left[x-(17+12\sqrt{2})\frac{1}{x}\right]\left[x-(17-12\sqrt{2})\frac{1}{x}\right]\leqslant 0$$

即 $$\frac{1}{x^2}[x^2-(17+12\sqrt{2})][x^2-(17-12\sqrt{2})]\leqslant 0$$

$$17-12\sqrt{2}\leqslant x^2\leqslant 17+12\sqrt{2}$$

$$-3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant -3+\sqrt{8} \text{ 或 } 3-\sqrt{8}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{8}.$$

用区间表示为 $x\in[-3-\sqrt{8},-3+\sqrt{8}]\cup[3-\sqrt{8},3+\sqrt{8}]$.

(3) 作函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c),x\in\mathbf{R}$. 则由 $a<b<c$ 知

$$f(x)\begin{cases}<0,\text{当 } x\in(-\infty,a)\cup(b,c);\\=0,\text{当 } x=a,b,c;\\>0,\text{当 } x\in(a,b)\cup(c,+\infty).\end{cases}$$

因此 $f(x)>0$,当且仅当 $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$.

故原不等式的解集为

$$x\in(a,b)\cup(c,+\infty).$$

(4) 该不等式的解为 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

用区间表示为 $x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right],k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.