能力培养与标准化命题

初中代数 第四册

编写组顾问 崔孟明

逯新丽 赵兴业 梁子木 李丁一 编

中国环境科学出版社

能力培养与标准化命题

初中代数　第四册

编写组顾问　崔孟明

逯新丽　赵兴业　梁子木　李丁一　编

中国环境科学出版社

1988

内 容 简 介

本丛书是依据教学改革的精神及教学大纲的要求编写的。其基本特点是告诉读者在学习过程中需要培养什么能力，应该怎样培养这样的能力。全书包括常用对数、函数及其图象、解三角形三部分。每部分均介绍了知识脉络 、能力要求、能力训练、能力训练分析、自我反馈等内容。

本书适合中学师生及广大自学青年阅读。

能力培养与标准化命题

初中代数　第四册

编写组顾问　崔孟明

逯新丽　赵兴业　梁子木　李丁一　编

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区东兴隆街69号

冶金工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1988年10月第 一 版　　开本　787×1092　1/32

1988年10月第一次印刷　　印张　6 5/16

印数　1—91 150　　字数　126千字

ISBN 7-80010-226-2/G·045

定价：2.05元

前　言

《标准化训练与教学》丛书问世以后，受到广大读者的欢迎。该丛书之所以受到欢迎，是因为突出了“双基”训练和依据课本内容，介绍了标准化题型，因而有利于教学改革，有利于教学质量的提高。

今天再向广大读者奉献出一套《能力培养与标准化命题》丛书，使这两套丛书构成为姐妹篇，前者重在基础，介绍题型；后者重在提高，培养能力。

在教学过程中，培养能力的问题，是广大教育工作者努力探讨的新课题。培养什么能力，怎样培养，由于教学科目的不同，各有不同的要求和培养途径，但其中必有一些共性的东西。总结我们多年的教学经验，试着回答这一问题，作为抛砖引玉，这就是编写这套丛书的目的。

这套丛书是依据中、外学者的研究成果，如美国心理学家布鲁姆的认识理论，苏联教育家巴班斯基的最佳教学过程理论，并结合我国教学中的具体情况，把能力要求分为记忆理解、应用、分析综合与创见四部分。

这里说的“创见”是学生掌握基础知识的基础上，灵活运用所学知识的创见，借以提高学生的思维水平。我们认为，学生今天微小的创见，对社会主义建设将是一种无穷的创造力，因而不可忽视。

这套丛书各科均按单元编写，各单元含有“知识脉络”，讲明本单元知识的来龙去脉；“能力要求”，指明通过学习应当培养哪些能力；“能力训练”，给出适量的，按要求分类的训练题；“能力训练分析”，对能力训练题给出解答或分析，

并在适当的章节之后设有“自我反馈”和“能力测试评价表”，以使读者通过自我测试得到反馈，找到自己在学习中的优胜之处和不足之处，以发扬优胜，弥补不足，促进学习上的良性循环。

在这套丛书构思和编写过程中，特聘请特级教师崔孟明同志，作丛书编写组顾问予以指导。但由于编写这套丛书还是一种尝试，肯定有不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

1988年5月

目　　录

第十三章　常用对数

［知识脉络］

一、对数概念

上一章我们学过了指数。2的3次幂等于8，就记作$2^3=8$。一般地说，a的b次幂等于N，就记作$a^b=N$，其中a是底数，b是指数，N是幂。

一般地说，如果a（$a>0$，$a\neq1$）的b次幂等于N，就是$a^b=N$，这里数b就叫做以a为底的N的对数，记作$\log_a N=b$，其中a叫做底数（简称底），N叫做真数。

对数的性质：

1. 在$\log_a N=b$（$a>0$，$a\neq1$）中，总有$N>0$，即零和负数没有对数；
2. $\log_a a=1$（$a>0$，$a\neq1$），即底的对数等于1；
3. $\log_a 1=0$（$a>0$，$a\neq1$），即1的对数等于零；
4. $a^{\log_a N}=N$（$a>0$，$a\neq1$，$N>0$）

根据对数式的定义可知，对数式与指数式有着不可分割的关系。

指数式　$a^b=N$　a是底数　b是指数　N是幂

对数式　$\log_a N=b$　a是底数　b是对数　N是真数

因此，上述对数式的性质可根据指数式的性质得到。

二、积、商、幂、方根的对数

运算法则，其中$a>0$、$a\neq1$，$M>0$，$N>0$。

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^n = n\log_a M$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$$

这些运算法则是根据指数的运算法则而得出的，例如要证$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$，则可设$\log_a M = p$，$\log_a N = q$，转化为指数式，$M = a^p$　$N = a^q$，根据指数式的运算法则，可知

$M \cdot N = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$　再转化为对数式

可得　$\log_a MN = p + q$，从而得到

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

三、常用对数

1．常用对数的概念

以10为底的对数叫做常用对数。

这是一种常用的对数，因为我们通常用的数是10进制记数法，常用对数一般说成对数。

2．常用对数的性质

（1）真数较大时，对数也较大；

（2）10的整数次幂的对数是一个整数；

（3）一个正数，如果不是10的整数次幂，它的对数是一个小数。

3．对数的首数和尾数

（1）首数和尾数

所有正数的对数都可以写成一个整数（正整数、零或负整数）加上一个正的纯小数（或者零）的形式。

整数部分叫做这个对数的首数，正的纯小数（或者零）

部分叫做这个对数的尾数。

一个正数的对数由首数和尾数两部分组成。

（2）只有小数点位置不同的数，它们的对数的尾数都相同。

（3）确定首数的方法

方法一：用科学记数法表示真数时，10的整数次幂的大小就是首数的大小。

如$216.3=2.163\times10^2$的对数的首数是2。

$0.00315=3.15\times10^{-3}$的对数的首数是$-3$。

方法二：若真数大于等于1，则首数等于整数部分的位数减去1。

如3254.6有四位整数，则首数是$4-1=3$。

若真数是正的纯小数，则首数是负数，它的绝对值等于第一个不是零的数字前面的零的个数（包括小数点前面的零）。

如0.000432的对数的首数是-4。

（4）确定尾数

对数的尾数是查《对数表》得出的。

4．对数的记法

（1）首数是正数或零时，只要将首数、尾数加在一起即可。如$\lg 52.38$的首数是1，尾数是0.7192，所以$\lg 52.38=1.7192$。

（2）首数是负数时，将负号写在这个数的绝对值的上面，在小数点后写上尾数，如$\lg 0.0213$的首数是-2、尾数是0.3284，所以$\lg 0.0213=\overline{2}.3284$。

5．反对数表

已知一个数的对数，要求这个数时可利用反对数表。方

法如下：

根据对数的尾数查出真数所对应的数字，再根据首数确定真数的位数，正确点出小数点的位置，如 $\lg x=2.2735$，求x。根据尾数0.2735在反对数表中查出真数x所对应的数字是1877，由于它的首数是2，x应有3位整数，所以可求出$x=187.7$。若$\lg y=\bar{3}.2735$，则$y=0.001877$。

6．利用对数进行计算

对于比较复杂的乘、除、乘方、开方的计算，可以先取对数，利用积、商、幂、方根的对数运算法则，求出对数，再利用反对数表求出所得结果。

常用对数这一部分的要求是使学生理解常用对数的有关概念和基本性质，会查对数表和反对数表，会利用对数表进行简单的乘、除、乘方、开方计算。

四、基本技能

1．指数式与对数式的互化；

2．积、商、幂、方根的对数公式；

3．会求一个对数的首数；

4．会查对数表和反对数表；

5．会利用对数进行计算。

［能力要求］

一、记忆理解

1．对数的定义；

2．对数式与指数式的关系；

3．对数的性质；

4．积、商、幂、方根的对数公式；

5．常用对数的概念和性质；

6．求常用对数的首数和尾数的方法；

7．查对数表和反对数表的方法；

8．利用对数进行简单的乘、除、乘方、开方的计算。

例1． 把下列指数式化为对数式：

（1）$2^3=8$；（2）$3^{-2}=\frac{1}{9}$；

（3）$8^{2/3}=4$；（4）$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$

分析： 要把指数式化成对数式，必须具备的能力是记忆理解对数式的定义，表示法，指数式与对数式的关系，熟练进行指数式与对数式的互化　$a^b=N\Longleftrightarrow\log_a N=b$

解： (1) $2^3=8$的对数式是$\log_2 8=3$

(2) $3^{-2}=\frac{1}{9}$的对数式是$\log_3\frac{1}{9}=-2$

(3) $8^{2/3}=4$的对数式是$\log_8 4=\frac{2}{3}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$的对数式是$\log_{1/4}16=-2$

例2． 把下列对数式化为指数式

(1) $\log_2 16=x$；　(2) $\log_a 3=b$　；

（3）$\log_x a=-3$；　（4）$\log_3\frac{1}{81}=-4$、

分析： 本题需要的能力同例 1

解：（1）$\log_2 16=x$的指数式是$2^x=16$

（2）$\log_a 3=b$的指数式是$a^b=3$

（3）$\log_x a=-3$的指数式是$x^{-3}=a$

（4）$\log_3\frac{1}{81}=-4$的指数式是$3^{-4}=\frac{1}{81}$

解3. 求下列各式的值

（1）$\log_3 27$；　　（2）$\log_{1/2}4$；

（3）$\log_{10}0.001$；　　（4）$\log_2\frac{1}{16}$

分析： 本题是求对数，要理解对数的定义，指数式、对数式的关系，要求$\log_3 27$的值、就是求 3 的多少次方是 27。

解：（1）$\because 3^3=27$　　$\therefore \log_3 27=3$

（2）$\because \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$　　$\therefore \log_{1/2}4=-2$

（3）$\because 10^{-3}=0.001$　　$\therefore \log_{10}0.001=-3$

（4）$\because 2^{-4}=\frac{1}{16}$　　$\therefore \log_2\frac{1}{16}=-4$

例4. 求下列各式中的x

（1）$\log_2 x=4$　　（2）$\log_{1/2}x=-3$

（3）$\log_5 x=1$　　（4）$\log_{1/3}x=0$

分析： 记忆理解对数的定义，对数式与指数式的关系是求对数式中真数或对数的基础，$\log_2 x=4$中 的x是 $2^4=x$。

解：（1）$\because \log_2 x=4$　　$\therefore 2^4=x$　　$x=16$

（2）$\because \log_{1/2}x=-3$　$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=x$　$x=8$

（3）$\because \log_5 x=1$　　$\therefore 5'=x$　　$x=5$

（4）$\because \log_{1/3}x=0$　$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^0=x$　　$x=1$

说明： 理解对数的性质$\log_a a=1$即 底的 对 数 等 于1；

$\log_a 1=0$即1的对数等于0，（3）中x的对数是1，且底是5，可知$x=5$，（4）中x的对数是0、可知$x=1$，直接用性质可得（3），（4）中的x值。

例5. 求下列各式的值

（1）$3^{\log_3 10}$　　　　（2）$0.5^{\log_{0.5}4}$

分析： 理解对数的性质$a^{\log_a N}=N$，其中$a>0$、$a\neq 1$，$N>0$，式中指数式的指数是一个对数，且对数的底与指数的底相同，这个式子的值就是对数中的真数。

解：（1）$3^{\log_3 10}=10$

（2）$0.5^{\log_{0.5}4}=4$

例6. 用$\log_a x$，$\log_a y$、$\log_a(x+y)$，$\log_a(x-y)$表示下列各式、(其中x、y、$x+y$、$x-y$均大于零)

（1）$\log_a\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{x^2-y^2}}$　　（2）$\log_a\left(\dfrac{xy(x+y)}{x-y}\right)^2$

分析： 题目中的真数是由x、y、$x+y$，$x-y$的积，商、幂、方根所组成、因此解题时只须根据积、商、幂、方根的对数运算法则展开即可。要注意、只有积、商、幂、方根才能取对数，按法则展开。和、差的对数不能展开、即$\log_a(M\pm N)\neq\log_a M\pm\log_a N$、积、商的对数只能按法则展开，注意$\log_a MN\neq\log_a M\cdot\log_a N$　$\log_a\dfrac{M}{N}\neq\dfrac{\log_a M}{\log_a N}$，因此在对数计算时一定要紧扣法则。

解：（1）$\log_a\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{x^2-y^2}}$

$$=\frac{1}{3}\log_a\frac{x^2y}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{1}{3}[\log_a x^2+\log_a y-\log_a(x+y)$$

$$-\log_a(x-y)]$$

$$=\frac{1}{3}\log_a x^2+\frac{1}{3}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a(x+y)$$

$$-\frac{1}{3}\log_a(x-y)$$

(2) $\log_a\left[\frac{xy(x+y)}{x-y}\right]^2$

$$=2\log_a\frac{xy(x+y)}{x-y}$$

$$=2[\log_a x+\log_a y+\log_a(x+y)-\log_a(x-y)]$$

$$=2\log_a x+2\log_a y+2\log_a(x+y)$$

$$-2\log_a(x-y)$$

例7. 判断下列等式是否成立（其中$x>y>0$）

(1) $\log_a(x-y)=\log_a x-\log_a y$

(2) $\log_a(x-y)=\frac{\log_a x}{\log_a y}$

(3) $\log_a x-\log_a y=\frac{\log_a x}{\log_a y}$

(4) $\log_a x^n=(\log_a x)^n$

分析： 对数计算能力是中学数学中非常重要的能力、要提高对数计算能力，必须熟练掌握并理解对数的定义、性质和积、商、幂，方根的对数运算法则，特别是对法则的理解记忆一定要准确。如商的对数运算法则是$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-$

$\log_a N$，而对数的商$\frac{\log_a M}{\log_a N}\neq\log_a M-\log_a N$，$\log_a\frac{M}{N}\neq\log_a(M-N)$。幂的对数$\log_a x^n=n\log_a x$，但$\log_a x^n\neq(\log_a x)^n$准确运用法则一方面要准确理解记忆法则，另一方面注意避免容易混淆的式子。

解：（1）、（2）、（3）、（4）都不成立，它们都不符合运算法则。

例8. 选择填空、结论只有一个正确

若$a>0$且$a\neq1$、x、y都大于零、下面式子中正确的是（　）。

（A）$\log_a x^2\cdot\log_a y^2=\log_a(xy)^2$；

（B）$\log_a x^2\cdot\log_a y^2=(\log_a x\cdot\log_a y)^2$；

（C）$\log_a x^2\cdot\log_a y^2=2\log_a x\cdot\log_a y$；

（D）$\log_a x^2\cdot\log_a y^2=4\log_a x\cdot\log_a y$。

分析：本题是一个对数运算的问题，仍是考查对数计算的能力，应从对数运算的法则入手考虑这几个等式是否成立。

解：根据对数式的运算法则、可得

$$\begin{aligned}\log_a x^2\cdot\log_a y^2&=2\log_a x\cdot2\log_a y\\&=4\log_a x\cdot\log_a y\end{aligned}$$

因此（D）正确，（A）、（B）、（C）都不正确，

故选（D）。

例9. 写出下列各对数的首数

（1）lg324.5　　　　（2）lg20

（3）lg0.5　　　　（4）lg0.00382

分析：要理解记忆常用对数的首数的意义及求常用对数

首数的方法、要有迅速、准确地写出对数首数的能力。前面讲了两种确定首数的方法都应记住，并应理解这两种方法实质上是一样的。

解法一：

（1）$\because 324.5=3.245\times 10^{2}$

$\therefore \lg 324.5$的首数是 2

（2）$\because 20=2.0\times 10^{1}$

$\therefore \lg 20$的首数是 1

（3）$\because 0.5=5\times 10^{-1}$

$\therefore \lg 0.5$的首数是-1

（4）$\because 0.00382=3.82\times 10^{-3}$

$\therefore \lg 0.00382$的首数是-3

解法二：

（1）$\because 324.5>1$、有 3 位整数

$\therefore \lg 324.5$的首数是$3-1=2$

（2）$\because 20>1$　有 2 位整数

$\therefore \lg 20$的首数是$2-1=1$。

（3）$\because 0.5$是一个正的纯小数、且第一个不是零的数字前面有一个零，

$\therefore \lg 0.5$的首数是-1

（4）$\because 0.00382$是一个正的纯小数，且第一个不是零的数字前面有 3 个零，

$\therefore \lg 0.00382$的首数是-3。

例10. 写出下列各对数的首数和尾数

（1）$\lg a=5.0836$　（2）$\lg b=0.2173$

（3）$\lg c=\overline{2}.3087$（4）$\lg d=-2.3761$

分析： 因为一个正数的对数由首数和尾数两部分组成，

首数是一个整数，尾数是一个正的纯小数或零，所以应理解首数、尾数的概念，若已知一个对数时、能准确写出首数和尾数。如果已知对数的小数部分是正数或零，那么整数部分是首数，小数部分或零是尾数，如果已知对数的小数部分是负数、则需化为正数后再求首数和尾数，也是培养转化能力。

解： （1）$\lg a=5.0836$的首数是 5，尾数是0.0836，

（2）$\lg b=0.2173$的首数是 0、尾数是 0.2173，

（3）$\lg c=\bar{2}.3087$的首数是-2，尾数是0.3087，

（4）
$$\begin{aligned}\lg d&=-2.3761\\&=(-2)+(-0.3761)\\&=-2-1+1-0.3761\\&=-3+0.6239\\&=\bar{3}.6239\end{aligned}$$

$\therefore \lg d=-2.3761=\bar{3}.6239$的首数是$-3$，尾数是0.6239。

例11. 已知$\lg 1.795=0.2541$求下列各式的值：

（1）$\lg 17.95$　（2）$\lg 1795$　（3）$\lg 179500$

（4）$\lg 0.1795$　（5）$\lg 0.001795$

分析： 只有小数点位置不同的数，它们的对数的尾数都相同。是要记忆理解的重要结论。查对数表得到一个对数的尾数就是这个道理，此题所要求的对数中的真数与已知对数式中的真数只是小数点的位置不同，它们的尾数都相同，且都能从已知对数得到，而首数则可根据真数的小数点位置得出。

解： $\because \lg 1.795=0.2541$

$\therefore$（1）$\lg 17.95=1.2541$