幻中之幻

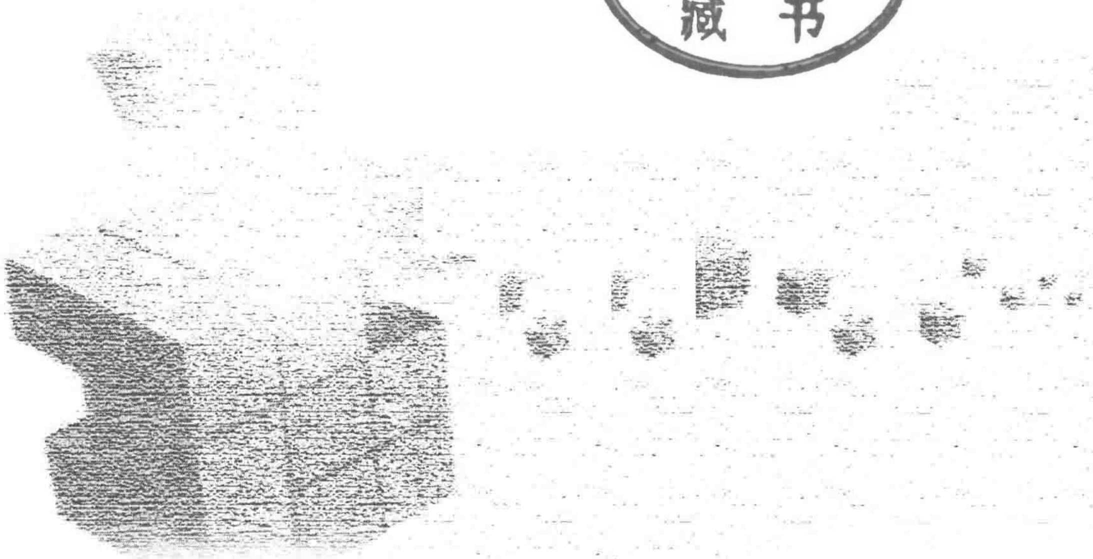
詹　森　詹晓颖◎著

幻方，中华传统文化之粹
全世界的人们都把它当宝，你又怎可不知
幻方神秘殿堂中有许多幻中之幻的迷人瑰宝
你不但可以登堂入室品尝这些五彩缤纷惊为天物的幻方
啧啧称奇之余，你亦能创造出更多瑰宝

中国出版集团
世界图书出版公司

幻中之幻

詹　森　詹晓颖◎著



中国出版集团
世界图书出版公司
广州·上海·西安·北京

图书在版编目（CIP）数据

幻中之幻 / 詹森，詹晓颖著 . —广州：世界图书出版广东有限公司，2016.1
ISBN 978-7-5192-0661-1

Ⅰ . ①幻…　Ⅱ . ①詹…②詹…　Ⅲ . ①组合数学—普及读物　Ⅳ . ① O157-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 014862 号

幻中之幻

策划编辑　江冉婷
责任编辑　黄　琼
出版发行　世界图书出版广东有限公司
地　　址　广州市新港西路大江冲 25 号
http:// www.gdst.com.cn
印　　刷　北京振兴源印务有限公司
规　　格　710mm × 1000mm　1/16
印　　张　15.75
字　　数　270 千
版　　次　2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
ISBN　978-7-5192-0661-1/O · 0049
定　　价　48.00 元

前　言

自《你亦可造幻方》(丛书："棘手又迷人的数学"，科学出版社 2012.3）一书出版以来，由于《你亦可造幻方》除第三部分"构造高阶幻方的加法"中的"构造 k^2 阶完美幻方"与"对称完美幻方的加法"这两章外，讲的是构造五大类奇数阶幻方的两（三）步法，所以一本讲述构造偶数阶主要类型幻方及"幻中之幻"幻方的著作，是读者也是笔者一种很自然的期待，是笔者的一种社会责任．经过近四年的努力，《幻中之幻》即将出版，笔者总算给读者也给自己有了一个交代．

《幻中之幻》一书承继《你亦可造幻方》一书的五个特点：①不是仅向读者展示要讲述的各类幻方，而是通过简单的图示法，让读者自己也能构造出该类幻方；②不是只构造出单个幻方，而是能构造众多的该类幻方；③不是只构造出指定阶数的该类幻方，而是能构造出任意阶的该类幻方；④这些方法都已给出理论证明，并发表在相关的刊物上；⑤所讲述的这些类型的"幻中之幻"，它们的构造方法许多都是未曾有人解决过的．

《幻中之幻》共三部分．第一部分，平面的幻中之幻．首先讲述构造双偶数阶最完美幻方的三步法，以其为基础在随后各章展开讲述构造最完美的易位幻方，最完美的砍尾巴幻方，最完美的掐头去尾幻方，由最完美幻方构成的幻矩形等等的方法．以构造奇数阶对称完美幻方的两步法为基础，讲述构造对称完美的易位幻方，对称完美的砍尾巴幻方，对称完美的掐头去尾幻方，由对称完美幻方构成的幻矩形等等的方法．

接着的两章，给出了构造阶数是 3 的倍数的奇数阶完美幻方的方法，连同《你亦可造幻方》一书中的构造奇数阶完美幻方的两步法．至此，构造任何奇数阶完美幻方的方法问题就得到了完全的解决．

由于构造奇数阶幻方的两步法的简单性，一个很自然的想法是，能否用两步法先

构造出一个奇数阶幻方，再在其基础上构造出一个偶数阶幻方？答案是可以的．那就是第一部分最后一章给出的构造单偶数阶幻方的四步法．由于其图解法中涉及一个局部的细微之处，读者要加以注意，如果想当然就会出错，这也是把它放在第一部分最后一章的原因之一．

第二部分，空间的幻中之幻，共六章．分别讲述奇数阶空间对称的幻立方，奇数阶空间对称截面完美的幻立方，奇数阶空间完美的幻立方，奇数阶空间对称完美的幻立方，双偶数阶空间更完美的幻立方，构造高阶 f 次幻立方的加法．既令读者接触幻方研究的前沿亦可自己动手去造．

第三部分，高次幻方．某些特定阶数的高次幻方是幻方研究的最前沿，在这方面，以中国幻方研究者协会为代表的幻方研究者们走在了世界的最前列．

由已知两个高次幻方构造出一个高阶同次幻方的方法，笔者已在《你亦可造幻方》构造高阶幻方的加法中给出，在“构造高阶 f 次幻方的加法”的论文中亦已给出理论证明．

由已知两个高次幻立方构造出一个高阶同次幻立方的方法，在第二部分第 17 章中也已给出，其理论证明类似于已发表的论文“构造高阶 f 次幻方的加法”中的证明．

高次幻方的研究，笔者还没有看到过系统的描述，更遑论就每一类问题的解决方法给出理论证明，这是人们继续探索的领域．

我们的这一部分，讲述构造 9 阶二次兼对称幻方及 8 阶二次兼完美幻方的方法，并探索有关机理，希望能对有兴趣的初次涉足者有些微启发．

我们以上讲述的这些类型的“幻中之幻”，中学水平的读者都可把玩．幻方好玩，你必会玩出名堂．

《幻中之幻》给出的方法显然不带唯一性，你同样可以玩出你的一套来．《幻中之幻》就是玩出来的．

目　录

第一部分　平面的幻中之幻

“平面的幻中之幻”与《你亦可以造幻方》（丛书：“棘手而又迷人的数学”，科学出版社，2012）一起，系统地解决了平面主要类型幻方如何构造的问题．当然，其中一些存在或不排除存在其他方法，但许多是在这里第一次得到了解决．

《你亦可以造幻方》一书中除了奇数阶基本幻方外，其他幻方由于对称性，完美性及更多的其他特性已可称为幻中之幻．本部分第一章讲述的最完美幻方顾名思义自然就是幻中之幻的瑰宝，而其他各章讲述的神奇幻方，幻矩形其结构就更复杂，各有各的神奇，各有各的精彩，故本部分取名为：平面的幻中之幻．

本部分除讲述构造最完美幻方的三步法和构造阶数为 3 的倍数的奇数阶完美幻方的五步法和六步法外，还讲述如何借助于两步法[1]构造易位幻方，对称完美的易位幻方；砍尾巴幻方，对称完美的砍尾巴幻方；掐头去尾幻方，对称完美的掐头去尾幻方；由完美幻方构成的幻矩形．如何借助于构造最完美幻方的三步法构造最完美的易位幻方，最完美的砍尾巴幻方，最完美的掐头去尾幻方，以及由最完美幻方构成的幻矩形．

由于构造奇数阶幻方的两步法的简单性，一个很自然的想法是，能否用两步法先构造出一个奇数阶幻方，再在其基础上构造出一个偶数阶幻方？答案是可以的．那就是第一部分最后一章给出的构造单偶数阶幻方的四步法．由于其图解法中涉及一个局部的细微之处，读者要加以注意，如果想当然就会出错，这也是把它放在第一部分最后一章的原因之一．

以上各章全部是创新性成果，以大众可以接受的方式表述，以利于普及与推广．

各类幻方或幻矩形的构造过程，全部以图表显示，并以灰方格标示关键位置及行列变换的过程或顺移的过程．

众所周知，构造偶数阶幻方比构造奇数阶幻方困难，构造偶数阶最完美幻方就更困难，本部分将向你展示，构造最完美幻方的三步法是如何解决这一问题的．据作者

所知，构造阶数为 3 的倍数的奇数阶完美幻方至今为止是一个几乎没有得到解决的问题，本部分亦将向你展示，构造阶数为 3 的倍数的奇数阶完美幻方的五步法和六步法又是如何解决这个问题的．

第 1 章　构造最完美幻方的三步法

如果在一个 n 阶幻方中的任意位置上截取一个 2×2 的小方阵，包括由一半在这个幻方的第 1 行（或第 1 列），另一半在幻方第 n 行（或第 n 列）所组成的跨边界 2×2 小方阵，其中 4 数之和都等于 $2(n^2+1)$．而在对角线或泛对角线上，间距为 $\frac{n}{2}$ 个元素的 2 个元素之和都等于 (n^2+1)（显然，后者保证了该幻方的完美性）．则这个幻方叫作 n 阶最完美幻方．前人已经证明，最完美幻方的阶数一定是 4 的倍数，即必定是双偶数．现有的构造最完美幻方的方法是把"可逆方"变成最完美幻方，不易为一般读者所接受，我们另辟蹊径用简单的三步达致目标．

1.1　4 阶最完美幻方

如何把 1 ～ 16 的自然数安装入 4×4 的方阵中，使之构成一个 4 阶最完美幻方？

1.1.1　最简单的 4 阶最完美幻方

第一步，安装 4 阶基方阵 A.

把 1 ～ 16 按从小到大均分为 4 组．第 1 列按自上而下的顺序安装自然数 1 ～ 4；第 2 列按自下而上的顺序安装自然数 5 ～ 8；第 4 列按自下而上的顺序安装自然数 9 ～ 12，第 3 列按自上而下的顺序安装自然数 13 ～ 16．所得到的 4 阶方阵叫作基方阵 A，基方阵 A 的每一行数字之和都等于幻方常数 34．如图 1-1 所示．

1	8	13	12
2	7	14	11
3	6	15	10
4	5	16	9

图 1-1　4 阶基方阵 A

第二步，对基方阵 A 做行变换，基方阵 A 上半部分不变，第 3, 4 行依次作为新方阵的第 4, 3 行，所得方阵记为 B. 如图 1-2 所示 .

1	8	13	12
2	7	14	11
4	5	16	9
3	6	15	10

图 1–2　行变换后所得方阵 B

第三步，方阵 B 偶数行左右两部分交换所得方阵记为 C, 所得的 4 阶方阵 C 就是一个 4 阶最完美幻方 . 如图 1-3 所示 .

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

图 1–3　4 阶最完美幻方

方阵 C 每一行，每一列上的 4 个数字之和都等于 34, 对角线或泛对角线上 4 个数之和亦都等于 34, 对角线或泛对角线上，间距为 2 个位置的 2 个数字之和都等于 16+1=17; 任意位置上截取一个 2×2 的小方阵，其中 4 数之和都等于 2（16+1）=34, 所以方阵 C 是一个 4 阶最完美幻方 .

1.1.2　4 阶最完美幻方

第一步，安装 4 阶基方阵 A.

把 1 ～ 16 按从小到大均分为 4 组 . 注意到 1 ～ 4 的自然数列中处于 “中心” 对称位置上的两个自然数，其和都等于 4+1=5, 我们共有 2 对这样的自然数 1,4 和 2,3, 在每对自然数中随意选取一个自然数，将这 2 个自然数随意排序，余下的 2 个自然数的排序必须使处于 “中心” 对称位置上的两个自然数，其和都等于 4+1=5. 比如我们取 2,4,1,3 这样的顺序，相应的自然数 5 ～ 8 重新按 2+4=6, 4+4=8, 1+4=5, 3+4=7 排序；自然数 9 ～ 12 重新按 2+2·4=10, 4+2·4=12, 1+2·4=9, 3+2·4=11 排序；自然数 13 ～ 16 重新按 2+3·4=14, 4+3·4=16, 1+3·4=13, 3+3·4=15 排序 .

与构造最简单的 4 阶最完美幻方的三步法的第一步相同，第 1 列自上而下按 2,4,1,3 的顺序安装 1 ～ 4 的自然数，第 2 列自下而上按 6,8,5,7 的顺序安装 5 ～ 8 的自然数；第 4 列自下而上按 10,12,9,11 的顺序安装 9 ～ 12 的自然数，第 3 列自上而下

按 14,16,13,15 的顺序安装 13 ～ 16 的自然数 . 所得到的 4 阶方阵叫作基方阵 A, 基方阵 A 的每一行数字之和都等于幻方常数 34. 如图 1-4 所示 .

2	7	14	11
4	5	16	9
1	8	13	12
3	6	15	10

图 1–4　4 阶基方阵 A

第二步， 对基方阵 A 做行变换 , 基方阵 A 上半部分不变 , 第 3,4 行依次作为新方阵的第 4,3 行 , 所得方阵记为 B. 如图 1-5 所示 .

2	7	14	11
4	5	16	9
3	6	15	10
1	8	13	12

图 1–5　行变换后所得方阵 B

第三步， 方阵 B 偶数行左右两部分交换所得方阵记为 C, 所得的 4 阶方阵 C 就是一个 4 阶最完美幻方 . 如图 1-6 所示 .

2	7	14	11
16	9	4	5
3	6	15	10
13	12	1	8

图 1–6　4 阶最完美幻方

方阵 C 每一行 , 每一列上的 4 个数字之和都等于 34, 对角线或泛对角线上 4 个数之和亦都等于 34, 对角线或泛对角线上 , 间距为 2 个位置的 2 个数字之和都等于 16+1=17; 任意位置上截取一个 2×2 的小方阵 , 其中 4 数之和都等于 2(16+1)=34, 所以方阵 C 是一个 4 阶最完美幻方 .

用三步法可构造出 $2^2 \cdot 2=8$ 个不同的 4 阶最完美幻方 . 不包括每一个 4 阶最完美幻方可以衍生出的 $4^2=16$ 个（包括这个 4 阶最完美幻方）4 阶最完美幻方 .

注意到每一个由三步法得到的 4 阶最完美幻方 , 如图 1-6, 其左半部分 2 列中 , 任意选取 1 列与与其相距 2 列的相应列做列交换 , 所得仍是一个 4 阶最完美幻方 . 即得出 $2^2-1=3$ 个不同的 4 阶最完美幻方（包括这个 4 阶最完美幻方）. 作为一个例子 , 如图 1-7 所示 .

2	11	14	7
16	5	4	9
3	10	15	6
13	8	1	12

图 1-7　对应列交换后所得 4 阶最完美幻方

又注意到每一个由三步法得到的 4 阶最完美幻方，如图 1-6, 其左半部分 2 列在左半部分中向右顺移，右半部分亦做相应的右移，所得仍是一个 4 阶最完美幻方 . 即得出 2 个不同的 4 阶最完美幻方（包括这个 4 阶最完美幻方）. 作为一个例子，如图 1-8 所示 .

7	2	11	14
9	16	5	4
6	3	10	15
12	13	8	1

图 1-8　左右两部分相应右移后所得 4 阶最完美幻方

所以由三步法实际上可构造出 $(2^2\cdot 2)(2^2-1)\cdot 2=48$ 个不同的 4 阶最完美幻方 .

1.2　8 阶最完美幻方

如何把 1 ～ 64 的自然数安装入 8×8 的方阵中，使之构成一个 8 阶最完美幻方？

1.2.1　最简单的 8 阶最完美幻方

第一步，安装 8 阶基方阵 A.

把 1 ～ 64 按从小到大均分为 8 组 . 第 1 列按自上而下的顺序安装自然数 1 ～ 8, 第 2 列按自下而上的顺序安装自然数 9 ～ 16, 第 3 列按自上而下的顺序安装自然数 17 ～ 24, 第 4 列按自下而上的顺序安装自然数 25 ～ 32;

第 8 列按自下而上的顺序安装自然数 33 ～ 40, 第 7 列按自上而下的顺序安装自然数 41 ～ 48, 第 6 列按自下而上的顺序安装自然数 49 ～ 56, 第 5 列按自上而下的顺序安装自然数 57 ～ 64. 所得到的 8 阶方阵叫作基方阵 A, 基方阵 A 的每一行数字之和都等于幻方常数 260. 如图 1-9 所示 .

1	16	17	32	57	56	41	40
2	15	18	31	58	55	42	39
3	14	19	30	59	54	43	38
4	13	20	29	60	53	44	37
5	12	21	28	61	52	45	36
6	11	22	27	62	51	46	35
7	10	23	26	63	50	47	34
8	9	24	25	64	49	48	33

图 1–9　8 阶基方阵 *A*

第二步，对基方阵 A 做行变换，基方阵 A 上半部分不变，第 5,6,7,8 行依次作为新方阵的第 8,7,6,5 行，所得方阵记为 B. 如图 1-10 所示 .

1	16	17	32	57	56	41	40
2	15	18	31	58	55	42	39
3	14	19	30	59	54	43	38
4	13	20	29	60	53	44	37
8	9	24	25	64	49	48	33
7	10	23	26	63	50	47	34
6	11	22	27	62	51	46	35
5	12	21	28	61	52	45	36

图 1–10　行变换后所得方阵 *B*

第三步，方阵 B 偶数行左右两部分交换所得方阵记为 C, 所得的 8 阶方阵 C 就是一个 8 阶最完美幻方 . 如图 1-11 所示 .

1	16	17	32	57	56	41	40
58	55	42	39	2	15	18	31
3	14	19	30	59	54	43	38
60	53	44	37	4	13	20	29
8	9	24	25	64	49	48	33
63	50	47	34	7	10	23	26
6	11	22	27	62	51	46	35
61	52	45	36	5	12	21	28

图 1–11　8 阶最完美幻方

方阵 C 每一行，每一列上的 8 个数字之和都等于 260, 对角线或泛对角线上 8 个数之和亦都等于 260, 对角线或泛对角线上，间距为 4 个位置的 2 个数字之和都等于 $8^2+1=65$; 任意位置上截取一个 2×2 的小方阵，其中 4 数之和都等于 $2(8^2+1)=130$, 所

以方阵 C 是一个 8 阶最完美幻方 .

1.2.2　8 阶最完美幻方

第一步，安装 8 阶基方阵 A.

把 1 ～ 64 按从小到大均分为 8 组 . 注意到 1 ～ 8 的自然数列中处于 “中心” 对称位置上的两个自然数，其和都等于 8+1=9, 我们共有 4 对这样的自然数 1,8; 2,7; 3,6 和 4,5, 在每对自然数中随意选取一个自然数，将这 4 个自然数随意排序，余下的 4 个自然数的排序必须使处于 “中心” 对称位置上的两个自然数，其和都等于 8+1=9. 比如我们取 7,3,4,8,1,5,6,2 这样的顺序，相应的自然数 9 ～ 16 重新按 7+8=15, 3+8=11, 4+8=12, 8+8=16,1+8=9, 5+8=13, 6+8=14, 2+8=10 排序；自然数 17 ～ 24 重新按 $7+2\cdot8=23$, $3+2\cdot8=19$, $4+2\cdot8=20$, $8+2\cdot8=24$, $1+2\cdot8=17$, $5+2\cdot8=21$, $6+2\cdot8=22$, $2+2\cdot8=18$ 排序；自然数 25 ～ 32 重新按 31,27,28,32,25,29,30,26 排序；自然数 33 ～ 40 重新按 39,35,36,40,33,37,38,34 排序；自然数 41 ～ 48 重新按 47,43,44,48,41,45,46,42 排序；自然数 49 ～ 56 重新按 55,51,52,56,49,53,54,50 排序；自然数 57 ～ 64 重新按 63,59,60,64,57,61,62,58 排序 .

与构造最简单的 8 阶最完美幻方三步法的第一步相同，第 1 列自上而下按 7,3,4,8,1,5,6,2 的顺序安装 1 ～ 8 的自然数，第 2 列自下而上按 15,11,12,16,9,13,14,10 的顺序安装自然数 9 ～ 16, 第 3 列自上而下按 23,19,20,24,17,21,22,18 的顺序安装自然数 17 ～ 24, 第 4 列自下而上按 31,27,28,32,25,29,30,26 的顺序安装自然数 25 ～ 32;

第 8 列自下而上按 39,35,36,40,33, 37,38,34 的顺序安装自然数 33 ～ 40, 第 7 列自上而下按 47,43,44,48,41,45,46,42 的顺序安装自然数 41 ～ 48, 第 6 列自下而上按 55,51,52,56,49,53,54,50 的顺序安装自然数 49 ～ 56, 第 5 列自上而下按 63,59,60,64,57,61,62,58 的顺序安装自然数 57 ～ 64. 所得到的 8 阶方阵叫作基方阵 A, 基方阵 A 的每一行数字之和都等于幻方常数 260. 如图 1-12 所示 .

7	10	23	26	63	50	47	34
3	14	19	30	59	54	43	38
4	13	20	29	60	53	44	37
8	9	24	25	64	49	48	33
1	16	17	32	57	56	41	40
5	12	21	28	61	52	45	36
6	11	22	27	62	51	46	35
2	15	18	31	58	55	42	39

图 1-12　8 阶基方阵 A