高等教育规划教材

数值计算方法习题及习题解答

第 2 版

马东升　董宁　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

ISBN 978-7-111-50912-7

高等教育精品教材推荐

封面设计 薛为

书名	作者	书号
C++程序设计教程——化难为易地学习C++	黄品梅	ISBN 978-7-111-33365-4
C++程序设计与实践	白忠建	ISBN 978-7-111-37604-0
Java 程序设计与应用开发	孙燮华	ISBN 978-7-111-44824-2
Java EE开发技术与实践教程	聂艳明	ISBN 978-7-111-48043-3
Java Web应用开发技术与案例教程	张继军	ISBN 978-7-111-44207-3
ASP.NET Web程序设计	祁长兴	ISBN 978-7-111-43160-2
Android应用程序开发	汪杭军	ISBN 978-7-111-46103-6
80x86汇编语言程序设计(第2版)	马力妮	ISBN 978-7-111-27286-1
数据结构与算法(第3版)	张小莉	ISBN 978-7-111-45795-4
数据结构与算法(Java版)	罗文劼	ISBN 978-7-111-42690-5
数据库系统原理及应用教程(SQL Server 2008)第4版	苗雪兰 刘瑞新	ISBN 978-7-111-45858-6
数据库原理及应用(SQL Server 2012)	陆 鑫	ISBN 978-7-111-49656-4
数据挖掘原理、算法与应用	梁亚声	ISBN 978-7-111-49632-8
计算机网络——原理、技术与应用(第2版)	王相林	ISBN 978-7-111-44520-3
计算机网络技术及应用(第2版)	莫卫东	ISBN 978-7-111-48994-8
TCP/IP协议分析及应用	杨延双	ISBN 978-7-111-20898-3
无线移动互联网——原理、技术与应用	崔 勇	ISBN 978-7-111-36023-0
计算机网络安全教程(第2版)	梁亚声	ISBN 978-7-111-24502-5
网络安全技术及应用(第2版)	贾铁军	ISBN 978-7-111-46983-4
物联网技术概论(第2版)	马 建	ISBN 978-7-111-48501-8
物联网导论	薛燕红	ISBN 978-7-111-45196-9
物联网概论	韩毅刚	ISBN 978-7-111-39540-9
软件开发技术基础(第2版)	赵英良	ISBN 978-7-111-26532-0
软件工程导论	陈 明	ISBN 978-7-111-28382-9
离散数学(第2版)	王元元	ISBN 978-7-111-28922-7
数字逻辑(第2版)	武庆生	ISBN 978-7-111-41926-6
操作系统原理	周 苏	ISBN 978-7-111-43389-7
Linux应用基础教程——Red Hat Enterprise Linux/CentOS 5	梁如军	ISBN 978-7-111-35895-4
Linux网络技术(第2版)	王 波	ISBN 978-7-111-50304-0
Linux系统与网络管理	崔连和	ISBN 978-7-111-45779-4
计算机组装、维护与维修教程	刘瑞新	ISBN 978-7-111-32804-9
单片机原理及应用教程(第3版)	赵全利	ISBN 978-7-111-40995-3
80x86/Pentium微机原理及接口技术(第3版)	余春暄	ISBN 978-7-111-49627-4
嵌入式系统原理及应用开发	陈 渝	ISBN 978-7-111-23424-1
嵌入式系统原理与应用	魏权利	ISBN 978-7-111-48650-3
计算机专业英语(第2版)	张强华	ISBN 978-7-111-48846-0
信息安全案例教程：技术与应用	陈 波	ISBN 978-7-111-49615-1
信息安全概论	李 剑	ISBN 978-7-111-26103-2
计算机系统安全原理与技术(第3版)	陈 波	ISBN 978-7-111-40967-0
防火墙技术与应用	陈 波	ISBN 978-7-111-40081-3
多媒体技术应用教程(第7版)	赵子江	ISBN 978-7-111-39525-6
项目管理与应用	周 苏	ISBN 978-7-111-49944-2
电子商务概论	高功步	ISBN 978-7-111-34821-4
数值计算方法习题及习题解答 (第2版)	马东升	ISBN 978-7-111-50912-7

图例说明：

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材　普通高等教育“十一五”国家级规划教材　北京高等教育精品教材

北京市高等教育精品教材立项项目　网上提供电子教案　附赠光盘

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649
网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.golden-book.com

机工教育微信服务号

上架指导 计算机
ISBN 978-7-111-50912-7
策划编辑◎王斌

ISBN 978-7-111-50912-7
9 787111 509127 >
定价：33.00元

高等教育规划教材

数值计算方法习题及习题解答

第2版

马东升　董　宁　编　著

机　械　工　业　出　版　社

本书是《数值计算方法（第 3 版）》的配套教材，内容包括数值计算引论、非线性方程的数值解法、线性代数方程组的数值解法、插值法、曲线拟合的最小二乘法、数值积分和数值微分、常微分方程初值问题的数值解法和试题及解答共 8 章。前 7 章每章均由内容提要、习题及解答、同步练习题及解答 3 部分组成，最后一章给出了 3 份试题样卷及解答。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生学习数值分析或计算方法的配套教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法习题及习题解答/马东升，董宁编著. —2 版. —北京：机械工业出版社，2015.7
高等教育规划教材
ISBN 978-7-111-50912-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①马… ②董… Ⅲ.①数值计算—计算方法—高等学校—题解 Ⅳ.①O241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 164865 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：王 斌 责任编辑：王 斌
责任校对：陈 越 责任印制：乔 宇
北京铭成印刷有限公司印刷
2015 年 10 月第 2 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 14 印张 · 340 千字
0001—3000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-50912-7
定价：33.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.golden-book.com

出版说明

当前，我国正处在加快转变经济发展方式、推动产业转型升级的关键时期。为经济转型升级提供高层次人才，是高等院校最重要的历史使命和战略任务之一。高等教育要培养基础性、学术型人才，但更重要的是加大力度培养多规格、多样化的应用型、复合型人才。

为顺应高等教育迅猛发展的趋势，配合高等院校的教学改革，满足高质量高校教材的迫切需求，机械工业出版社邀请了全国多所高等院校的专家、一线教师及教务部门，通过充分的调研和讨论，针对相关课程的特点，总结教学中的实践经验，组织出版了这套“高等教育规划教材”。

本套教材具有以下特点：

1）符合高等院校各专业人才的培养目标及课程体系的设置，注重培养学生的应用能力，加大案例篇幅或实训内容，强调知识、能力与素质的综合训练。

2）针对多数学生的学习特点，采用通俗易懂的方法讲解知识，逻辑性强、层次分明、叙述准确而精炼、图文并茂，使学生可以快速掌握，学以致用。

3）凝结一线骨干教师的课程改革和教学研究成果，融合先进的教学理念，在教学内容和方法上进行创新。

4）为了体现建设“立体化”精品教材的宗旨，本套教材为主干课程配备了电子教案、学习与上机指导、习题解答、源代码或源程序、教学大纲、课程设计和毕业设计指导等资源。

5）注重教材的实用性、通用性，适合各类高等院校、高等职业学校及相关院校的教学，也可作为各类培训班教材和自学用书。

欢迎教育界的专家和老师提出宝贵的意见和建议。衷心感谢广大教育工作者和读者的支持与帮助！

机械工业出版社

前 言

随着计算机技术和计算数学的发展，用计算机进行科学计算已成为与理论分析、科学实验同样重要的科学研究方法。科学研究和工程技术中提出的数学问题往往需要求出数值解，利用计算机求解各种数学模型数值解的计算方法是科学计算的核心，它已成为广大科学技术人员的必备知识，高等学校的许多专业已普遍将数值计算方法列入必修课或选修课。

本书按机械工业出版社 2015 年出版的《数值计算方法(第 3 版)》教材的章节顺序编写，内容包括数值计算引论、非线性方程的数值解法、线性代数方程组的数值解法、插值法、曲线拟合的最小二乘法、数值积分和数值微分、常微分方程初值问题的数值解法和试题及解答共 8 章。前 7 章每章均由内容提要、习题及解答和同步练习题及解答组成。

内容提要归纳了相关章节的基本内容，列出了主要知识点，包括基本概念，重要定理及推论，常用计算公式与误差分析等。

习题及解答对教材各章习题做了详细解答，对重点和难点习题进行了分析和讲解，有的给出了多种解法。

同步练习题精选了比较基础的有助于深入理解教材内容的练习题，并给出了分析和详细解答，同时也有少量内容较深的练习题，对学时少和课程要求低的只需要参考其中相对基础的内容。

第 8 章给出中等水平的 3 份试题样卷及解答，以供检验学习效果参考使用。

限于编者水平，谬误之处敬祈批评指正。

编 者

目　　录

第 1 章　数值计算引论

1.1　内容提要

一、误差的来源

数值计算主要研究以下两类误差。

1. 截断误差

数学模型的准确解与用数值方法求得的解的差称为截断误差，又称为方法误差。这种误差常常是在用有限过程代替无穷过程时产生的误差。例如，要计算级数

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

的值，当用计算机计算时，用前 n 项(有限项)的和

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

来代替无穷项之和，即舍弃了 n 项后边的无穷多项，因而产生了截断误差

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

2. 舍入误差

由于计算机字长为有限位，原始数据和数据四则运算过程中进行舍入所产生的误差称为舍入误差。例如，用 3.141 59 表示圆周率 π 时产生的误差 0.000 002 6…，用 0.333 33 表示 $1\div3$ 的运算结果时所产生的误差 $1\div3-0.333\,33=0.000\,003\,3\cdots$都是舍入误差。

二、近似数的误差表示

1. 绝对误差

设 x^* 是准确值 x 的一个近似值，称

$$e(x^*)=x-x^*$$

为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。

令 $|e(x^*)|$ 的一个上界为 ε^*，即

$$|e(x^*)|=|x-x^*|\leqslant\varepsilon^*$$

把 ε^* 称为近似数 x^* 的绝对误差限，简称误差限。

2. 相对误差

设 x^* 是精确值 x 的一个近似值，称

$$\frac{e(x^*)}{x}=\frac{x-x^*}{x}$$

为近似值 x^* 的相对误差。在实际应用中常取

$$e_r(x^*)=\frac{x-x^*}{x^*}$$

为 x^* 的相对误差。

令相对误差绝对值 $|e_r(x^*)|$ 的一个上界为 ε_r^*，即

$$|e_r(x^*)|=\frac{|x-x^*|}{|x^*|}\leqslant\varepsilon_r^*$$

把 ε_r^* 称为近似数 x^* 的相对误差限。

3. 有效数字

对有多位(有限位或无限位)数字的准确值按四舍五入原则得到其前若干位的近似值时，该近似值的绝对误差不超过末位的半个单位。

设数 x 的近似值 $x^*=\pm 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots\times 10^m$，其中 x_i 是 0~9 之间的任一个数，但 $x_1\neq 0,i=1,2,\cdots,m$ 是整数，若

$$|x-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

则称 x^* 为 x 的具有 n 位有效数字的近似值，x^* 准确到第 n 位，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 x^* 的有效数字。

有效数字位数越多，绝对误差越小。

4. 有效数字和相对误差

若近似值 $x^*=\pm 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots\times 10^m$ 具有 n 位有效数字，则其相对误差

$$|e_r^*|\leqslant\frac{1}{2x_1}\times 10^{-(n-1)}$$

有效数字位数越多，相对误差越小。

若近似值 $x^*=\pm 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots\times 10^m$ 的相对误差

$$|e_r^*|\leqslant\frac{1}{2(x_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$$

则该近似数 x^* 至少有 n 位有效数字。

三、数值计算误差分析

1. 函数运算误差

设一元函数 $f(x)$，自变量 x 的近似值为 x^*，函数 $f(x)$ 的近似值为 $f(x^*)$，则函数 $f(x)$ 的绝对误差限

$$\varepsilon[f(x^*)]\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$$

相对误差限

$$\varepsilon_r[f(x^*)]\approx\left|\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\varepsilon(x^*)$$

设多元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的近似值为 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$，函数 y 的近似值为 $y^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$，则函数 y 的绝对误差限

$$\varepsilon(y^*)=\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^*\right|\varepsilon(x^*)$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(y^*)=\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^*\right|\frac{\varepsilon(x^*)}{y^*}$$

上二式中

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^* = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i}$$

2. 算术运算误差

以 x_1，x_2 两数为例，设 x_1^*，x_2^* 分别为准确值 x_1 和 x_2 的近似值，其误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$和$\varepsilon(x_2^*)$，则

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_1^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_2^*| \varepsilon(x_1^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{|x_1^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_2^*| \varepsilon(x_1^*)}{(x_2^*)^2}, x_2^* \neq 0$$

四、数值稳定性和减小运算误差

1. 数值稳定性

在数值计算过程中，若舍入误差在一定条件下能得到控制，或者说舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则该计算是数值稳定的，否则是数值不稳定的。在实际计算时，要选用数值稳定的方法，不稳定的数值方法不能使用。

2. 减小运算误差

（1）避免相近的数相减，防止有效数字位数的损失。

（2）防止大数“吃掉”小数，保护重要的物理参数。

（3）绝对值小的数不宜做除数。

（4）简化计算步骤，减少运算次数。

1.2 习题及解答

1. 已知圆周率 $\pi = 3.141\ 592\ 654\cdots$，问：

（1）若其近似值取 5 位有效数字，则该近似值是多少？其误差限是多少？

（2）若其近似值精确到小数点后面 4 位，则该近似值是什么？其误差限是什么？

（3）若其近似值的绝对误差限为 0.5×10^{-5}，则该近似值是什么？

解 （1）近似值 $\pi^* = 3.141\ 6$，误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times10^{-4}$。

（2）和(1)相同，$\pi^* = 3.141\ 6$，$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times10^{-4}$。

（3）$\pi^* = 3.141\ 59$。

2. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似值，求各数的绝对误差限、相对误差限和有效数字的位数。

（1）3 580

解 绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2}\times10^0 = 0.5$。

相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{0.5}{3\ 580} = 1.4\times10^{-4} = 0.014\%$。

经过四舍五入得到的近似值3 580，其各位都是有效数字，故有4位有效数字。

（2）0.047 6

解 绝对误差限 $\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}\times10^{-4}=0.5\times10^{-4}$。

相对误差限 $\varepsilon_r^{*}=\frac{\varepsilon^{*}}{|x^{*}|}=\frac{0.5\times10^{-4}}{0.047\ 6}\approx0.001\ 05\approx0.11\%$。

经过四舍五入得到的近似值0.047 6，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为3位。

（3）30.120

解 绝对误差限 $\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}\times10^{-3}=0.000\ 5$。

相对误差限 $\varepsilon_r^{*}=\frac{\varepsilon^{*}}{|x^{*}|}=\frac{0.000\ 5}{30.120}=0.001\ 7\%$。

经过四舍五入得到的近似值30.120，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为5位。

（4）$0.301\ 2\times10^{-5}$

解 绝对误差限 $\varepsilon^{*}=\frac{1}{2}\times10^{-4}\times10^{-5}=0.5\times10^{-9}$。

相对误差限 $\varepsilon_r^{*}=\frac{\varepsilon^{*}}{|x^{*}|}=\frac{0.5\times10^{-9}}{0.301\ 2\times10^{-5}}=0.017\%$。

经过四舍五入得到的近似值 $0.301\ 2\times10^{-5}$，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为4位。

3. 确定圆周率π如下近似值的绝对误差限、相对误差限，并求其有效数字的位数。

（1）$\frac{22}{7}$

解 $\frac{22}{7}=3.142\ 857\cdots$，$\pi=3.141\ 592\cdots$。

$\left|\pi-\frac{22}{7}\right|=|3.141\ 592\cdots-3.142\ 857\cdots|=0.001\ 264\cdots$，取绝对误差 $e^{*}=0.001\ 3$，则相对误差

$$e_r^{*}=\frac{e^{*}}{|x^{*}|}=\frac{0.001\ 3}{\pi}=0.041\ 38\%$$

或取绝对误差限 $\varepsilon^{*}=0.005=\frac{1}{2}\times10^{-2}$。因为 $m=1$，$m-n=-2$，所以 $n=3$，有3位有效数字。此时相对误差限 $\varepsilon_r^{*}=\frac{\varepsilon^{*}}{|x^{*}|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{3.14}=0.159\%$。又解，相对误差限 $\varepsilon_r^{*}=\frac{1}{2\times3}\times10^{-(3-1)}=0.17\%$。前者比后者更精确。

（2）$\frac{223}{71}$

解 $\frac{223}{71}=3.140\ 84\cdots$，$\pi=3.141\ 59\cdots$。

$\left|\pi-\dfrac{223}{71}\right|=|3.141\,59\cdots-3.140\,84\cdots|=0.000\,75\cdots$，取绝对误差 $e^*=0.000\,76$。则相对误差

$$e_r^*=\frac{e^*}{|x^*|}=\frac{0.000\,76}{\pi}=0.024\,19\%。$$

或取绝对误差限 $\varepsilon^*=0.005=\dfrac{1}{2}\times10^{-2}$。因为 $m=1$，$m-n=-2$，所以 $n=3$，有 3 位有效数字。此时相对误差限 $\varepsilon_r^*=\dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}=\dfrac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{3.14}=0.159\%$。又解，相对误差限 $\varepsilon_r^*=\dfrac{1}{2\times3}\times10^{-(3-1)}=0.17\%$。前者比后者更精确。

(3) $\dfrac{355}{113}$

解 $\dfrac{355}{113}\approx3.141\,592\,92\cdots$，$\pi=3.141\,59\cdots$。

$\left|\pi-\dfrac{355}{113}\right|=|3.141\,592\,654\cdots-3.141\,592\,920\cdots|=0.000\,000\,266\cdots$，取绝对误差

$$e^*=0.000\,000\,267。$$

则相对误差 $e_r^*=\dfrac{e^*}{|x^*|}=\dfrac{0.000\,000\,267}{\pi}=0.000\,008\,5\%$。

或取绝对误差限 $\varepsilon^*=0.000\,000\,5=\dfrac{1}{2}\times10^{-6}$。因为 $m=1$，$m-n=-6$，所以 $n=7$，有 7 位有效数字。此时相对误差限

$$\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{-6}}{3.14}=0.000\,015\,9\%。$$

又解，相对误差限 $\varepsilon_r^*=\dfrac{1}{2\times3}\times10^{-(7-1)}=0.000\,017\%$。前者比后者更精确。

4. 设 $x=108.57\ln t$，其近似值 x^* 的相对误差 $e(x^*)\leqslant0.1$，证明 t^* 的相对误差 $e_r(t^*)<0.1\%$。

证 $e(x^*)=108.57(\ln t-\ln t^*)=108.57\ln\left(\dfrac{t}{t^*}\right)\leqslant0.1$

$$0<\frac{t}{t^*}\leqslant e^{\frac{0.1}{108.57}}$$

$$e_r(t^*)=\frac{t-t^*}{t^*}=\frac{t}{t^*}-1\leqslant e^{\frac{0.1}{108.57}}-1\approx9.21\times10^{-4}<0.1\%。$$

5. 要使 $\sqrt{6}$ 的近似值的相对误差限小于 0.1%，需取几位有效数字？

解 方法 1：因为 $\sqrt{6}=2.449\,4\cdots$，有 $x_1=2$，设近似值 x^* 有 n 位有效数字，由定理

$$\varepsilon_r^*=\frac{1}{2x_1}\times10^{-(n-1)}$$

有
$$\frac{1}{2\times 2}\times 10^{-(n-1)}<0.1\%$$
$$\frac{1}{4}\times 10^{-(n-1)}<1\times 10^{-3}$$
比较不等式$\frac{1}{4}<1$，所以有 $n-1=3$，$n=4$，故取 4 位有效数字，$x^*=2.449$。

方法 2：根据相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$，有 $\varepsilon^*=\varepsilon_r^*|x^*|$，所以
$$\frac{1}{2}\times 10^{-3}\times 2.4494\cdots=0.001\,224\,7\cdots<0.000\,5=\frac{1}{2}\times 10^{-3}=\varepsilon^*$$
即 $m-n=-3$，由于 $m=1$，所以 $n=4$，故取 $x^*=2.449$。

方法 3：解法 1 和解法 2 的结果都是偏于保守的。在解法 1 中，定理对所有具有 n 位有效数字的近似值都正确，故对误差估计偏大；在解法 2 中，取绝对误差限确定有效数字 n 也是偏大的。对于本例题，根据上述的结论，试取 3 位有效数字 2.45 进行试算，其相对误差
$$\frac{|\sqrt{6}-2.45|}{2.45}=0.000\,208<0.1\%$$
实际已满足要求。

6. 已知近似数 x^* 的相对误差限为 0.3%，问 x^* 至少有几位有效数字？

解 由 $\varepsilon_r^*=0.3\%$，根据定理，有
$$0.3\%=\frac{1}{2(x_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$$
x_1 的取值范围是 1~9，由于 x_1 未给出，若取 $x_1=1$，则 $n=2.92$；若取 $x_1=9$，则 $n=2.22$，按最不利的情况，x^* 至少有 2 位有效数字。

7. 设 $x>0$，其近似数 x^* 的相对误差限为 δ，求 $\ln x^*$ 的绝对误差限和相对误差限。

解 由函数运算的误差限 $\varepsilon[f(x^*)]\approx|f'(x^*)|\varepsilon^*$，并考虑到 $x>0$，有
$$\varepsilon(\ln(x^*))\approx(\ln x^*)'\varepsilon^*=\frac{\varepsilon^*}{x^*}=\delta$$
或解
$$\varepsilon(\ln x^*)=|\ln x-\ln x^*|=\left|\ln\frac{x}{x^*}\right|=\left|\ln\frac{x-x^*+x^*}{x^*}\right|$$
$$=\left|\ln\frac{x-x^*}{x^*}+1\right|=|\ln(\delta+1)|\approx\delta$$
由函数运算的相对误差限 $\varepsilon_r[f(x^*)]\approx\left|\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\varepsilon^*$，有
$$\varepsilon_r(\ln x^*)\approx\left|\frac{(\ln x^*)'}{\ln x^*}\right|\varepsilon^*=\frac{\varepsilon^*}{x^*}\left|\frac{1}{\ln x^*}\right|=\frac{\delta}{|\ln x^*|}$$

8. 计算球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 时，为使 V 的相对误差不超过 0.3%，问半径 r 的相对误差允许值是多少？

解 设半径 r 的近似值为 r^*，球体积 V 的近似值为 V^*。

方法 1：根据定义

$$e_r(V^*)=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi(r^*)^3}{\frac{4}{3}\pi(r^*)^3}=\frac{r^3-(r^*)^3}{(r^*)^3}$$

$$=\frac{r-r^*}{r^*}\frac{r^2+rr^*+(r^*)^2}{(r^*)^2}$$

注意到 $r\approx r^*$，有

$$e_r(V^*)\approx e_r(r^*)\frac{3(r^*)^2}{(r^*)^2}=3e_r(r^*)$$

令 $|e_r(V^*)|\approx|3e_r(r^*)|\leqslant 0.3\%$，可知半径 r 允许的相对误差 $|e_r(r^*)|\leqslant 0.1\%$。

方法 2：利用数值运算误差估计公式（下面公式用 r 和 V 表示也可）

$$\varepsilon(V)\approx\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'\varepsilon(r)=4\pi r^2\varepsilon(r)$$

$$|\varepsilon_r(V)|=\left|\frac{\varepsilon(V)}{V}\right|\approx\frac{4\pi r^2\varepsilon(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}=3|\varepsilon_r(r)|\leqslant 0.3\%$$

可得半径 r 的允许相对误差为

$$|\varepsilon_r(r)|\leqslant\frac{0.3\%}{3}=0.1\%$$

9. 真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，并设重力加速度 g 是准确的，而对 t 的测量有±0.1s 的误差，证明当 t 增加时，距离 s 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$，g 是准确的，得 $\mathrm{d}s=gt\mathrm{d}t$，因而

$$e(s^*)\approx gte(t^*)$$

$$e_r(s^*)\approx\frac{gte(t^*)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2}{t}e(t^*)$$

于是

$$|e(s^*)|\approx gt|e(t^*)|$$

$$|e_r(s^*)|\approx\frac{2}{t}|e(t^*)|$$

可见，当 $|e(t)|$ 固定时，$|e(s^*)|$ 随着 t 的增加而增加，而 $|e_r(t)|$ 却随着 t 的增加而减少。

10. 求积分值 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x,\quad n=0,1,\cdots,8$。

解 由

$$I_n+5I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^n+5x^{n-1}}{x+5}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$$

可得两个递推计算方法。

方法 1:
$$I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1},\ n=1,2,\cdots,8$$

方法 2:
$$I_{n-1}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}-I_n\right),\ n=8,7,\cdots,1$$

方法 1 的初值

$$I_0=\int_0^1\frac{1}{x+5}\mathrm{d}x=\ln 1.2=0.182\ 3$$

方法 2 的初值，利用广义积分中值定理

$$I_n=\frac{1}{\xi+5}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{\xi+5}\frac{1}{n+1},\ \xi\in[0,1]$$

所以

$$\frac{1}{6(n+1)}\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{5(n+1)}$$

取

$$I_8=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{54}+\frac{1}{45}\right)=0.020\ 37$$

取 4 位有效数字进行计算，其结果如表 1-1 所示。

表 1-1 计算结果

I_n	方法 1	方法 2	准确值	I_n	方法 1	方法 2	准确值
I_0	0.182 3	0.182 3	0.182 3	I_5	0.095 75	0.028 46	0.028 47
I_1	0.088 50	0.088 39	0.088 39	I_6	−0.312 1	0.024 39	0.024 33
I_2	0.057 50	0.058 04	0.058 04	I_7	−1.703	0.020 93	0.021 23
I_3	0.045 83	0.043 14	0.043 14	I_8	−8.392	0.020 37	0.018 84
I_4	0.020 85	0.034 31	0.034 31				

从计算结果可以看出，方法 1 在 I_6 时已为负值，显然与 $I_n>0$ 矛盾，事实上 I_4 和准确值相比已经连 1 位有效数字也没有了，这是因为当 I_0 带有 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$ 的误差时，这个初始数据的误差在以后的每次计算时顺次乘以 5^1，5^2，…而传播到 I_n 中，使得算到 I_4 就完全不准确了。方法 2 在初始值 I_8 时 1 位有效数字也没有，但倒推计算到 $I_4,I_3,\cdots,I_0$ 时各位都是有效数字，这是因为递推公式的误差是按 $\frac{1}{5^n}$ 减少的，是稳定的计算公式。

11. 设 $a=1\ 000$，取 4 位有效数字用如下两个等价的式子

$$x=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\quad 和\quad x=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

进行计算，求 x 的近似值 x^*，并将结果与准确值 $x=0.015\ 807\ 437\cdots$ 比较，各有多少位有效数字。

解 将 $a=1\ 000$ 代入，取 4 位有效数字，有

$$x^*=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=\sqrt{1\ 000+1}-\sqrt{1\ 000}=31.64-31.62=0.02$$

$$x^*=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{1\ 000+1}+\sqrt{1\ 000}}=\frac{1}{31.64+31.62}=0.015\ 81$$

与准确值 $x=0.015\ 807\ 437\cdots$ 比较，因前者出现相近数相减，计算结果只有 1 位有效数字，后者没有相近数相减，有 4 位有效数字。

12. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取 $\sqrt{2}\approx1.4$，利用下列等价的式子计算，得到的哪一个结果最好？

（1）$\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$；（2）$(3-2\sqrt{2})^3$；（3）$\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$；（4）$99-70\sqrt{2}$

解 (4)中公式和(2)中公式出现相近数相减，且(2)中公式计算量比(4)中公式大，二者都不可能得到好的运算结果。(1)中公式和(3)中公式均不出现相近数相减，但(1)中公式乘法运算次数比(3)中公式多，而二者除法运算次数相同，故(1)中公式的计算量比(3)中公式大，每次乘除法运算都可能引入新的舍入误差，故只有(3)中公式能给出好的运算结果。

对上述结论可进一步验证，按 4 种方法计算所得结果为

$$0.005\ 232\ 78,\ 0.008,\ 0.005\ 125\ 261,\ 1$$

和准确值 0.005 050 633…相比，确实方法(3)最好。

给出的 4 个计算公式是相互恒等的。

$$(\sqrt{2}-1)^6=\frac{(\sqrt{2}-1)^6(\sqrt{2}+1)^6}{(\sqrt{2}+1)^6}=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$$

$$(\sqrt{2}-1)^6=[(\sqrt{2}-1)^2]^3=(3-2\sqrt{2})^3=99-70\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^6=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}=\frac{1}{[(\sqrt{2}+1)^2]^3}=\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$$

但选择的计算方法不同所得结果却有很大差异，这也说明在选择方法时应考虑运用能够减小运算误差的原则。

13. 利用四位数学用表求 $1-\cos2°$，比较不同方法计算所得结果的误差。

解 用四位数学用表直接计算

$$1-\cos2°\approx1-0.999\ 4=0.000\ 6$$

只有 1 位有效数字。

改用如下两种方法计算

$$1-\cos2°=\frac{\sin^2 2°}{1+\cos2°}\approx\frac{0.034\ 90^2}{1.999\ 4}\approx6.092\times10^{-4}$$

具有 4 位有效数字。

$$1-\cos2°=2\sin^2 1°\approx6.09\times10^{-4}$$

具有 3 位有效数字。

准确值 $1-\cos2°=6.091\ 7\cdots\times10^{-4}$，故以上三种计算方法的误差限分别是 0.1×10^{-4}，$0.000\ 3\times10^{-4}$，0.002×10^{-4}。

14. 用消元法解线性方程组

$$\begin{cases}x+10^{15}y=10^{15}\\x+y=2\end{cases}$$

若只用 3 位数计算，结果是否可靠？

解 用方程组的上式减下式，得

$$(10^{15}-1)y=10^{15}-2$$

即

$$y=\frac{10^{15}-2}{10^{15}-1}$$

再将方程组的下式乘以 10^{15},减去上式,可得

$$(10^{15}-1)x=10^{15}$$

从而有

$$x=\frac{10^{15}}{10^{15}-1}$$

假定只用 3 位数计算，则通过上述消元过程分别得到的方程组是

$$\begin{cases}10^{15}y=10^{15}\\10^{15}x=10^{15}\end{cases}$$

从而得到原方程的解为

$$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

这个结果显然不可靠，因为在消元过程中发生了大数“吃掉”小数的现象。

15. 对反双曲正弦函数 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 $f(30)$ 的值。若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大。若改用另一等价公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 计算，问求对数时误差有多大。

解 对于反双曲正弦函数 $f(30)=\ln(30-\sqrt{30^2-1})$，记 $a=30-\sqrt{899}$，若用 6 位的开平方函数表，则有

$$a^*=30-29.983\,3=0.016\,7$$

故有绝对误差

$$\varepsilon(a^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}，而 f(30)\approx\ln a^*$$

于是有

$$\varepsilon[f(30)]=\varepsilon(\ln a^*)\approx\left|\frac{1}{a^*}\right|\varepsilon(a^*)=\frac{0.5}{0.016\,7}\times10^{-4}\approx0.003$$

对于等价公式有

$$f(30)=-\ln(30+\sqrt{30^2-1})$$

记 $b=30+\sqrt{899}$，若用同样的 6 位的开平方函数表，有

$$b^*=30+29.983\,3=59.983\,3$$

进而得到绝对误差

$$\varepsilon(b^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

而 $f(30)\approx\ln b^*$，使用误差传播公式