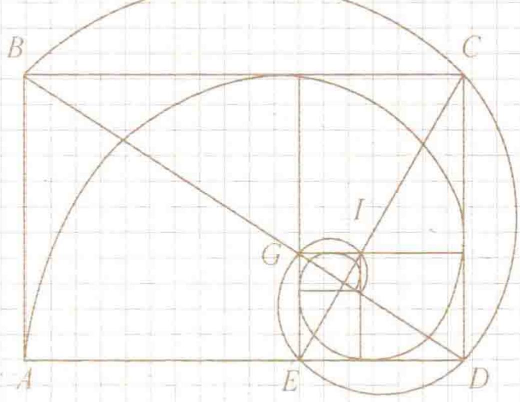
探秘数学常数

陈梅 陈仁政 主编

奥妙无穷的
黄金分割

陈雪 黎渝 著



中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

探秘数学常数

陈梅 陈仁政 主编

奥妙无穷的

黄金分割

陈雪 黎渝

著

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

奥妙无穷的黄金分割 / 陈梅，陈仁政主编 ；陈雪，黎渝著. -- 北京 ：人民邮电出版社，2016.4
（探秘数学常数）
ISBN 978-7-115-41757-2

Ⅰ. ①奥… Ⅱ. ①陈… ②陈… ③陈… ④黎… Ⅲ. ①黄金分割法－普及读物 Ⅳ. ①O224-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第046907号

内 容 提 要

公元前6世纪，古希腊著名数学家毕达哥拉斯创立了毕氏学派。在毕氏学派众多辉煌的成就当中，暗含黄金分割比例的正五边形作图法更加璀璨夺目。自此以后2000多年，黄金分割及由此而来的黄金螺线和斐波那契数列引起了无数著名数学家、科学家、艺术家、建筑师等的极大兴趣，各种著述层出不穷，并在各个科学和艺术领域以及人们的生活中得到了广泛应用。人们在自然现象中也发现了黄金分割的踪迹。这就是本书所要介绍的内容。

“我喜欢在深夜拨弄心弦，弦上黄金分割不止一点。”相信读了这本书，你会成为这样的“φ迷”。

本书适合广大数学爱好者阅读。

◆ 主　编　陈　梅　陈仁政
著　陈　雪　黎　渝
责任编辑　刘　朋
执行编辑　杜海岳
责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路11号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：17
字数：322千字　2016年4月第1版
印数：1-3 000册　2016年4月河北第1次印刷

定价：39.00元

读者服务热线：(010)81055410　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第8052号

编 委 会

前　言

著名数学家哥德尔 18 岁进入维也纳大学时学习的是理论物理专业，他常到位于维也纳第九区斯特鲁德尔霍夫大街 4 号的理论物理研究所 4 楼的大教室聆听奥地利物理学家蒂林的课。有一次，他参加了德国哲学家、物理学家施里克介绍罗素数论著作的研讨会，由此对数理逻辑产生了浓厚的兴趣。数的吸引力如此之大，竟致哥德尔改换门庭。入校两年后，哥德尔放弃了物理学专业，改学数学。5 年以后的 1931 年，25 岁的哥德尔发表了震惊数学界的不完备定理。而在今天，用他的姓氏命名的哥德尔奖从 1993 年起每年都在颁发。

提到数学，我们自然无法回避数学常数。最著名的数学常数当属圆周率 π、黄金分割数 φ 和自然对数的底 e。以色列数学史家马奥尔在《无穷之旅——关于无穷大的文化史》一书中称它们为"3 个著名的无理数"。在美国加州谷歌公司总部的 4 座办公大楼中，有 3 座是以这 3 个数学符号命名的。当然，数学中重要的常数远不止于此。

数学常数是古老而又年轻的数论的重要组成部分。虽然截至目前已经取得了许多重大的数论研究成果，但是还有不少谜团让人看朱成碧，不辨五色。正如日本著名数学家弥永昌吉所说，数论的"大部分仍然笼罩在神奇的面纱之下"。因此，需要我们继续不断探索。"苔花如米小，也学牡丹开。"本丛书作者虽然明知力所不逮，但凭借着对数学常数的浓厚兴趣，自 1982 年开始，断续经过 33 年的努力，终于编写成了这套系统介绍数学常数的普及读物。这套书包括《说不尽的圆周率》《不可思议的自然对数》《奥妙无穷的黄金分割》《妙趣横生的数学常数》。

虽然目前国内外出版了一些介绍上述三大数学常数的图书，但总体来说不够系统全面，许多有趣的知识没有罗列其中。本套图书希望能在以下方面做出

有益探索。

首先，本套图书以 π、ϕ、e 等主要的数学常数为主线，但又不限于此，内容涵盖重要数学概念和数学思想的形成、著名公式和定理的证明以及它们在各学科和生活中的应用。单是书中涉及的数学家以及相关的科学家、哲学家等就有 2000 多位，读者可以从书中了解这些著名人物在数学研究中艰难的探索历程（而心怀感恩之情）、所取得的重要成果以及逸闻趣事。

其次，本套图书在化繁为简、深入浅出方面进行了积极的尝试，力求消除“数学是可怕的学科”这样的误解，把“可怕”变为“可爱”，让读者充分感受到数学之真、之美、之乐、之用，感受到数学的魅力。中国数学家张景中在其所著的《数学与哲学》一书开篇就指出：“联系数学的发展历史学习数学哲学，有趣又有效。”在编写过程中，作者也尽力将数学史和科学史内容融入书中，从而梳理出重要数学思想或者数学定理的发展脉络，以及著名数学难题的求解历程。读者感受到的将不再是仅以定理、证明、计算面孔出现的枯燥乏味的脑力训练，而将看到一个有血有肉、充满活力与无限乐趣的新形象。

再次，知识驱动着人类文明的发展，数学作为我们理解和探索科学以及世界的重要工具发挥了重要作用。知识的获取过程是艰辛的，但也充满着乐趣，数学更是如此。本套图书在介绍数学知识之外，更加注重表现数学家的优秀品质以及探索精神，希望读者在享用前人所留下的宝贵精神财富的同时能有一些感触或感悟。

除了作者团队的协作与努力之外，许多专家、学者、朋友及相关人士也对本套图书的编写与出版给与了帮助。在此感谢张景中、李敏、郭书春、宁挺、梁宗巨、张奠宙、查有良、吴振奎、丘和、曾润生、王青建、邹大海、彭定才、潘宁、邓文华、陈文伟、贾小勇、吴至友、罗明、安克·毛雷尔等。由于篇幅所限，还有不少人士的姓名在此未能提及，一并表示感谢。

限于作者的陋见，书中难免存在疏漏与不当之处，请读者批评指正。

爱因斯坦说：“不要担心你在数学上遇到的困难，我敢保证我遇到的困难比你大得多。”让我们以此共勉，并慢慢爱上有趣又好玩的数学吧。

编者

目　录

第1章

毕氏学派——“暗藏黄金”两千年

月落乌啼，总是千年的风霜。涛声依旧，不见当初的夜晚。

——《涛声依旧》歌词

古希腊人创造的无与伦比的精神文明，遍及人类活动的方方面面，其中也包括数学。在古希腊浩瀚灿烂的数学星空中，有一颗璀璨的明星，千百年来一直闪耀着光芒。

1.1 临终遗图和洞口的大汉

1. 临终遗图谜案

“请你……在……在……”某个学派的一名成员流落异乡，贫病交迫，无力酬报房主的殷勤照顾，他在临终的时候有气无力地恳求房主，“在……门口刻下……这个图形……”

善良的房主照办了，在自己的大门上刻下了死者要求的那个图形。

岁月轮回。若干年以后，这个学派的其他成员偶然来到这里，见到了这个图形。他们询问了事情的经过之后，用重金厚报房主而去。

那么，这些成员是怎么知道同伴曾在此居留过呢？这个图形是什么，为什么有这么大的魅力呢？这个学派叫什么名字呢？这些问题将在这一章给出答案。

2. 洞口的彪形大汉

距今两千多年以前的一个夜晚，在今天意大利半岛南端的一个山洞口，两个彪形大汉紧把洞门。夜幕降临了，数以百计的人鱼贯而入。不过，在入洞之前，他们都要伸开右手，让两个大汉验明正身，否则就会吃闭门羹。

接下来，就是洞中神秘的集会……

那么，这些人的右手心上有什么秘密呢？洞里是什么神秘的集会？这些问题也将在这一章给出答案。

1.2 半岛南端的神秘学派

1. 不凡的毕达哥拉斯

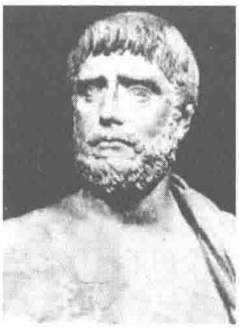
（1）出生在小岛上的数学奇才

在古希腊灿烂的数学星空中，有一颗璀璨的明星——西方理论数学的创始人毕达哥拉斯（本书以下简称毕氏，但引用的原文除外）。

在亚洲西部，有一个著名的小亚细亚半岛。这个半岛北、南分别濒临黑海和地中海，而西边则是爱琴海。在靠近小亚细亚西岸的爱琴海中，有一个名叫萨摩斯的小岛。约公元前580年，毕氏就出生在这个今天属于希腊的小岛上。

（2）漫漫求学路

早年的毕氏曾拜古希腊数学之父、大哲学家泰勒斯为师，学习几何学和哲学。毕氏还在爱琴海中的锡罗斯岛向思想家费雷西底学习，也曾师从伊利亚学派的哲学家安纳西曼德——绘制世界上第一张全球地图的人。为了进一步求学，毕氏游历埃及（住了20多年，其中和一位祭司的表妹共同生活了大约10年）、巴比伦（一说到过更远的印度），大约在公元前530年返回萨摩斯岛并开始讲学。

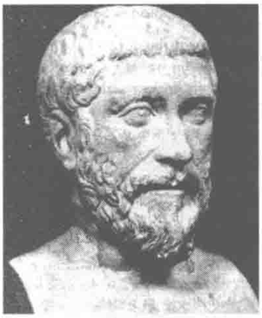


泰勒斯

费雷西底

安纳西曼德

然而，由于当时萨摩斯岛的海盗和僭主（非法就位的统治者）波利克拉底的暴政，毕氏携母亲和唯一的一个门徒离开萨摩斯岛，移居西西里岛，最后定居意大利半岛南端的克罗托内。此时，他已过知天命之年。



毕氏

（3）创立神秘的毕氏学派

毕氏到了克罗托内之后就一面讲学一面广收门徒，并在大约公元前530年建立了一个秘密的宗教、政治、学术三合一的团体——友谊联盟，后人称之为毕氏学派、毕氏学校或毕氏众议院。

毕氏的讲学吸引了各个阶层的大量听众，特别是社会的上层人士。当时，妇女是被禁止出席公开会议的，但毕氏打破了这个清规戒律，允许她们听讲。在这些热心听讲的妇女中，有房主米洛的女儿西雅娜。后来，这位绮年玉貌的西雅娜成了毕氏的妻子和贤内助，还为他写过传记，但可惜已经失传。

毕氏把毕氏学派分为两等。一等是大多数的普通听众，他们只能听一般知识的讲授，不能发问，更不能参加讨论。另一等才是真正的毕氏学派核心成员——获得较高深知识的300多个有社会地位和学问的人。毕氏学派组织严密，每个加入者都要接受长期的训练和考核，遵守许多清规戒律，并宣誓永不泄露学派的秘密和学说，否则将受到严厉的惩罚。他们在学术上也要达到一定的水平。加入者还要通过一系列的神秘仪式，以求达到心灵的净化。他们相信依靠数学——学派教义的组成部分，可以使灵魂升华，与“上帝”融为一体；认为“万物皆数”——万物都包含数，而且万物都是数，所以数是万物的本质；“上帝”就是用数来统御宇宙的。

毕氏学派的成员有共同的哲学信仰和政治理想，虽饮食简单，但训练严格。学派教义鼓励大家自制、清心寡欲、纯洁、服从。他们起初在大希腊（今意大利南部一带）赢得了很高的声誉，产生过很大的政治影响。

不幸的是，约公元前500年，毕氏最终死于民主派暴徒的一次追杀袭击中。

阿尔希塔斯

2. 毕氏学派的主要成员和数学成就

在近两个世纪的活动中，毕氏学派中诞生了众多留名至今的著名数学家：希帕索斯、西奥多罗斯、阿尔希塔斯与菲洛劳斯……

毕氏本人并没有留下什么著作，而学派内经过门徒讨论、研究的成果由领导人加以总结后又秘而不宣，所以外人很少知道详细情形。这样，后来人很难分清哪些成果属于毕氏本

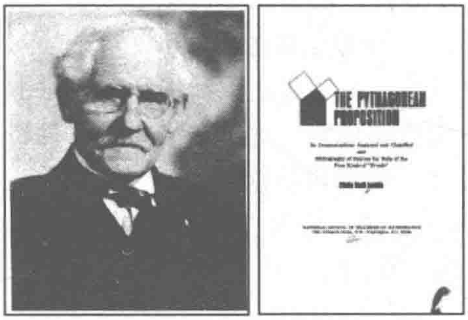
人，哪些属于他的门徒。不过，在毕氏学派的成员被逐渐分散以后的约公元前 370 年，哲学家、思想家菲洛劳斯写成了至今只存有少量片断的一部公开著作。加上后来学者们的研究，毕氏和毕氏学派的主要成就才逐渐被后世所认识。

（1）开创了把几何问题与数的性质问题结合起来的研究方法

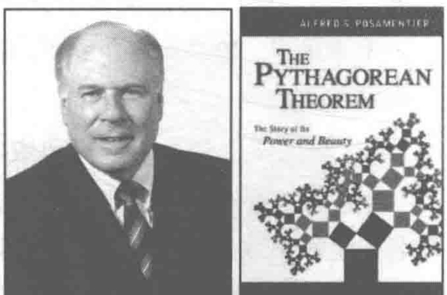
这种方法使抽象的数论研究能从直观的几何研究中得到启示，又反过来启发几何的研究，从而推动了算术和几何学的发展。在西方，首先由毕氏学派发现的毕氏定理是世界上最早得到证明的定理（但证明方法已经失传，现在已知的最早证法来自欧几里得的《几何原本》），它也是运用这种方法的具体成果。这个定理被《数学史上的里程碑》称为“第一个真正重要的定理”。这本书的作者是我们将多次提到的美国著名数学家、数学史家伊夫斯。事实上，巴比伦人和中国人比毕氏学派更早发现这个定理，在中国该定理被称为勾股定理或商高定理，有人则称它为宇宙大定理。

伊夫斯

历经两千多年的毕氏定理是如此富有魅力，证明它的方法估计超过 500 种，是世界上证明方法最多的定理，它吸引着无数来者。来者中包括后来当了美国第 20 任总统的伽菲尔德（1881～1881 年在任）。他证明毕氏定理的新方法——总统证法——发表在 1876 年 4 月 1 日的《新英格兰教育日志》上。直到 20 世纪和 21 世纪，人们还在为它乐此不疲。例如，“米寿老翁”——活了 88 岁的美国数学家卢米斯从 1907 年开始编译并于 1927 年首次出版的图书《毕达哥拉斯定理》，在 1940 年的第二版中就记载了 367 种证法。这本书还在 1968 年（此时有 284 页，美国数学教师全国委员会将其作为数学教育经典系列的一部分）、1972 年、1991 年等年份多次再版，卢米斯也因此被世人铭记。又如，出生在山东威海的中国台湾学者刘毓璋于 1978 年在中国台湾出版的《易经之数理思想》（一说《易经之数理探讨》）一书就在第一章“商高定理”中给出了他收集及自己得出的 85 种证明方



卢米斯和《毕达哥拉斯定理》1968 年版



波沙曼提尔和《毕达哥拉斯定理：力量与美的故事》

法。再如，美国数学家、科普作家波沙曼提尔的书《毕达哥拉斯定理：力量与美的故事》在 2010 年 7 月 1 日出版（见上页底图）。

（2）关于数的理论

例如，区别奇数、偶数和素数的方法，对完全数（即完美数或完满数或完备数）、亲和数（即互满数）、三角（形）数（1，3，6，10，…）、四角（形）数（1，4，9，…）、五角（形）数（1，5，12，22，…）等的研究。

（3）对无理数的发现和研究

例如，希帕索斯发现了不可通约量（后来称为无理数）$\sqrt{2}$，为后人最终创立无理数理论奠定了基础。另一种说法是，希帕索斯发现正五边形的对角线与边长之比不可通约，得知黄金分割数是后来所说的无理数。论文《梅塔蓬图姆的希帕索斯发现的不可通约性》就持这种说法。它的作者是德国古典学者冯·弗里茨（作品中包括其他几位学者的研究成果），发表在 1945 年美国《数学年刊》第 46 卷第 2 期第 242～264 页上。有人认为这是毕氏学派对数学的最重大贡献。

对于震撼了数学界而引起第一次数学危机的无理数，美国作家、教育家库辛在 1988 年的一期美国《数学杂志》上讴歌一曲：毕达哥拉斯学派/把我们惊得发呆/我们的理性世界/遭遇无理数的障碍。

又如，希帕索斯和西奥多罗斯分别在约公元前 450 年和约公元前 430 年证明了 3 和 17 之间的自然数（平方数 4，9，16 除外）的平方根都是无理数。本书所说的自然数从 1 开始。

此外，毕氏还用数学方法研究音乐，他对正多面体也有研究，还提出过独特的天文学见解。

3. 毕氏学派涛声依旧

毕氏学派是继泰勒斯创建的爱奥尼亚学派之后古希腊第二个最重要的学派。它持续存在了近两个世纪，影响之久远远超过了爱奥尼亚学派，甚至在公元 1 世纪还出现了它的“克隆版”——宣扬数字神秘性的新毕氏学派。它的代表人物是希腊数学家尼科马霍斯。他写有包括毕氏的传记和其他有关数学的著作，主要作品是仅存的一部含有两篇文章的《算术入门》。这本书使算术成为希腊亚历山大时期时髦的学问和独立于几何的数学分支，它对算术的意义相当于古希腊大数学家欧几里得的《几何原本》对于几何的重要性。

3 世纪发行的纪念毕氏的硬币

1955 年 8 月 20 日希腊发行的纪念“$3^2+4^2=5^2$”的邮票

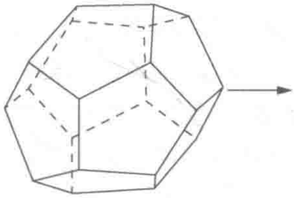
俄罗斯画家博罗尼科夫的
画作《毕达哥拉斯崇拜日出》

在前面简略谈到的毕氏学派的主要开创性成果中，许多都是我们至今还熟悉或研究的重要内容。例如，在毕氏去世两千多年以后，希腊还为毕氏学派发行了纪念邮票(见上页底图)。

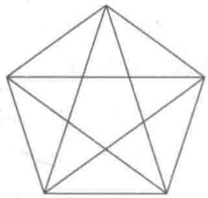
不过，毕氏学派的某些观点带有迷信或神秘主义的色彩，也有臆断或已经被证明是谬误的假说，应该抛弃，例如“万物皆依赖于整数”的信条就把数的概念神秘化了。此外，这种错误信条和保密制度有时对科学发展是有害的，甚至会酿成悲剧，例如发现$\sqrt{2}$的希帕索斯就因为“泄密”被追杀而死。

1.3 毕氏学派“暗藏黄金”

1. 联络标志五角星



正十二面体



正五边形内的五角星

毕氏学派的徽章

古希腊健康女神的卡通符号

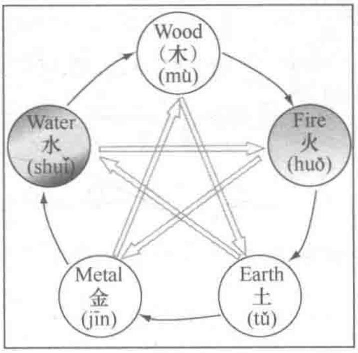
毕氏学派对正多面体的研究成果之一，是发现或重新发现了5种凸正多面体。

多种说法中的一种是毕氏本人早就知道正十二面体以及正四面体、正六面体。理由是正十二面体的每一个面都是正五边形，而毕氏学派对正五边形的作图法已得心应手，并且钟爱正五角星形（有时简称五角星形或五角星，古称五芒星）。钟爱到什么程度呢？他们在五角星的角顶分别标上 ν，γ，ι，θ，α 这 5 个字母，作为他们秘密组织的徽章或联络标志。这 5 个字母连起来的意思是“健康”，象征希腊神话中的健康女神阿克索。这种“健康”五角星就是我们前面提到的那个流落异乡的人在临终时恳求房主刻下的图形。这个人是毕氏学派的成员，毕氏学派的其他成员就是凭这个五角星知道同伴曾在此居留过。前述两个大汉验证入洞者的身份，也是看他们的右手心上有没有一个红色的五角星。由此可见，五角星对毕氏学派有多么巨大的魅力！

手持装蛇的碗的阿克索

19 世纪，法国神秘作者和魔术师列维对五角星进行了一番“梳妆打扮”，然后才让它“盛装上阵”。这样，他的五角星就不但“衣着华丽”，而且还“含义非凡”——他认为该五角星是人类的缩影。

列维五角星



金、木、水、火、土之间的关系

五角星的这种魅力在比毕氏学派更早的时期就显现出来了。在幼发拉底河下游一个叫乌鲁克的地方（现属伊拉克），人们发现了一块约公元前 3200 年的泥板，上面就画有一个不是很正规的五角星。而更早的约公元前 4000 年的五角星图案也是从乌鲁克发掘出来的。后来的五行说，也用五角星来表示金、木、水、火、土之间的关系。

2. “暗藏黄金”两千年

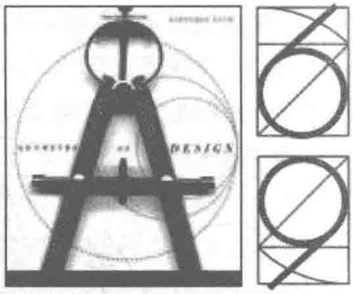
那么，为什么五角星让毕氏学派如此钟情呢？

原来，当古代的几何学家在易如反掌地作出正三角形、正四边形和正六边形之后，就以为作出正五边形也是小菜一碟。然而，出乎他们意料的是，此时却碰了钉子：必须作出并非轻而易举的 36° 角。怎么才能作出 36° 的角，又是谁最早作出来的呢？

毕氏学派最早作出了 36° 的角，并由此作出正五边形和五角星。也许他们就是以此为荣，才把五角星作为自己学派的秘密徽章和联络标志吧！

毕氏学派是这样作出正五边形的。圆内接正五边形的一边所对的圆心角是 72°（36° 的两倍），72° 正好是一个等腰三角形的两个底角，36° 则是它的顶角。于是，问题就化为作一个这样的等腰三角形——黄金三角形（有时简称金三角）。它还有一个更优雅的名字——崇高三角形。这个名字是由美国著名女作家、教育家、平面设计师埃兰在 2001 年出版的《设计几何学：比例与构成的研究》一书中取的。

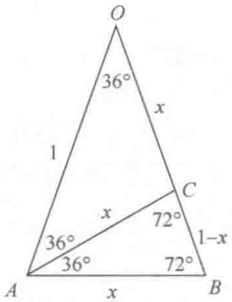
如果我们怀疑埃兰的水平，以为她是在信口开河的话，那么就看一看她的作品（见右图）吧！


埃兰《设计几何学：比例与构成的研究》与书中的“黄金 6，9”

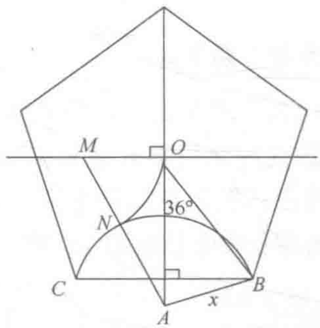
《几何原本》中就考虑了黄金三角形的作图问题：画一个等腰三角形，使它的底角是顶角的 2 倍。

在下图中，AC 平分底角 $\angle OAB$，此时显然 $OC=AC=AB$，$\triangle BAC \backsim \triangle AOB$。现取 $OA=1$，设 $AB=x$，于是由 $\frac{AB}{BC}=\frac{OA}{AB}$，就得到 $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$，即 $x^2+x-1=0$，由此解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（已舍去不符合题意的 $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$）。在下图中按下面的步骤也可得到这个值。

取 $OA=1$，作 $MO \perp OA$，$MO=\frac{1}{2}$，就得到 $AM=\frac{\sqrt{5}}{2}$。以 M 为圆心、MO 为半径画弧得到 N，再以 A 为圆心、AN 为半径画弧得到 B 和 C（$BC \perp AO$，B 和 C 在以 O 为圆心、OA 为半径的圆弧上）。这样，$AB=AN=AM-MN=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=x$。由于得到了 B 和 C，就不难画出图中那个正五边形的 5 个顶点所在的圆。根据这个圆，就能画出这个圆的内接正五边形了。不过，当时毕氏画这个图是否遵循尺规作图法，就不得而知了。



尺规作图法求解 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$



正五边形的尺规作图法

可不要小看这不起眼的无理数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\,033\,988\,749\,894\,848\,204\,586\,834\,365\,64\cdots$，美国数学家亚历山大·伊还为它费尽了心血呢。2010 年 7 月 8 日，他曾把它算到小数点后 1 万亿位！他的计算动机很简单，因为它就是著名的中末比，即黄金分割数。由此可见，毕氏学派的确“暗藏黄金”两千多年！