



做教师，自ABC始

数学教学 ABC： 基本概念与核心理念

[英] 德里克·海洛克 菲奥娜·桑格塔 著
程强 译



教育科学出版社

Educational Science Publishing House

做教师，自ABC始

数学教学 ABC

基本概念与核心理念



[英] 德里克 海洛克 菲奥娜·桑格塔 著
程强 译

教育科学出版社
· 北 京 ·

出版人 所广一
责任编辑 郑莉
版式设计 杨玲玲
责任校对 贾静芳
责任印制 叶小峰

图书在版编目 (CIP) 数据

数学教学 ABC: 基本概念与核心理念 / (英) 海洛克,
(英) 桑格塔著; 程强译. —北京: 教育科学出版社,
2015. 6 (2015. 10 重印)

书名原文: Key Concepts in Teaching Primary
Mathematics

ISBN 978-7-5041-9618-7

I. ①数… II. ①海… ②桑… ③程… III. ①数学教
学—教学研究 IV. ①01

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 114924 号
北京市版权局著作权合同登记 图字: 01-2013-3321 号

数学教学 ABC: 基本概念与核心理念

SHUXUE JIAOXUE ABC: JIBEN GAINIAN YU HEXIN LINIAN

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号

市场部电话 010-64989009

邮 编 100101

编辑部电话 010-64981357

传 真 010-64891796

网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

制 作 北京金奥都图文制作中心

印 刷 北京易丰印捷科技股份有限公司

开 本 169 毫米×239 毫米 16 开

版 次 2015 年 6 月第 1 版

印 张 14.25

印 次 2015 年 10 月第 2 次印刷

字 数 160 千

定 价 35.00 元

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

作者简介

德里克·海洛克 (Derek Haylock) 博士是一位数学教育领域的顾问及作家。他在英国诺威奇 (Norwich) 的东安格利亚大学 (University of East Anglia) 教书二十余载，并从事数学教育研究和主管小学新教师培训的工作。他出版了一系列的个人专著、合著，参编多部图书。多年来，海洛克博士的著作《向小学教师讲数学》 (*Mathematics explained for primary teachers*) 一直在相关领域占有重要地位，并于 2006 年出版该书第三版。

菲奥娜·桑格塔 (Fiona Thangata) 博士是东安格利亚大学的数学教育讲师，主要教授 PGCE (Postgraduate Certificate of Education) 这一教师培训项目的课程。她有诸多文章发表在期刊上或被收录于书中。她曾在英格兰、苏格兰、纳米比亚和美国从事过教学、课程开发以及教师培训等方面的工作。

名家推荐

(按姓氏笔画排序)

最近，人们正在热议中国与英国的数学教学的差异及优劣，各抒己见，十分热闹。适逢教育科学出版社新出版了英国的这本书，读后悟出，原来中国和英国的数学教学在本质上是相同的，对数学教育的认识具有相似性，而被人们热议的那些差异并不反映本质，不过是相应于本国传统和现实的数学教学现象，相互之间可以比较，互取长短，但绝对不可照搬。英国历史上有牛顿、哈代这样的大数学家，近二十年又有证明“费尔玛猜想”的怀尔斯；英国在高端制造领域也已经走在了世界前列。这提示我们，中国的数学教育工作者还是应该抱着向英国学习的态度为好，真正领悟他们的长处。为此，我希望大家认真阅读这本《数学教学ABC》。

——方运加（《中小学数学》常务副主编，中国教育学会青少年创新思维教育研究中心常务副理事长）

这本书收录了数学教学中的一些重要概念/理念。书中不但对每一个概念给出了理论上的定义，而且对概念进行了解释与讨论，并提供了实例。这样的写作体例，使得比较抽象的数学教学概念变得通俗易懂。相信阅读本书能够让你对数学教学的一些基本与核心概念的理解更加清晰，从而进一步提高表达与交流数学教学心得或研究成果的质量，提升自己的数学教学专业水平。

——朱乐平（浙江省杭州市上城区教育学院研究员，特级教师）

教师的专业发展需要有理论的滋养，教育理论对于一线教师来说，尽管经常听到或提到，但大多认识不够清晰，也难以用来指导教学实践。本书简明清晰地阐释了数学教育理念或概念，并用了很多基于实践、典型而深刻的案例展开阐述，能有效帮助教师厘清知识，提升专业素养。

——朱德江（浙江省嘉兴市南湖区教研室副主任、正高级教师，特级教师）

十分敬佩作者的专业！视野开阔，见解独到，每一个概念都有可资借鉴、让人脑洞大开的案例，让数学更好玩。

——华应龙（北京第二实验小学副校长，特级教师）

这本书的内容恰如其名，介绍了大量与小学数学有关的数学知识和教学知识，行文简练、准确，能通过较少的文字一下子抓住问题的核心和本质。如果教师手头有这样一本书，不仅方便释疑解惑，而且肯定会助力个人教学能力的提升。

——孙晓天（中央民族大学数学教育研究所所长、教授）

充满兴趣地阅读了教育科学出版社新近出版的《数学教学ABC：基本概念与核心理念》，深感这是一本值得所有小学教师和基础教育工作者置之案头、阅读参考的小学数学教学精品读物。

本书最鲜明的特点是理论与实践相融合。一方面，本书选择了小学数学教学“最独特和最重要”的基本概念与核心理念，阐明其定义并进行解释。作者的解释触及各种相关的甚至是很前沿的数学教育理论，同时展开深入、客观的讨论，这些解释和讨论显示了本书的理论高度，具有深刻的理论指导意义。另一方面，紧随每一个概念或理念之后，本书还提供了具体的教学实例。这些实例的选配，绝非一朝一夕之功，而需要长期的教学实践积累，并使本书具有很强的实用价值。

“他山之石，可以攻玉”，英国教育学者的这本书，正是一块不可多得的他山之石，可以帮助我们在小学数学教学方面进行中西比较，相互取长补短，从而夯实理论基础，丰富教学实践，有效提高与改善数学教学水平。

——李文林（中国科学院数学与系统科学研究院研究员）

这不仅是一本帮助数学教师随时解惑的好书，更是一本浓缩了数学精华帮助数学教师心灵吸氧的好书！

——李兰瑛（北京市海淀区中关村第二小学副校长，特级教师）

课程改革进入深水区之后，小学数学教育必须直面的一个根本问题是，究竟如何切实提高小学数学教育教学质量。对此，新课程理念可以部分地给出答案，但更为重要而迫切的是，教师需要全面深刻理解小学数学教学的本质，尤其需要掌握促进小学生数学学习的一些最重要的、也是必须把握的基本概念与理念。从这个意义上说，本书是引领教师回归数学教学原点，把握数学教学方向，理解数学教学本质，从而切实提高小学数学教育教学质量的一部力作！

——李铁安（中国教育科学研究院课程教学研究中心副研究员）

这是一本研究数学教学核心问题的指南，这是一本教你实招的数学教学工具书，这是一本接地气的数学教师专业书。它似乎很遥远，但又触手可及；似乎很高精，但又很“大众”；似乎很理论，但又通俗易懂；似乎很专业，但又平易近人——让我们一起走进“数学教学ABC”……

——吴正宪（北京教育科学研究院基教研中心小学数学教研室主任，特级教师）

恰如黑格尔所言，“人们经常挂在嘴边的名词，往往是最无知的”。本书讨论的涉及数学及数学教学领域中那些因常用而熟悉却也可能未曾

经过深思的概念/理念。关于它们的定义、解释与案例，有助于我们用“第三只眼”来厘清并审视教学。

——余 颖（南京师范大学附属小学副校长，特级教师）

这是一本小学数学教师专业成长的书，专题性强，每一个小的专题都有价值，引发我们一线教师的尝试与思考；浓缩的专题内容再加上推荐阅读，给我们提供可以丰富、补充、拓展的空间。

这是一本理论和实践巧妙对接的书，有理论、有案例支撑，做到了深入浅出；读起来不晦涩，接地气，具有可读性、可操作性，体现了数学概念之间的内在联系，为数学教师的专业成长起到引领作用。

这是一本涵盖内容丰富的书，涉及教育理论、学生核心素养、数学本质、问题解决、读懂学生、读懂课堂等一线教师遇到的方方面面的问题，具有实用性和价值性。

——张秋爽（北京市顺义区教育研究考试中心教研员，特级教师）

概念总是意味着一种混乱被结束，一种无序被安排，一种过程被梳理，一些探索被定型。“词”是“物”的符号，概念自然是行为的总结。从这个意义上说，《数学教学ABC》是以概念为门径，带你直接踏入小学数学教学的核心地带：那些被探索的核心领域，被梳理的核心策略，被总结的核心观念等。而这些静态的概念，也有待于你智慧地还原：将概念还原为实践，获得贴肉的实践体认，获得对概念的个人理解。

另外，教育概念本身不可能是价值中立的，因此，这本书并不是一本词典，它内隐着重要的教育价值观。至于内隐观念的具体内涵，则有待读者在阅读、实践中体悟了。

总之，这既可以是一本捷径之书，也可以是一本践行之书，值得一观。

——陈洪杰（当代教育家研究院副院长，《当代教育家》副主编）

如果忽视对数学教学基本概念与核心理念的理解，就容易导致数学教学的空洞、模糊与虚浮。本书提供了大量对于小学数学教学非常有价值的数学教学概念、核心理念和教学实例，具有极强的基础性和广泛的应用性，能够很好地促进广大数学教师对数学教学的深度理解和技巧应用，使数学教学变得清晰、丰满和有逻辑力量。

——林良富（宁波万里国际学校、宁波国家高新区外国语学校校长，特级教师）

本书选择的概念与理念为一线数学教师常用所需；讲述的方式包含定义、讨论、实例、延伸，适合一线教师理解；使用的语言平白、朴素、简洁，适合一线教师阅读。

——俞正强（浙江省金华市环城小学校长，特级教师）

走进《数学教学 ABC》，深化对数学教学概念的理解，促进理念重建、实践改进，启发你获得一种既独到又实用的数学教学研究的方法。

——贵友林（南京师范大学附属小学，特级教师）

数学教学基本概念和核心理念众多，举不胜举。本书没有罗列像“质数”等常见的纯数学概念，而是基于《英国国家课程标准》和英国《国家基本数学素养战略》大背景，精选了“跨文化数学”、“数学天赋”等43个最独特、最重要的基本概念和核心理念加以阐释，在“定义”后组织“解释与讨论”，接着呈现“实例”，深入浅出，图文并茂，并配有“拓展阅读”，为大家深入研究做导引。这是一本不可多得的数学教学参考书，为我们打开英国数学教学与研究的一扇窗。

本书以人为本、以数学本质为源的科学的数学教学理念跃然纸上，深入人心，令人过目难忘！

——段安阳（宁波滨海国际合作学校，新生代名师）

这本书根据英国国家数学课程标准列出了一些重要概念，并对概念进行具体解释，还列举了实例，让老师们读起来通俗易懂，富有实践指导价值。本书以知识点为目录，条理清楚，检索便利，是培训数学教师实务的很好的参考资料。从理论建设的角度来看，本书对我国当前数学学科核心素养的研究有重要借鉴价值。

——唐彩斌（杭州市时代小学校长，特级教师）

不知“数学教学ABC”，何以成就数学教学的专业发展？数学教师的专业成长，从把握“数学教学ABC”开始。

——蔡宏圣（江苏省启东市中小学教师教师研修中心小教室主任，特级教师）

目 录

绪论 / 001

数学教学目的 (Aims of mathematics teaching) / 003

运算法则 (Alogrithm) / 008

数学焦虑 (Anxiety about mathematics) / 013

学习评价 (Assessment for learning) / 017

教学评估 (Assessment for teaching) / 021

认知冲突 (Cognitive confict) / 025

概念学习 (Concept learning) / 030

数量守恒 (Conservation of quantity) / 035

建构主义 (Constructivism) / 039

数学创造力 (Creativity in mathematics) / 044

跨文化数学 (Cross-cultural mathematics) / 049

跨学科数学 (Cross-curricular mathematics) / 054

演绎推理和归纳推理 (Deductive and inductive reasoning) / 058

差异教学 (Differentiation) / 064

等价 (Equivalence) / 069

数学错误 (Errors) / 074

解释说明 (Explanation) / 079

性别与数学 (Gender and mathematics) / 083

概括 (Generalization) / 089

数学天赋 (Giftedness in mathematics)	/ 093
家庭作为数学学习的场景 (Homes as a context for numeracy)	/ 099
非正式计算方法 (Informal calculation method)	/ 103
数学调查 (探究) [Investigation (enquiry)]	/ 108
数学学习中的语言困难 (Language difficulties in mathematics)	/ 112
学困生 (Low attainment)	/ 117
建立联系 (Making connections)	/ 121
匹配与失配 (Match and mismatch)	/ 126
有意义的情境 (Meaningful context)	/ 130
有意义的学习 (Meaningful learning)	/ 134
心算 (Mental calculation)	/ 138
建模 (表征) 过程 [Modelling process (representing)]	/ 143
数学素养 (Numeracy)	/ 147
用于数学学习的游戏活动 (Play as a context for learning mathematics)	/ 152
原理学习 (Principle learning)	/ 157
问题解决 (Problem solving)	/ 161
有目的的活动 (Purposeful activity)	/ 166
提问 (Questioning)	/ 171
机械学习 (Rote learning)	/ 176
技能学习 (Skill learning)	/ 180
讨论 (Talk)	/ 184
转化原理 (Transformation)	/ 188
传递性原理 (Transitivity)	/ 192
使用并应用数学 (Using and applying mathematics)	/ 196
参考文献	/ 200
译后记	/ 217

绪 论

小学数学教学涉及众多概念/理念，但哪些是最重要的、教师必须了解的呢？这正是本书要回答的问题。本书收录了 40~50 个基本概念与核心理念，会对每一个概念/理念进行定义、解释和讨论，并给出一些课堂教学相关案例和建议，以及推荐可供读者进一步阅读的材料。

必须首先指出的是，本书中的“概念”并不是我们要学生掌握的概念，而是主要指如下四种：

- 小学数学教师的主要教学技巧；
- 小学数学课程中的主要问题；
- 小学生学习数学的主要方法；
- 小学生学习数学推理的主要方法。

另外，读者需要注意，本书不包含两种概念。第一，本书没有收录像“等边三角形”和“质数”这样的纯数学概念。对于这些概念的阐释，请参阅本书作者海洛克的《向小学教师讲数学》（2006 年第三版），其中有详尽的阐释。第二，我们限定了“概念”的范畴，只收录那些我们认为对于小学数学教学最独特和最重要的概念。例如，尽管对于一个优秀的数学老师来说，管理学生课堂行为的技巧也极其重要，但是这一技巧不论对于数学还是对于其他学科来说都是一样的，因此在这里就没有再次阐述的必要。而解释说明、提问和差异教学这样的教学技巧及理念，对数学教育工作者很有必要，本书正是涵盖了这样的技巧。

2007 年（译者注：本书英文版的出版时间），英国的小学课程处于

一个众人关注的发展阶段。《英国国家课程标准》（*National curriculum for England*）仍然是决定学校教学内容的法定文件（DfEE, 1999a）。而实际上在刚进入 21 世纪的最初几年里，对小学数学教育最有影响力的文件是《国家基本数学素养战略》（*National numeracy strategy*）（DfEE, 1999b）。总体来说，它是起到积极作用的，但在课程实施过程中，也出现了一些问题。于是，政府启动了对于小学战略的修订工作，对许多问题都予以了解决（DfES, 2006a, 2006b; www.standards.dfes.gov.uk/primary）。因此，在本书中，我们会尽力在《英国国家课程标准》《国家基本数学素养战略》和修订后的小学战略三者背景下阐释有关课程问题的数学概念/理念，如数学素养、跨学科数学以及使用并应用数学等。

需要说明的是，本书中的概念/理念并不是按主题领域排列的，而是按照英文字母顺序排列的，因而读者可以采取任何顺序阅读或检索。另外，在对每个概念/理念阐释的最后，我们还会给出四个以内的相关条目，以促进读者对该条目的进一步理解。

数学教学目的 (Aims of mathematics teaching)

► 定义

数学教学目的是指数学教学的长远目标，回答了“为什么要教数学”这一问题。它充分体现了为什么数学能够在学校课程中占有重要地位。总体来说，数学教学目的包括五个方面，即实用性目的、应用性目的、可迁移性目的、美学目的和认识论目的。

► 解释与讨论

《英国国家课程标准》的数学部分在一开始就阐释了数学教学的这五个目的：

数学能够赋予学生独特的强大工具去认识并改变这个世界。这些工具包括逻辑推理能力、解决问题的能力以及抽象思维能力。数学在日常生活、多种职业、科学技术、医学、经济学、环境及其发展以及公共决策中都非常重要。而且，不同的文化也对数学的发展和应用起到了推动作用。今天，这门学科已经超越了国别的限制，其重要性已经在全球范围内得到认可。数学还是一门富有创造性的学科。当学生首次成功地解决一个数学问题、发现一个更有效的解决方法或者顿悟其中的隐秘联系时，他们都会感受到数学带给他们的快乐和神奇。(DfEE, 1999a)⁶⁰

(1) 实用性目的

数学教学的实用性目的与计算能力有关，因为计算能力是日常生活

所需要的，也是大部分职业的基本要求。大部分职业都要求基本的计算能力，比如能够熟练地进行数字处理、测量、图形处理、空间组织、财务处理、数字信息记录、简单图表数据处理等。《英国国家课程标准》也指出，“数学在日常生活以及多种职业中都非常重要”，这正说明了为何数学是学校课程的核心学科，也即“这个事实本身就对为什么进行数学教学提供了一个非常充分的理由”（Cockcroft, 1982）¹。对所有学生来说，无论他们以后学习何种专业或从事何种职业，数学教学都要“不仅为他们日后的工作做准备，还为他们成为积极的公民、有责任心的家庭成员做准备”（Goulding, 1997）¹²⁸。

（2）应用性目的

人们经常提及的一个数学教学目的是，让学生具备学习其他学科时所必需的知识和技能。例如，《英国国家课程标准》就指出数学在科学技术、医学、经济学等学科中的重要性。古尔丁（Goulding, 1997）¹²⁹也指出数据处理能力在历史和生物学科中的重要性，测量技能、比率及比例的知识在艺术、科技和地理学科中的重要性，以及代数能力在科学学科中的重要性。弗赖登塔尔（Freudenthal, 1973）⁶⁷在他知名的《作为教育任务的数学》中，不仅认可了数学应用的重要性，还提出了一个有现实意义的观点：“我们所有人都明白，数学的应用性很广泛，而且比起以往，更多的学生都必须要用到数学。如果我们能够告诉他们每个人哪些数学概念和技巧是他们未来需要用到的，我们将会感到很有幸。”

（3）可迁移性目的

通过数学教学来培养学生的某几种特定的思维能力，是数学教育的目的之一。我们相信，这些特定的思维能力能够提高学生的智力水平，并且能够将他们在数学领域所用的多种推理运用到其他场合和问题解决中。《英国国家课程标准》的引言提到，数学能够培养学生的逻辑推理、问题解决和抽象思维能力，也体现了这一目的。近些年，在英国的小学教育领域，人们开始对“思维能力”产生很大的兴趣。但是，在数学这样的单一环境下培养出来的思维能力能否迁移到其他学科或环境中，对

这一点仍然缺乏严格的考究。当然，处理某一程度的数学问题可能还需要多种特定的逻辑思维能力，如分析推理、演绎论辩，以及对推断和公理的辨别意识等，而这些也是我们生活中方方面面都需要的重要思维技能。然而问题是，这些能力能否迁移应用到其他领域中。在数学中学到的逻辑思维能力和分析思考能力，是否能使人们在人际交往、处理工作中的问题、进行理财和政治辩论时更具有逻辑性和分析性？

(4) 美学目的

《英国国家课程标准》强调了学生在学习数学时能够体会到的快乐和神奇感。这揭示了数学教学可能具有的美学目的——这同证明音乐教育、文学教育和艺术教育的美学目的是一样的。数学是让人类产生美学感受的潜在源泉之一，而教师的责任正是要把学生带进这样一个快乐而又美丽的世界。弗赖登塔尔（Freudenthal，1973）⁶⁹曾指出，“把儿童带入一个数学体系中，在某种程度上来说是数学教育的一个目的，美学的魅力在这个体系中熠熠生辉……”。同时他又提醒我们：“然而，对于没有深厚数学知识的人来说，他们很难有这样的美学体验。”

(5) 认识论目的

对于以上美学目的的探讨同时也引出这样一个问题：对于所有的小学生来说，这些目的是否具有现实性，是否与他们每个人相关？这个问题与我们要谈的第五大目的——认识论目的息息相关，所以它显得尤其重要。认识论目的与知识的自然属性有关。正如《英国国家课程标准》所提到的，作为一个既特殊又通用的人类知识领域，数学吸引了不同文化和数百年来人类的努力。关于有教养的人的一种定义是：掌握所有主要领域知识的人。因此，对于数学学科的深入理解，与对于历史证据、科学理论的自然属性的理解一样重要。所以，我们必须把数学介绍给小学生，并且教给他们数学家的推理方式。当然，这并不是说我们要把所有学生都培养成未来的数学家。

我们比较确定能预测到的一件事情便是，一般学生很可能不会成为数学家。在此，我们必须再次强调特别容易被忘记的一点，那就是，与那些