

古今初等

GU JIN CHU DENG

数学思想

SHU XUE SI XIANG

吴志勇◎编著



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

古今初等数学思想

吴志勇 编 著



 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

古今初等数学思想 / 吴志勇编著. -- 天津 : 天津
大学出版社, 2015. 6
ISBN 978-7-5618-5351-1

I. ①古… II. ①吴… III. ①初等数学 - 数学史 - 中
小学 - 课外读物 IV. ①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 139106 号

出版发行 天津大学出版社
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647
网 址 publish.tju.edu.cn
印 刷 廊坊市海涛印刷有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm × 260mm
印 张 13.5
字 数 337 千
版 次 2015 年 6 月第 1 版
印 次 2015 年 6 月第 1 次
定 价 29.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

序

现代数学的宏伟大厦是世界各国人民的共同财富，数学发展的过程是各国人民对数和形两个基本概念不断认识的历史。数学的发展既和历史紧密地联系在一起，又有它自身的特点，这就形成了一门独具特色的学科——数学史。研究数学的历史首先就会碰到分期问题，如何分期关系到能否确切地反映数学发展的阶段性，是十分重要的。

一般来说，叙述数学发展的历史是按照数学本身由低级向高级的发展来进行的，从世界数学发展的整体过程来研究，世界著名的近代数学家、苏联科学院院士 A. N. 柯尔莫哥洛夫把数学发展的历史划分为四个主要时期：①数学产生时期；②初等数学时期；③变量数学时期；④现代数学时期。

1. 数学产生时期（一前 5 世纪）

我们把这个时期分成两个阶段：①数学的史前史；②最初的数学知识积累时期。

（1）数学的史前史是人类建立最初数学基本概念的时期。这个时期没有留下任何物质的痕迹，无论是文字记载的，或是建筑和雕塑的遗迹以及其他。这一时期，数学史上的主要贡献就是人类逐渐地明确了自然数的概念、计算数的方法，并认识了最简单的几何形式。

（2）最初的数学知识积累时期。我们认为这个时期人类已经形成了某种社会集团，可看成是古代国家。在这个时期已经出现了数的写法、数的算术运算，形成了某些几何的实际知识，能解答最简单的代数性质的题目，但是没有概括出精确的表达式，没有统一的符号，也没有严格的理论依据。

2. 初等数学时期（前 6—16 世纪）

这一时期也被称为常量理论发展时期，其特征是人类从数学领域里获得了有理论依据的实际知识。这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支：算术、几何、代数、三角。

3. 变量数学时期（17—19 世纪初）

这一时期诞生了坐标系，从而产生了数学新分支——解析几何学，推动了无穷小量的产生，以无穷小量为基础的变量进入了数学，由此产生并发展了微积分和概率论。

4. 现代数学时期（19 世纪 20 年代—）

数学发展的现代阶段的开端，以其所有的基础——代数、几何、分析中的深刻变化为特征。

鉴于本书的宗旨，我们在书中主要叙述前三个时期的数学史知识，并尽可能地给出整个数学历史的概貌。关于现代数学的发展问题，我们在指出某些特点之后，具体内容还望读者从当今世界科学的广阔领域中去领悟和探究。

中国数学的发展和成就在世界数学史上占据非常重要的地位，在世界数学宝库中，中国

古代数学形成了影响深远、风格独特的体系。有关中国数学的历史资料内容浩瀚，我国著名的数学史家李俨（1892—1963）、钱宝琮（1892—1974）、严敦杰、梁宗巨等都曾写过专门的著作。但对中国数学史的分期问题，直到现在我国数学史界还没有定论。本书参考李俨先生的《中国算学史》，把中国数学的发展历史分成下面六个不同时期加以介绍。

第一个时期：汉朝初年（前1世纪）以前3000多年的漫长时期，是中国古代数学的萌芽和初步发展时期。

第二个时期：汉朝初年到隋朝中叶（7世纪）大约800年的时间，是中国数学迅速发展和繁荣的时期。

第三个时期：从隋朝中叶到元朝末年（14世纪中叶）700多年的时间，是中国古代数学发展的全盛时期。

第四个时期：从明朝初年到清朝中叶（18世纪中叶）300多年的时间，是西方数学传入中国的时期。

第五个时期：从清朝中叶到中华人民共和国成立大约300年的时间，是中国数学发展的转折时期。

第六个时期：从中华人民共和国成立到现在，是现代数学迅速发展的时期。

从世界数学发展的整体历史来看，我们将上述第一、二个时期列入“最初的数学知识积累时期”一章中加以介绍；将第三、四个时期列入“初等数学时期”一章中叙述；其余各个时期将单独作为一章介绍。在各个时期里，着重介绍中国古代数学的特点、中国古代数学在世界数学史上的地位。

应该指出的是，无论是对世界数学史的分期，还是对中国数学史的分期，我们绝不想在数学史中引入严格区分一个时期与另一个时期的某种界限，因为每个时期数学的本质特征都是逐渐形成的，有时两个时期是互相交替的，特别是有些国家和民族，它的兴盛和衰亡正好跨越两个时期，而数学的发展总是和国家、民族的兴衰分不开的，要把这种文化所固有的任何一个独立的特点载入每一个历史阶段。

前 言

数学为许多人所喜爱，不仅因为它重要，还因为它推理周密、判断准确、结构和谐，能对人进行严格的逻辑思维训练和智能培养，而习得这种演绎推理的思想和方法甚至比学到数学知识更重要。它的神奇和伟大激起了人们学习和研究数学的热情。无怪爱因斯坦感叹地说：“世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个逻辑体系如此精密地一步一步推进，以致它的每一个命题都是绝对不容置疑的，我这里说的是欧几里得几何。推理的这种可赞叹的胜利，使人类理智获得了为取得以后的成就所必需的信心。”这就是无数数学家在科学的道路上、在斗争和挫折中创造出的奇迹，是他们用艰苦、漫长的经历谱写了这部光辉灿烂的数学史。

当人们为数学美妙的内部结构所陶醉，正在逐步向前迈进的时候，会进一步询问：数学是什么？数学是怎样产生和发展的？它包括哪些内容？有什么用处？

作为一个正在学习数学，或者现在抑或是将来从事数学教育的人，更有必要了解这些问题。要回答这些问题并不容易，因为数学的历史悠久、内容丰富、涉及面广，但发展又极为迅速。因此，要全面而又详细地论述它几乎是不可能的，即使仅叙述初等数学的历史，甚至只是初等数学思想，仅凭本书的篇幅也很难办到。本书只能描述那些在初等数学历史的主要时期出现的最突出的方法以及影响主流的数学思想。

开设此课和编写本书的目的在于提高学生的数学修养，丰富学生的数学知识，拓宽学生的知识面，帮助学生学好数学，为更好地植基于中小学数学教育打好坚实的基础。因为任何年级的数学教学都不只是教授书本上现成的知识，真正的数学教学过程应该是充分地揭示数学发生的过程，是数学思想的复写和历史的再现。而学生在学习中遇到的难点和出现的错误，正是数学家经历过的困难。所以，要教好数学只凭课本中学到的几个公式、定理是很不够的，还必须从古今数学思想中汲取更多的营养。

本书根据学生的程度及中小学数学教学内容的特点，对数学史上几个主要时期作了简明扼要的叙述，重点是针对中小学数学发展的历史和数学思想。用大量的篇幅叙述了中国数学思想史，以便让同学们进一步了解数学灿烂的历史文化，同时也为数学教学增添了一点爱国主义教育的原始资料。本书克服了中国数学书籍普遍枯燥的特点，穿插了许多饶有趣味的问题和数学家的故事，通俗而又有据可查，并对历史上一些杰出的数学家的生平和经历作了简短的描述，以期使学生通过学习，不仅能获得真知灼见，还能获得顽强地探索问题的勇气和信心，并且不会因为自己的学习或工作并非完美无缺而感到颓丧，对学生建立数学思维和数学史观、丰富数学知识都有所裨益。

笔者 20 多年前有幸在学校开设数学史讲座和数学文化选修课程，那时就形成了本书的雏形，这么多年一路走来，得到过许多学校领导的关心和亲人、同事、学生的支持与帮助。特别感谢原贵州省数学学会理事长李长明教授和华东师范大学数学系领导、博士生导师汪晓勤教授的多次指导。

虽然本书编写时间较长，但由于编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，希望广大读者批评指正。

吴志勇

2014 年 6 月于遵义师范学院

目 录

第一章 数学史前史及其特点	1
第一节 整数概念、记数法的形成和发展	1
第二节 空间形式概念的起源	5
第二章 最初的数学知识积累时期和形成数学思想雏形	7
第一节 中国古代数学的萌芽和初步发展概况	7
第二节 古巴比伦的数学发展概况	12
第三节 古埃及的数学发展概况	17
第四节 古印度早期的数学发展概况	20
第三章 初等数学及其思想发展时期	23
第一节 古希腊时期的数学	23
第二节 蓬勃发展的古印度数学	49
第三节 中亚和近东民族的数学发展	51
第四节 东方时期数学的主要成就	54
第五节 中世纪欧洲数学的发展	55
第六节 欧洲文艺复兴时期数学的发展	57
第七节 16、17 世纪欧洲数学的发展	59
第八节 对数的产生和发展	62
第四章 变量数学时期	66
第一节 17 世纪初等数学的深入发展和数学新思想的产生	66
第二节 解析几何与微积分的产生过程	68
第三节 18 世纪欧洲数学发展概况	76
第四节 几何学的新发展	80
第五节 代数学的新成就	86
第五章 风格独特的中国数学发展概况	87
第一节 汉朝初年到隋朝中叶中国数学的发展（前 100—600）	87
第二节 隋中至元末中国数学的发展（600—1368）	95
第三节 明清时期中国数学发展的转折	103
第四节 中国近代数学思想发展概况及其在世界数学史中的地位	109
第六章 数论、数集和数学模型思想的发展概貌	112
第一节 古典数论中一些问题的起因和结果	112
第二节 数集与集合的产生和发展	115
第三节 现实与数学模型思想	124

第七章 数学思想与文化	127
第一节 数学思想的文化价值观.....	127
第二节 数学思想中的文化与文明.....	135
第三节 数学思想与哲学、宗教和战争.....	139
第四节 数学思想与绘画、音乐和文学艺术.....	157
第五节 经济社会中的数学思想观.....	181
第八章 数学思想纵横谈	186
第一节 数学思想发展的规律和特征.....	186
第二节 数学思想的内部魅力.....	192
第三节 古今初等数学思想的教育意义.....	198
参考文献	207

第一章 数学史前史及其特点

第一节 整数概念、记数法的形成和发展

数学是从离我们极其遥远的人类诞生时期开始出现的，最初的数学概念在人类发明记录自己的思想符号之前就产生了。那个时期未曾留下任何书面的文献，然而，通过研究文化落后民族的日常生活、语言和传说以及研究具有高度文化水平的民族的语言发展和故事，我们能够断定，由于生产力的发展，人们的心理活动和生产方式随之发生了变化。在数千年间人类通过狩猎、捕鱼、采摘果实等劳动，逐渐地产生了数学的基本概念，特别是最初的、最简单的数的概念，因为数是一切数量关系的尺度，它的产生和变化在所有的数学关系中具有重要的作用，有了数才有数学。

人或动物都有最原始的数觉，有若干种动物具有和人类相似的原始数觉。当在一个小的物群里边，增加或减去一个物品的时候，有的动物也能够辨认出其中的变化。有些鸟类是具有这种原始数觉的，鸟巢里若有四个蛋，拿去一个，鸟不会发觉，但是如果拿去两个，鸟通常就要逃走了，鸟会用某种奇怪的方法来辨别二和三，但无法辨别四。有个农场主决定要打死一只在他庄园的望楼里筑巢的乌鸦，他试了好多次都没有成功，因为人一走近，乌鸦就飞走了。它栖息在远远的树上守着，等到人离开了望楼，才肯飞回巢去。有一天，农场主定下了一个计策：两个人走进望楼，一个人留下，一个人走了出来。但是乌鸦并不上当，仍然等着，直到留在望楼里的人也走出来才罢。这个试验一连作了好几天，两个人、三个人、四个人，都没有成功。最后，用了五个人，也像以前一样，先都进了望楼，留下一个人在里面，其他四人走出来离开了，这次乌鸦却数不清了，马上就飞回巢里去了。由此可见，它不能辨别四与五。

我们所知道的最惊人的例子要算叫作“独居蜂”(solitary wasp)的昆虫了，这种母蜂在每个巢里产一个卵，并且在巢里预先储藏一批活的尺蠖，作为幼虫孵化后的食物。使人吃惊的是，各类独居蜂在每个巢里所放的尺蠖数目都是一定的：有些放 5 条，有些放 12 条，多的甚至有 24 条的。最特别的是一种叫作螺赢(eumenid)的蜂，这种蜂雄的比雌的小得多，雌蜂能用神秘的方法辨别孵化出来的幼虫是雄的还是雌的，并且据此相应地分配食品的数量；它并不去改变捕获物的大小和种类，只给雄卵储存 5 条尺蠖，给雌卵储存 10 条(摘自美国 T. 丹齐克著《数：科学的语言》)。

然而，人类在何时怎样产生了数的概念呢？一些科学家深入处于野蛮状态的部落民族中，不论他们与怎样的部落相遇都可以找出一些数学概念，发现这些简单的数学概念

是在人们已知道取火和用火，制造初期打猎用的石头武器，发明了弓箭，制作木头餐具和其他器具以及用简陋小船作交通工具的时候才开始的。据此足以清楚地想象出，人类是怎样在漫长的岁月里，一步步获得数量关系的最初知识。我们运用苏联数学史家巴贝宁（1849—1919）等外国数学史家研究的结论，就能可靠地把人类获得的最初的数学知识复原出来。

首先，人类是从“多”的概念中分出“一”的概念的，这被认为是人类经过最困难的阶段才得出的数的概念，想必这发生在人类还不懂得用数来表示事物的低级发展阶段。巴贝宁把这种分出解释为：人通常只用一只手拿一件物品，这便把“一”从“多”中分出来了。于是，记数的开端就建立了“一”和不确定的“多”两个概念，这两个概念构成了最初的记数法。

这种记数法在有的民族甚至遗留至今，譬如说，人们习惯用“一些”及“多一些”来表示比“一”多的不确定数量。幼儿开始识数时也是从“多”中认出“一”来。曾经生活在巴西的保托库德部落就只用“一”和“多”两个词来表达数（该部落现在已濒于灭绝）。

对于数“二”的出现，巴贝宁解释为可能是用双手各拿一件物品，在计算的初级阶段，人们便把“二”这个概念与双手各有一件物品联系起来。但先民们在表示数“三”的概念时则遇到了困难，因为人没有第三只手，当人们逐渐领悟到可以把第三件物品放在自己的脚边时，困难就解决了，这样数“三”的特征就是举起双手和指定一只脚。由此，数“四”的概念就容易区分出来了。在这个阶段的人们为了表达今天捕到了三条鱼，就双手各拿一条，并在规定的一只脚边放一条；为了表达捕到了四条鱼，那就双手各拿一条，两只脚边各放一条。按照这种方式，要表达比数“四”大的整数就更困难了。这种表达方式虽然笨拙，但毕竟是人类最初、最简单、最直接的识数方式，就是现代人起初也是这样一步一步地认识数的。

要将识别到的数记录并保存下来，还要表达出来得到相互认可，是件很艰难的事情。在记数的初级阶段，人们还不会使用数的名称，需要表达数时，或者用实际拿在手里或放在脚边的被数物表示，或者依靠相应的身体动作和手势表示，只要交谈的对方明白所表达的数量是多少就可以了。例如，分布在印度洋畔孟加拉湾的安达曼群岛上的当地居民（后被殖民者消灭）就没有表达数的词语，当要计算时就用这样或那样的手势来说明，这种用手势计算数的方式就像遗迹一样，长期地保留在许多没有产生口头读数的民族里。记数的继续发展与那时人类熟悉的狩猎和捕鱼等生产方式有关。为了从事这些生产，人们不得不制造简单的工具，随着社会的发展和进步，到了原始公社社会，人们对食物、衣服和武器作了适当的分配，部落之间的相互战斗，不得不对与之交战的敌人力量作统计，对战争中缴获的战利品又需作重新分配，这些状况都迫使人们以某种方式进行计算，因而数的概念已经不能停留在“四”上了，应当不断地发展。随着生产和交换的不断增多以及语言的不断发展，人们已经抛弃了必须将被数物拿在手中或置于脚边的做法，渐渐地把数从用具体事物表示中抽象出来。于是，数学中发生了第一次抽象，那就是把被数物用另外某些彼此同类的物品或标记来代替。

1. 绳结记数

图 1.1 是美国自然史博物馆（纽约）收藏的古代南美印加部落用来记事的绳结，当时人称之为基普（quipu）：在一根较粗的绳子上拴系涂有颜色的细绳，再在细绳上打各种各样的结，不同的颜色和结的位置、形状表示不同的事物和数目。



图 1.1 绳结记数

2. 刻痕记数

迄今发现的人类刻痕记数的最早证据，是 1937 年在捷克摩拉维亚（Moravia）出土的一块幼狼胫骨（见图 1.2），同一根狼骨的两个侧面共有 55 道刻痕，分成两组，第一组 25 道刻痕，第二组 30 道刻痕，每一组内刻痕又按五个一群排列。这块狼骨的年代据考大约在 3 万年前。这类刻痕记数的遗迹，在其他许多地方都有发现。



图 1.2 刻痕记数

作为标记来代替被数物的还有小石块、贝壳、竹节和树枝等，这些物品或标记与被数物彼此一一对应，这些物品或标记就成了计算工具。奇怪的是，这种记数法的痕迹至今在许多民族中还保留着。为了使这些工具携带方便、使用灵活简便，人们往往选择一些更简陋的物品（如小石块、贝壳、果核、小竹节等），把它们串在细绳或小棒上作计算工具使用，经长期使用，这些工具后来便成了完善的计算工具，如中国珠算、俄罗斯算盘等。

当人们领悟到自己手指是天生的计算器时，计算的发展便大幅度地加快了。可能第一次用手的食指去指物品，手指开始起了作用，并帮助越过了“四”的概念，一下子把数扩大到了“五”，计算的继续发展要求使用的工具更加复杂。人们便开始使用第二只手，而后又扩展到使用自己双脚的脚趾，因为对不穿鞋子的部落来说，利用脚趾是很自然的，在某些情况下还会同时使用双手手指和双脚脚趾这种刻板的方式来表示数字。例如，生活在南美洲的印第安人，为表示数“二十”就把手指和脚趾全部用起来。

当农业成了社会生产的主要方式时，开始发展了计算的口头表达。在这个时期，逐渐产生了以田地、菜园、牲畜为对象的私有财产，一些田地、牲畜的拥有者将牢固地与他的财产联系在一起。他们不仅要计算财产的多少还要记住数目，由此推动人们走上了创造数的道路。然而起初数的名称和记数法都是很笨拙的，例如，犍牛拥有者要记住他的一群牲口的数目，是根据一头犍牛是黄色的，另一头是黑色的这些特征来加以记忆的。但是，仅仅借助被数物的外部特征来记忆，要记住较大数目的事物时，这样的方法就不适用了。

起初，人们表示某个数的名称是极其呆板的。例如，表示数“四”则用“就像牲口

的脚那样多”。人们在生活中逐渐感到这种表示很不方便，后来在许多民族中，将这一串的叙述改用相应的名称来代替，这些名称便作为数字巩固了下来，例如，表示数“二”时用“耳朵”“手”“翅膀”等名词，“四”表示为“鸵鸟的脚趾”（四趾的）等，后来手指计算逐渐引起了记数法的调整，人们自觉地想使数的口头表达简单化。例如，表示数“十二”的“两只手上的十个手指和一只脚上的两个脚趾”被简化为“脚的二趾”。再例如，为了表达数“二十三”，把“两只手上的十个手指和两只脚上的十个脚趾及别人的三个手指”简单地说成“别人的三个手指”。这里的“十个手指”和“十个手指及十个脚趾”就是表示比手更高一级的单位所用的，而手指或脚趾起的是低级单位的作用，当时类似的简称导致划分出了更高一级的单位，这样一来，数学中独特的记数法和进位制就已经形成了。

二进制被认为是最古老的记数法，它最早出现可能是人的手、脚、耳等都是二的缘故，这之前人们还未使用手指进行计算，人的一只手还是低级单位，即一只手表示数“一”，双脚表示数“二”。我们至今还可在高度发达的民族中找到二进制记数法的痕迹，譬如说，人们有时希望一双、一对地来数数，市场上买鸡蛋的人有时就是这样数数的。澳大利亚和波里尼西亚群岛的人至今还保留着二进制记数法，二进制记数法在当今的计算机中得到了很好的应用。

由于人们后来使用了手指计算，这就使各种记数法和进位制被相应地创造出来了。

五进制被认为是手指记数法中最古老的，这个记数法起源于美国并得到了充分推广，它在人们开始用一只手的手指进行计算时就建立起来了，当数完一只手的全部手指，作为一个记号记下，又重复再数，至今一些部落（如波利尼西亚群岛和美拉尼亚群岛）还完全保留着五进制记数法。

记数法沿着两条路发展，一些部落没有停留在只用一只手计算，而是转向利用第二只手的手指计算，这就奠定了十进制记数法的基础。而另一些部落推广了用脚趾计算，从而建立了二十进制记数法，这种记数法在北美的印第安人部落、中美和南美的土著居民部落以及北非和西伯利亚北部得到了推广。

目前，十进制记数法在世界各民族中占优势，但这种记数法不是唯一的，某些民族很晚才改用，而先前用的是其他的记数法。马克思在其著作《数学手稿》中称十进制记数法为“最妙的发明之一”。我国早在殷代以前便开始使用十进制记数法，当时的算筹算法不仅采用这种进制，而且严格按位置分别表示不同的单位。我国最早也用过其他的记数法，“八卦图”就是世界上最常见的一种二进制记数法。

在二十进制中，“40”表示“两个人”，“60”表示“三个人”，但二十进制有很大的缺陷，就是要使20个基数都有不同的表达名称，不适宜记忆和推广，因此当十进制被一些部落使用后，十进制的优势逐渐显现出来，越来越多原先使用二十进制的部落开始使用十进制。据推测，人们开始穿鞋后，脚趾被遮起来，不能再使用脚趾进行计算，也促进了二十进制向十进制过渡。二十进制只在一些高度发展的民族中还保留着痕迹，在其他民族中已完全消失。

然而，不用手指直接计算的部落，则用手的关节创造了另外的进位制，并在相当长的时期内得到了有效的发展，形成了严整的体系，这种计算过程是：一只手的拇指是其余手指关

节的计算器，一只手除拇指外共有十二个关节，十二的后面就是高一级的单位，这就形成了十二进制记数法。继续这样下去，并将另一只手的每个手指作为更高一级单位，即一指表示十二，于是第二只手的所有手指建立起了新的高一级单位 $12 \times 5 = 60$ ，即六十进制记数法。这种进位制在古巴比伦广为流行，稍晚时候传到别的民族。

十二进制和六十进制记数法直到现在仍有痕迹，如我国对月份、每天时辰的划分采用十二进制；计时或用度、分、秒测量角度时采用六十进制。

在经济活动的影响下，人类慢慢地创造出了新的计算方法，最后达到严整的程度，并在尚未成为现代数学所使用的方法的时候，得到了不断的完善和简化。

第二节 空间形式概念的起源

劳动的发展和财产的出现，迫使人们发明了数和记数法及名称，经济的发展更引导人们日益扩大和加深数的概念，当需要统计财富和建立税收制度的复杂国家机器出现时，当商品交换转入用货币进行贸易的发展阶段时，数的概念出现了巨大的发展，一方面是书面数字的产生；另一方面是出现了数的运算——数的加法、减法、乘法和除法运算。我国古代人民早在商代和西周就已掌握了自然数的四则运算，会用倍数；春秋末年，就创造了一种简便的计算工具——算筹；先秦时代已有分数概念、整数四则运算和“九九表”。

随着人们的生活需求普遍增长，在数及其计算外，还逐渐发展着思维和实践活动的另外分支，这就是人们发明并发展了各种度量和测量的方法。如果说数的概念促进了数学的一个重要分支——分析的发展，那么人们对周围物体及其形状的观察和各种测量方法的发展，则促进了数学的另一个分支——几何学的产生。

几何概念起源的历史，俨如产生数和计算的历史，每个人从诞生之时起就处在极其丰富的大自然环境中，在与大自然的接触中，不由自主地开始感知每个物体的个别特征，人们从这种环境中认识了最初的几何形式和几何图形。

直线是人们首先产生的概念，当人们在数百次的路途往返中力求发现最短的道路时，当人们在制造最简单的打猎武器——绷紧的弓绳时，直线的概念就明确了。每当人们不得不在开阔的牧场和草原上活动时，在他们的视野中展现出天空与大地的分界线，这就在无意中形成了圆周和圆的概念。他们还在其他情况下遇到过这样的轮廓：如看到天上的太阳和满月，后来正是依照这一图形制造出了圆形的车轮和器皿。当人们发现自己的大小腿（股）或上下臂之间因弯曲而成一定角度时，便产生了角的概念，有的名称保留至今，如在英文中称直角三角形的两边为“两臂”，在中文中称一直角边为“股”等。

人们通过对周围世界的观察和测量，抽象出了一些最初的几何概念，并依照各种图形，制造出日常生活中必不可少的物品，如生产有几何图案的陶器，纺织出有几何图案的布匹等，把它们作为完美、正确的几何图形，铭记在人们的脑海里。后来，人们通过建筑房屋，用黏土制作器皿，制造狩猎和捕鱼的武器等无数次地使用它们，加深了对这些几何概念的理解，也促进了更多、更新的几何概念的产生。

这些事实说明，人类最初的几何概念基本上不是靠对周围世界的简单观察产生的，而是借助于满足自身必需的生活需要的实际生产活动产生的，至今保留在几何里的术语都可以证明这一点。例如，几何术语“点”是从拉丁语“Pungo”翻译过来的，意思是“刺”“触动”；“直线”来自拉丁语“Linea”，意思是“麻线”；“棱锥”来源于埃及语，埃及人用这个词来称呼他们所建造的金字塔。

有了这些几何图形，人们开始按照图形的形状建造他们日常生活中需要的物体，如房屋、生产工具及其他，这就导致了最初的长度、面积、容积等度量概念的产生。最初的长度测量与古人身体部分的大小有关，比如，通常以成年男子的步子作为通行的长度测量单位，直到今天有时也需要用脚步来测量距离，甚至测量一些物体的长度时还要动用手和脚帮忙，这时手的厚度、拇指与食指或中指顶端之间的距离、手肘到指尖的长度、脚掌的长度等都是测量单位。

居住在世界几大河流域的农牧民族，为了驯服和利用这些湍急的河流，需要测量土地、观测天象、制定历法为农牧生产服务，由此产生并发展了技术和数学，特别是几何。

数的写法、几何的发展和度量单位体系的发展，始终与民族文化水平的普遍提高是同步的，因此数学的发展在那些沿着国家化道路发展的国家里颇为迅速。

第二章 最初的数学知识积累时期和 形成数学思想雏形

人类的文明首先在中国的黄河，古巴比伦的幼发拉底河、底格里斯河，古印度的印度河和古埃及的尼罗河等几条大河流域诞生。这些地方的自然条件千差万别，这些国家都有曲折蜿蜒的海岸线，更有海湾相间，海岸附近的岛屿星罗棋布，干旱的沙漠和肥沃的河谷比比皆是，大陆时而被山脉隔断，时而是绵延数百公里的草地、沼池和平原，沿海一带使航海业和贸易业得到了早期发展，河谷两岸肥沃的土地是原始耕作的发源地，崇山峻岭为人们提供了丰富的物质财富，所有这些给古代的农牧民族造就了定居的优良条件。

在人类发展的漫长过程中，劳动的区分、部落的兴衰更替、语言的相互作用，促进了这些地区文化技术的发展，使这些地方比世界上其他地方更早地出现了私有制，导致了北非的河谷地带和与它接壤的亚洲部分以及现在的印度和中国等地，形成了第一批阶级社会——奴隶社会。

古代的先民们并没有掌握多少劳动技术，也不能控制大自然，人们的生产、生活主要依靠周围环境的恩赐。人们在生产和分配的过程中，需计算捕获野兽的数量和奴隶的多少，每个劳动者需要计算面积、体积和农作物的数量，测量土地，观测天象，制定历法以发展农业是历代大事，为了利用湍急的河流为农业生产服务，为了满足生产和生活的实际需要，必须产生并发展技术和数学。公元前 3000 年左右，一些算术和几何的零碎知识在这些地区就开始萌芽了，直到公元前 5 世纪，数学都未形成一门独立的学科，人们对数学的认识还处于感性的初级阶段，但人们在长期的生产实践中，逐渐把出现的数学知识积累起来。

下面介绍古代几个东方国家数学发展的概况。

第一节 中国古代数学的萌芽和初步发展概况

中国是世界上公认的四大文明古国之一，悠久和灿烂的文化丰富多彩，为今天的世界文明作出了不朽的贡献。数学是中国文化的一个重要组成部分，在中国文化发展史以及世界数学史的宝库里都是闪闪发光的，值得我们学习和研究。

翻开中国数学史，我们会发现，我国古代的数学成果形成了一套完全是自己独创的体系。我国历代数学界人才辈出，不断创新，独具特色。从记数法、分数、小数、正负数及无限逼近任一实数的方法以及解联立方程组与二次、高次方程等，都是中国古代数学家的发明创造，在世界上一直居于领先地位。中国是世界上数学史最长的国家，古代中国最初的数学知识促进了朝鲜半岛、中南半岛，尤其是日本这些邻国数学文化的发展。因此，中国古代数学对世界数学的发展和中外科学文化交流作出了非常巨大的贡献，在世界数学宝库里，中国数学史影响深远、风格独特。

中国数学史的资料极为丰富，清代数学家阮元及其后继者在 1799 年至 1898 年间陆续完成《畴人传》共 71 卷，记录了历代许多数学家的事迹和成就。20 世纪以来，我国著名的数学史家李俨（1892—1963）、钱宝琮（1892—1974）、严敦杰、梁宗巨及当今世界著名数学家李约瑟都写过专门的研究著作，取得了许多丰硕的研究成果。本节将概括叙述中国古代数学的萌芽时期和初步发展时期。

这个时期数学的主要成就有：结绳记数，发明了尺规作图和测量，发明了十进制和二进制记数法，把数的概念从正整数扩展到了分数、零、负数；建立起了数的四则运算系统；发明了用算筹作为计算工具；几何有了更广泛的应用；方程的解法达到了很高的水平；产生了许多数学著作。

结绳记数就是用绳子打结来表示数量多少的一种方法。我国古代有很多这方面的记载，如战国时期的学者庄周（约前 369—前 286）就在他的著作中提到过“伏羲作结绳”，伏羲是古代神话中人类的始祖，这说明结绳记数在十分久远的年代就有了，周代的《易经》中也有“上古结绳而治”的说法，这就是说，远古时代我国劳动人民就已经使用绳子打结来记数了。

我国的数学文化历史悠久，据考古学家考证，10 万年前河套地区的人已在骨器上刻有菱形等几何图形，后来发掘出来的殷代车轴上也有五边形、 n 边形的装饰。

传说黄帝令“隶首作算数”，大挠发明了甲子，倕创造了规矩^①。战国时期的学者尸佼（约前 390—前 330）在他的著作《尸子》一书中说“古者，倕为规、矩、准、绳，使天下仿焉”，由此可看出，我们的祖先在距今 4500 多年前已有了测量和作图的工具，创造了圆、方、平、直的概念。然而比尸佼更早的，春秋战国时期的学者墨子、荀子、韩非子等人都论述过规矩方面的事。规就是圆规，矩就是木工用的角尺一类的工具，规和矩的发明在理论和实践上都有极其重大的意义，用途非常广泛，它们把几何和代数结合起来了，这是我国数学一开始就注重实际、注重数和形结合，在实践中逐步发展完善的一个典型。

另一说规和矩为伏羲氏所制造，在山东嘉祥县武梁祠的石碑上刻有一幅汉代蛇身人面的浮雕：伏羲氏手执矩，女娲氏手执规（见图 2.1）。司马迁在《史记》里也有大禹治水时“左准绳”“右规矩”的记载（见图 2.2），说明夏禹用水准工具、绳尺、规和矩去测量，规划治水工程。规和矩的使用，对后来中国几何学和测量学的发展产生了很大的影响。



图 2.1 伏羲女娲浮雕



图 2.2 大禹右手执规矩，左手执准绳

孟子说“离娄之明，公输子之巧，不以规矩，不能成方圆”。离娄是传说中一目力非常的人，能在 100 步以外看清楚一根毫毛的末端；公输子就是鲁班。孟子的意思是说，即便有离

^① 大挠是黄帝的老师，倕为黄帝时代的能工巧匠。