俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Mathematics Analysis Courses

数学解析教程（上卷）1

[苏] 别尔曼特 著　张理京 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

数学解析教程

Mathematics Analysis Courses

（上卷）

①

●[苏]别尔曼特 著

●张理京 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍了实数及近似值的四则计算法，函数概念，极限概念，导函数与微分、微分学，函数的研究及曲线的研究. 书中配有相关例题以供读者学习理解.

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学解析教程. 上卷. 1/(苏)别尔曼特著；张理京译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016. 1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5493 - 4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①别… ②张… Ⅲ. ①数学分析 - 教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 247996 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 穆青

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传　　真 0451 - 86414749

网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn

印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开　　本 787mm × 1092mm 1/16 印张 20.75 字数 439 千字

版　　次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 5493 - 4

定　　价 58.00 元

原序

在这第六版中，本书经过相当多的修订，其首要目的是使本书能完全适合苏联高等教育部所颁布的高等工业学校新教学大纲(1950 年).

修订时著者面前摆着下列三项总的任务：

1)把属于哲学方法论上的以及属于历史性的知识放到教程里面去；

2)讲解一些为每个工程师所必需的知识，即关于近似计算法及实际计算以及关于帮助作那些计算所用的计算机；

3)从教学法方面来改进教本，并参照几年来的教学经验，克服教本上所发现的缺点.

著者在引论里面要简略讲到数学的起源问题，讲到数学的重要任务，讲到理论与实践间的相互关系，讲到俄罗斯伟大数学家(欧拉·罗马契夫斯基，切比雪夫)以及其他杰出学者与大工程教学家(如茹科夫斯基，恰普雷金，克雷洛夫)在科学与工程发展史上的地位.

在预篇里，特别有一节讲近似计算法中的初等问题. 本书后面处处尽可能讲到如何把理论应用到数值计算问题上. 因此关于微分概念、有限增量公式、泰勒公式与级数等，对于各种近似值计算法的应用就讲得相当多一些. 书中加了几小节关

于普通方程的近似解法，函数的图解微分与积分法以及微分方程的近似积分法等. 此外，著者还设法让读者认识一些重要的自动计算机及计算仪器（迄今所知，这在教科书性质的文献上还是个创举），在预篇的 §3 中要叙述那些处理各个数据的计算机，并且在本书后面适当的地方还要讲那些处理连续数据的仪器（积分制图器，测面器，积分计，测长计，微分及谐量分析器）.

但在添加这些材料时，著者会避免把技术上的细节讲得太多，只能让读者去参考关于这方面的现有专门书籍以及每件仪器上通常都附有的说明书. 著者只打算使读者对那些帮助作繁复运算的机械工具，了解一些大概.

现代科学与工程实践上的创造性工作都需要具有极高的数学知识，并且这不仅是指能够搬运公式，而主要的乃是需了解数学解析中各种概念与运算的本质. 因此如何克服那个在数学中易陷入的以及在实际教学工作中易犯的“公式主义”，如何克服那随之而来的对数学解析的肤浅学习，乃是我们最重大与主要的问题. 著者认为如果按下列程序来拟教材结构的话，就可能正确地解决这个问题，这个程序是：实践—解析的基本概念—这些概念的性质（理论）—计算方法—用法—实践. 著者在这全部教程内一贯按这种程序来讲解，那样才可能指出数学与实践的联系. 揭露其中一些基本概念的物质根源，并说明在解决具体的物理与技术问题时如何应用数学理论的明显原则. 在所有这些要求下，著者当然有责任把本书中的每一部分弄得尽可能易于了解.

从讲解方面来改进本书的路线，是根据著者自身的经验以及用过本书的教授和教师们的许多意见得来的. 首先，著者设法把长的以及繁复的一些讨论分成几段. 其次，著者在内容方面重新做了各种穿插与编排，使教本的结构更有层次并且更加简单.

莫斯科航空学院高等数学教研组在总结对于本书初稿的讨论中，表明他们的希望，认为可以将有关定积分与不定积分的材料予以改编，以便毫无困难地按照任意次序进行这部分材料的讲授，先讲定积分后讲不定积分，或者颠倒来讲都行. 有些工学院里讲这几章时宁愿先讲不定积分，著者考虑到他们的愿望，因此也就做了这种改编，最后，本书的全部材料都经重新仔细校阅过并且重写过.

除了上面所讲的以外，本书在各章节上还有如下的一些最重要的改动：

第 2 章中，加上均匀连续性概念，并证明了基本初等函数的连续性. 第 3 章中，把微分概念放在全部微分法之后再讲，并加上莱布尼兹公式. 第 4 章几乎所有各部分都重编过，里面提出了近似多项式问题，讨论了切比雪夫线性近似式（以及与零相差最小的切比雪夫多项式），讲解了曲线的接触度问题，然后引出曲率概念. 在第 6 章中，叙述了奥氏（奥斯特罗格拉特斯基 M. B. Остроградский）的有理分式积分法. 第 7 章是新添的，讲直接应用于计算定积

分的积分方法,讲(数值计算的及图解的)近似积分法及旁义积分,并且关于后者的理论大为增加,这一章可以在依照第 5 章、第 6 章的次序讲完后再讲,也可以在依照第 6 章、第 5 章的次序讲完后再讲. 我们又把级数论(三角级数除外)作为第 9 章,其中添入级数的运算法则,扩充了关于幂级数应用问题的材料,补充了一些复数的四则运算法及复平面上的幂级数. 第 10 章中搜集了多变量函数的导数及微分概念以及偏微分法的材料,第 11 章讲微分学的下列应用:在对于所有关于函数的研究,在矢量解析及几何上的应用,其中最后几小节的材料增加得相当多. 第 13 章中把关于场论(势,流及环流)的问题合并成一大节,这可以算是矢量解析的积分部分. 而第 11 章 §2 中的材料则可作为矢量解析的微分部分(梯度,散度及旋度). 在第 15 章中,我们导出了逐段光滑函数展开为傅立叶级数的充分条件,并叙述了具有有限个间断点及极值点的函数展开为这种级数的类似条件,此外又讲了克雷洛夫使级数收敛性加快的方法.

所有说明性质的例子及超出教学大纲中所规定的那些材料是用小字排印的. 如果略去那些材料,后面用大字排出的各部分仍然可以了解,并无影响.

适用于这新订本的别尔曼特(А. Ф. Бермант)习题汇集也已修订(下略).

目录

引论

读者开始研究数学解析这门课程时,应该了解(即使是很笼统的)这门课程的目标,它在自然科学与技术课程系统中的重要性,数学对于现实的关系及本书中所要提到的那几个俄罗斯大数学家的功绩. 我们在本书开头几页里就要讲这几个大问题,虽然我们知道读者不会都事先熟悉高等数学中的方法及所研究的对象,但希望所讲的知识能帮助读者有信心地掌握这门课程. 我们也希望让读者在往下研究本书的时候回过来翻阅这前几页.

在 §1 中,我们解释初等数学与高等数学间的差异以及这种分法的惯例性,使读者认识数学解析的主要任务是什么,弄清楚数学理论与客观现实间的关系. 在 §2 中讲了一些关于俄罗斯大数学家的历史知识.

§1　数学解析及其意义

1. 初等及高等数学.

一般统称作初等数学的那几门数学(初等代数,初等几何及三角)来源很早,现有的初等几何学整个系统,除了一小部分以外,都是在公元前 5 世纪至公元前 3 世纪时就已形成了. 古代巴比伦人(公元前 3 世纪至公元前 2 世纪)对于代数变换

法及方程解法也具有相当精湛的技巧，但代数作为一门科学来说，它的产生却在公元8世纪，那时有个阿拉伯著名学者穆罕默德·伊本·穆萨·花拉子密在他的著作《Hisāb al-Jabrw-al-Muqābalah》中讲解了代数的基本原理，并且代数"algebra"这个名称也是从该书书名的第一个字得来的．三角法的产生也是跟更早期的天文学研究有关的，不过对于三角函数及其属性的概念则一直到16至17世纪时才研究出来．

通常统称为高等数学的那几门数学，是随着17至18世纪时，科学与工程的进步而发展起来的，应该指出，高等数学中一些个别的观点与方法是古代伟大数学家、物理学家兼工程师阿基米德(公元前287—212)早就认识到的．不过高等数学还是比较年轻的科学．

数学的"高等"与"初等"之分是照惯例的，我们不可能说出任何一个决定性的准则，来判定某些数学事实或某些数学定理是属于初等数学的．但是，我们可以指出习惯上称为初等数学的，由历史上与数学上所形成的那门中学课程所固有的两大特征．

初等数学的第一个特征在于其所研究的对象乃是不变的量或图形．初等数学中的典型问题是：已知一代数方程——要找出满足该方程的常数(方程的根)；用初等代数中所讲的法则把已知代数式变换为他式；算出某些几何常量(例如长度、面积及体积)的值，或作出一定的点线及图形，使其具有所需的属性．

三角法中所考虑的是三角函数随着角或弧而变化的情形，但所讲的材料是描述性质的，而不是根据某种一般理论推出来的，通常这种做法不能作为导出三角函数的属性的根据．初等三角法中的基本问题有跟几何与代数的问题相同的性质：研究三角式子的简单变换法以及用三角函数来计算几何图形中的元素．

初等数学的第二个特征是在方法上．初等代数与几何中的理论是各自独立构筑出来的．初等数学中的代数法(或按广义的说法叫作解析法)与初等几何中的综合法在本质上是没有联系的．但这里当然并不是说几何及三角中的计算问题不会用到最简单的代数公式．重要的一点是，在初等数学范围内没有总的原理，使我们能唯一地解释所有代数问题的几何意义，而把所有几何问题用代数术语陈述出来并用计算法从解析上来解决．

工程上与经济上的实际需要迫使人对自然界做比之前更深刻的研究，研究的结果使人对周围世界中所观察到的变化过程与现象创立了学说．这首先涉及物理现象，但要从量的方面来研究变化过程时，就必须创出新的数学，使我们能用解析来掌握参与过程的各个量的相互变化情形．

数学解析，特别是本书中所要讲的微积分法，乃是高等数学中极重要的部

分. 它与初等数学不同,是在依从关系中去研究变量的.

在方法上高等数学也与初等数学相反,前者是在代数法(按广义说来,即解析法,亦即计算法)与几何法密切结合的基础上发展起来的,而这种结合首先出现在法国著名数学家兼哲学家笛卡儿(1596—1650)的解析几何学中①. 坐标观念是这样的一个总的原理,我们一方面能用代数(或解析)的运算来顺利证明几何定理,而另一方面由于几何观念的显明性,使我们又能发掘及建立解析性的新定理与新论点.

但是还要注意到,数学的"初等"与"高等"之分是照惯例的,与其说是根据原理特性来分的,还不如说是根据教学特性来分的. 所以初等数学中也渐渐愈来愈多地包括了触及高等数学的思想的问题.

2. 量的概念、变量及函数依从关系.

在任何自然科学及技术的知识领域中,我们每一步都碰到的一个基本概念,就是量的概念. 所谓量是能加以度量并用数(一个或多个)表示出来的一切. 换言之,凡是可以施行度量(形式最简单的度量或是经数学方法改进了的度量)的一切对象叫作量. 形式最简单的度量是:取一个本质跟被量对象相同的东西作为"度量单位",然后直接确定该被量对象"容纳"多少倍"单位". 经数学方法改进的度量以及上述最简单的度量的继续发展,便引出数学解析中所研究的新的重要概念——导数概念及积分概念等等.

在实际生活及自然科学与技术科学的具体问题中,我们一定曾遇到种种本质不同的量. 例如:长度、面积、体积、质量、温度、速度、力等等这些东西都是量. 但是在数学中并没有具体的量. 数学(特别是数学解析)中所创造出的一般理论是可以应用到种种本质不同的量上去的. 要能创出这一般理论,就必须在陈述数学原理及数学规律时抽去各种量的具体性质而只注意它们的数值. 根据这个道理,所以数学中只考虑一般的量,而用某种记号(字母)表示,毫不假定它可能含有什么具体物理意义. 正因为如此,所以数学理论是可以应用来研究任何具体的量,而同样获得成功的. 数学理论的一般性或普遍性或所谓抽象性(这个名词常被人误解为脱离实际与现实)也就表现在这一点上. 恩格斯用下面的话着重指出数学的这项特性:"要纯粹地研究这些(空间——著者注)形状及(数量——著者注)关系时,就必须完全不管它们的内容,把内容看作是与研究无关的东西而加以抛弃. 于是就有所谓无大小可言的点,无粗细可言的线,有 a 及 b,有 x 及 y,有常量及变量,……"(俄文版《马恩全集》第十四卷 39 页).

在一起考察的诸量中,常有些是变化着的,而另一些量是不变的,变化与运动是通常所谓现象及过程中的首要标志. 在自然界或工程上所观察到的现象,

① 苏联中等学校中不讲授解析几何,解析几何被列入高等数学以内. ——译者注

我们都领会作是参与该现象的一些量受另一些量的变化所制约而引起的变化. 例如在观察恒温下一定质量的气体时,我们就注意其体积变化时的压力变化情形. 用数学方法研究过程所得的知识,结果比不用数学方法时更为深刻完备而且准确. 但要用数学方法来研究过程,就必须在数学中引入变量概念. 而这事确实就在创立新数学的第一阶段时,笛卡儿及其后的牛顿与莱布尼兹时代做到了. 数学里面引用变量乃是数学史上的一件大事,关于这一点恩格斯曾写道:"笛卡儿的变量是数学上的转折点,有了变量,数学里就有了运动与辩证法. 有了变量,不久就需要有微积分法,而微积分法也就在那时产生,并且总的说来它是在牛顿和莱布尼兹两人手上完成的,不是他们凭空发明的"(1948 年版俄文本《自然辩证法》208 页).

凡是可取得各种数值的量叫作变量;凡是保持同一数值的量叫作常量(或常数).

如前面所讲,把每个现象或过程(从数量方面)看作是若干变量间的相互变化情形. 这种看法使我们引出数学里的极重要的概念——函数依从关系.

如果两个变量间有下列关系:其中一个量的变化会引起另一个量的一定变化,那么这种关系就叫作这两个量之间的函数依从关系. 把已知过程中各个量之间的函数依从关系确立出来并加以描述,是自然科学及技术科学的首要任务. 变化过程的规律无非就是出现在该过程中并且刻画该过程的函数依从关系,也可以说是这个函数依从关系描述了变化过程,例如在常温下气体压力(p)与体积(v)之间的函数依从关系是 $p=\dfrac{k}{v}$(k 为常量),而这依从关系就定出了气体在所论条件下所遵守的变化规律(波义耳-马利奥特定律). 用文字表达这个函数依从关系:(在恒温下)气体压力与其体积成反比例. 便是上述规律的通常陈述法.

这个函数依从关系的观点,是由于普遍公认的因果原理而产生的. 因果原理在 17 及 18 世纪中为自然科学及其他各门科学所传播着,不过这原理跟函数依从关系的数学观念是有本质上的差别的. 它需要找出引起已知结果的(一切的或只是最重要的)确实的原因,而函数依从关系则仅提供诸量间的关系,并不一定认为其中某个量的变化乃是使他量变化的实际原因. 例如一昼夜间空气温度的变化是由许多原因所致的,风力的变化,太阳幅射力的强弱以及空气温度等等. 但这里我们却可以直截了当地建立出温度与(一昼夜内)时间的函数依从关系. 尽管时间的进行决非温度变化的"原因",但是如果我们要从量的方面去刻画温度的变化过程,并因而要了解这变化过程的特性时,上述函数依从关系便可能是极重要的资料.

数学解析是以全面研究函数依从关系为其主要目标的. 多亏为这种研究所

发展起来的方法,人们才发现了极有力的工具,使其能对自然科学及工程上的各种各样的问题进行准确而深刻的研究.“只有微分法,才使科学上能用数学来表示(静的——译者注)状态,而且还可用它来表示(动的——译者注)过程——运动”(恩格斯《自然辩证法》1948 俄文版 220 页).

3. **数学解析与现实**.

不仅是在各门自然科学的状态和过程中,而且在各门社会科学中,凡是必须从量的方面去考虑其中的状态和过程时,我们都可用数学来作研究(数学上所研究的问题不一定是数量性质的,也可能是属于空间形状及其关系的,但这些问题,本书中几乎不会讲到).对于科学与工程来说,数学是其理论研究的极重要方法及实用工具.如果没有那些初等数学与后来的高等数学中所给的工具,就不能做任何技术上的计算,所以如果没有数学,就不可能进行工程上与科学技术上的任何严正的工作.这是由于技术科学要以物理学、力学、化学等为其基础,而后者中的数量性的规律必须用数学解析上的函数概念及其他概念表示.伽利略早就说过:“自然规律要用数学语言来记录”,恩格斯也曾说:“要辩证而又唯物地了解自然,就必须熟悉数学”(“反杜林论”.见俄文版《马恩全集》第十四卷 8 页).

正因为物理学、力学等上的基本规律是用数学语言表达出来的,所以使我们可能在理论上借逻辑推论及计算的帮助,从已知规律性找出结果,并解决自然界及人类实践所提出的新问题.

过程中量的规律性与其质的本性间并无厚墙相隔,量与质两方面有密切关系,这是完全符合于辩证唯物论的.所以在科学及工程上所考虑的任何过程,如果从一切方面以及从整体上去认识时,数学是必不可省的东西.有人说得对,数学是掌握技术的钥匙①.

如前所述,由于 16 及 17 世纪中自然科学及技术科学上的需要,就不可避免地产生了数学解析中的一些观念和方法,而科学与工程的蓬勃发展是受到生产的急剧变革和扩大所激起的.“科学的发生和发展,一开始就已受了生产的制约”(恩格斯《自然辩证法》1948 俄文版 147 页).

本书中,我们会尽力说明其中基本的数学概念及运算的现实与具体的根源,要指出什么客观事实和条件产生了新的数学理论.其次我们要尽可能使这些理论是按数学的严格性讲的,以便将来在提高水平上指出其更广泛的应用.因为归根到底理论的意义是要在实践阶段里决定的.

---

① 由此读者可以自己体会到,如果要想灵活地掌握他所选择的专门技术,那就必须深入了解数学概念及其定理的精神所在,而不能仅限于所学事物的形式方面,必须深刻而不是肤浅地研究数学解析及其应用.一句话,如果读者全力以赴,对所学的数学解析课程深思熟虑,心有所得,当他学习别的课程时及以后做科学或实际工作时,数学解析确实能成为他手中的工具,那么他的学习态度是正确的.

发展数学理论时(一般对其他任何科学理论都一样),决不可忘却该理论的根源.我们应该记住,要判别理论的可靠与否以及有无价值,决定性的准则是在生活实践上的考验.列宁曾写道:“生活的、实践的观点应为认识论的首要与基本的观点”(第四版《列宁全集》14卷130页).

俄罗斯大数学家切比雪夫,对于数学理论与实践间的关系曾说过极有意义的话:“理论与实践结合会产生极良好的结果,而受惠的不仅是实践,科学本身就是在实践的影响之下发展起来的.实践把新的研究对象或已知对象的新的方面揭示给科学.近三百年来尽管大几何学家(亦即数学家——著者注)的工作使科学有这样高度的发展,但实践指出科学在各方面仍不够完善.实践提供科学在本质上崭新的问题,因此促使人们导出崭新的方法(来解决它).如果旧方法的新应用及新发展使理论得到很多改进,那么新方法的发展对于理论的贡献更大,在这种情形上,科学在实践中找到可靠的指导者”(“地图绘制问题”见《切比雪夫氏数学著作选集》,苏联国家技术出版社1946年,第100页).关于数学在经验上的根源问题,我们再引用恩格斯的话:“图形概念与数学的概念一样,是完全借鉴于外界的,而根本不是从头脑中纯粹思维产生出来的.在人类有图形概念以前,就该存在着具有一定形状的东西,就该有人们比较过他们的形状”.在这里恩格斯更深入地讨论到数学的对象问题,由于其所讲的话深刻而又简明,故可把它看作是对于数学的最准确而又令人满意的定义:“纯粹数学的对象是现实世界中的空间形状与数量关系”,而这,恩格斯往下说道,“……是非常现实的内容.虽然这内容以极端抽象的形式出现,但那只能略微掩饰它起源于外间世界的事实”.

哲学上的唯心论者认为科学不是存在于我们身外的客观现实的反映,而是人类心灵所自由创造出的产物.但科学能使人得到预见,这事与上面的观点不可能调和.人之所以能具有预见,恰恰证实了数学这门科学也是由客观现实产生的,证实了它的规律与关系是以数学上特有的抽象形式正确反映出来的物质世界中的现实关系.如果所证实的事并不如此,那么为什么凭借数学的帮助,由理论方法(由可靠的假定出发)得出的推论会是正确的,为什么“预言”会与现实、与以后确实发生的事完全相符合呢?

科学史上充满着著名的预见例子.这里我们只略讲两个例子,它们很足以说明数学在其中的作用:

1)法兰西学者勒维耶[①](1811—1877)曾研究太阳系中的行星运动问题.起初他根据古典力学中,用已知函数关系表示出来的规律,但发现由此所得的一些推论与观察的事实有出入,他又发现,如果假设还存在一个具有一定质量及

① U. J. J. Leverrier.

在一定轨道线上的行星,便可使推论与事实没有出入,不久就有人根据他的推测,在他所指定的时间和位置发现了一颗新行星,后来称为海王星. 这样就曾有人借计算而发现了新世界. 现在我们对于未来的天文事件,能做极准确的预言,已经不足为奇.

当然,天文学上之所以能推测未来,正是由于所用数学方法能正确反映客观规律的结果.

2)19 世纪末及 20 世纪初的莫斯科著名力学家茹科夫斯基[①]教授,乃是航空学说的创立者. 在他研究航空理论的时候,曾用数学方法找出了一些公式和定理,这在过去和现今都是学者和工程师们在改善飞机设计工作中所遵循的原理. 特别是茹科夫斯基从理论方面预测了“高级飞行技术中翻筋斗”的可能性. 不久就有俄罗斯陆军上尉涅斯捷罗夫[②](1886—1914)实现了飞机第一次翻筋斗的壮举“打环圈”(飞机在铅直平面内打圈). 因此在“具体”出现“打环圈”的事以前,“数学上”就已先发现了.

这些例子说明了数学方法认识自然界的伟大成功. 但是不仅在科学与工程界的大问题上,在其他或大或小的任何问题中,我们每一步工作都是有了下列把握才着手进行的,事先的数学计算,即所谓“计划”,给出事物发生的真实景象. 如果没有这种把握,那么就不会有科学与工程,也不能使它们有进步.

数学是在科学与技术方面获得预见的有力工具.

但是,客观现实的一切现象及关系,经由各种科学(其中包括数学),在人们意识中的反映仅仅是近似的. 科学的进步也正在于我们对于世界的认识能越来越准确. 在认识论中与其他一切科学一样,我们应该辩证地思考,也就是说,不应该认为我们的认识是完全不可变的,而应该分析怎样从不知变成知,从不完整、不准确的知变成更完整、更准确的知.

§2 一些历史知识

4. 大数学家:欧拉,罗巴切夫斯基,切比雪夫.

自从微积分法在牛顿和莱布尼兹的著作中阐释成科学理论之后,接着数学上就有一段灿烂持久的发展时期. 在百余年中(自 17 世纪末到 19 世纪初)数学及与其有关的各部门自然科学有了飞快的进展. 新的结果,整套新的学说源源不竭地出现了,鼓舞学者去继续发展数学理论的探讨和解决实用科学问题的数学方法. 在这段充满着丰功伟绩的时期中,世界各时代的最伟大数学家之一欧拉做了许多杰出的贡

① Н. Е. Жуковский.

② П. Н. Нестеров.

献. 彼得堡科学院士黎・巴・欧拉[1](1707—1783)是瑞士人,在彼得堡科学院工作三十余年之久,他本人和他家庭的命运是永远与俄罗斯分不开的.

我们可以从《欧拉全集》的份量(还没有出全)七十卷,内含近800篇论文,其中有650篇以上是首先发表于彼得堡科学院出版物中的,约略窥知这人著作的极端丰富. 关于欧拉著作的价值,我们至少从下面的事实可以判明,现今许多自然科学的基本结果都带着欧拉的名字. 欧拉一生辛勤不断的工作,为数学解析、力学及其他许多工程与物理学部门奠定基础而努力. 以后我们将要多次讲到这位天才学者的定理和命题.

大几何学家尼・伊・罗巴切夫斯基[2](1792—1856)在欧拉之后的35至40年间开始他的科学研究工作,他是科学界的大胆革新者,敢于违反了数百年确立不移的以欧氏几何刻画空间的神圣传统,而创出新的非欧几何,在学者面前开辟出新型空间的世界. 除了这一点以外,罗巴切夫斯基在几何学上的贡献还对全部数学的方法论具有重大的意义,他的贡献是对科学的基础及所积累的大量实际材料重新加以批判的考虑,是建立数学教程时采用公理推述法的开端. 罗巴切夫斯基首先明显地指出几何公理的具体来源,驳斥了德国唯心哲学家康德认为几何公理有先验性和天赋性的说法.

罗巴切夫斯基在解析方面的直接贡献不多,而这些东西也因天才思想家的才干预示着未来科学发展途径而受到重视. 我们在适当的地方要指出罗巴切夫斯基的这些工作.

讲到罗巴切夫斯基杰出的人品时,我们不能忘记他在教学方面以及一般启蒙和社会方面的先进活动,这对于俄罗斯高等教育的制度有重大的影响.

罗巴切夫斯基是科学大发展史里俄罗斯学者名单上的第一名,是最了不起的人物. 从那时起俄罗斯学者就越来越多地出现在数学前线的先进地位上. 同时值得注意的是,无论在一般数量上与质量上的扩展与巩固情形,俄罗斯数学界都是步调越来越快的. 现今的发展趋势在各部门数学中已经达到这种成就,以致使苏联数学在全世界范围内已处于主导地位,俄罗斯及其后苏联数学界的发展还有一些其他特点与特有的趋势. 它致力于获得有效的结果,与各种应用科学保持紧密联系,它对于数学工具的功效与对于解决(即使是逐步的)任何艰难问题的可能性有坚定的信心.

大约与罗巴切夫斯基生活及工作于同一时期的科学院士奥斯特罗格拉德斯基[3](1801—1862),他是另一方面——解析方面——的大天才数学家. 在解

---

① L. P. Euler.

② Николай Иванович Лобачевский.

③ M. B. Остроградский.

析、代数、数论及力学等许多方面都有奥斯特罗格拉德斯基的发展. 他的许多发明曾大大地推进了科学的发展,曾是其他学者开始研究的出发点,并且几乎放在全世界的教科书中很快成为经典性的东西. 我们在本教程中也要研究一些奥斯特罗格拉德斯基所得的结论.

大数学家切比雪夫[①]院士(1821—1894)的科学研究及数学工作始于莫斯科而后在彼得堡. 他曾是俄罗斯大数学学派(彼得堡学派)的奠基人,也是完满发挥了切比雪夫杰出观点的现代苏维埃学派的始祖. 切比雪夫的研究在观点和方法上有非常独到之处,并且曾解决了他自己所提出的及其他大数学家所不能解决的问题. 同时他的研究还以其构思的简单与完整而著称. 他一方面是多才的数学家,同时也顺利从事于研究应用科学上的问题. 他清晰认识到数学理论与实践间彼此促进新生以及互相推进的性质,并且他用前面所引述的绝妙言词表达出这种意见来. 切比雪夫的重要贡献之一是对函数的近似多项式问题有新的提法与研究(在第 4 章中要讲到),并因而开辟了数学解析上整个新的方向. 而这项贡献是在切比雪夫的研究(力学理论中的)某些纯粹工程问题时得来的. 当时最好的计算机也是切比雪夫发明的. 这项发明是件极有意思的事,它预先指出了近代一切计算机中最重要的构件.

权威学者的工作会决定几十年以后科学发展的方向,切比雪夫也是全世界所公认的这种学者之一.

切比雪夫学生中有一位数学家兼力学家辽普诺夫[②]院士(1857—1918)对运动的稳定性有深刻的研究;有杰出数学家马尔科夫[③]院士(1856—1922)对切比雪夫著作中及马尔科夫本人所提出的各种问题做了相当推进;还有切比雪夫门徒中的其他许多大学者不可能在这里都讲到. 这里我们只再谈到与切比雪夫同代的一位杰出学者柯瓦列夫斯卡娅[④](1850—1891),她是第一位女数学教授,她在数学上(主要是数学解析方面)的成就迫使彼得堡科学院放弃传统而选她为通信院士.

自苏联伟大卫国战争之日起,数学及其在自然科学与工程上的应用开始了特别蓬勃的发展. 科学工作开始了全新的、以前所不可比拟的规模. 学者的数量增加了许多倍. 在极广阔的范围内,科学事业成为政府的事业,由政府计划和领导着科学的发展. 所有这一切都是使科学获得显著成绩的极有利条件.

苏维埃学者在数学部门的伟大成就照例是科学上的新收获,但是这些数学部门离开本书所讲的初等数学解析甚为深远. 因此我们不可能继续往下细讲俄

① Пафнутий Львович Чебышев.

② А. М. Лапунов.

③ А. А. Марков.

④ С. В. Ковалевская.