●刘长春／编

高考试题分析与数学学习

●GKSTFXYSXX●SDJYC

山东教育出版社

高考试题分析与数学学习

刘长春 编

山东教育出版社
1993年·济南

鲁新登字2号

高考试题分析与数学学习

刘长春　编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东人民印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米　32开本　14.5印张　306千字

1993年12月第1版　1993年12月第1次印刷

印数1—11,000

ISBN 7—5328—1781—4/G·1534

定价　6.00元

前言

高考命题的原则是“出活题、考基础、考能力”，“既有利于高中数学教学，又有利于高校选拔人才”. 试题的“活”充分体现在试题构造的巧妙性、新颖性，试题解法的灵活性、多样性，以及试题本身的多变性、延展性上. 可以说，高考试题是高中教学中最典型的例题.

本书利用四十个专题，较全面地概括了高中数学的基本思想、方法与技巧. 每个专题均从一道高考试题出发，由试题的解法，解法分析与启示，探源、变换、拓广及应用，练习题四部分组成. “试题的解法”主要研究试题的多解性，尽可能从不同角度研究、探讨试题的解法；“解法分析与启示”主要总结“解法”中各种解法的规律、运用范围、并通过典型例题加以示范、印证，努力做到一法多用、举一反三、触类旁通；“探源、变换、拓广及应用”主要探讨试题的出处——与课本例题、习题的联系，试题的题型变换，能否拓广为一般形式，在数学解题中有何应用等，以期收到会一题而及一类的效果；“练习题”是为了巩固该专题所涉及到的数学思想、方法与技巧而设计的训练题组，以期达到锻炼和发展思维、提高能力的目的.

本书按代数、三角、立体几何、解析几何四部分进行分类，在专题安排上注意了从易到难，并力求做到推理严谨、通俗易懂，具有开发学生智力，培养学生解题能力，指导学生

学习方法之功能．既可作为高三复习用书，又可作为数学学习的辅导读物，更是教师教学不可多得的参考书，是广大中学生与中学数学教师的良师益友．

编　者

1993年7月

目　录

代数部分

三角部分

立体几何部分

解析几何部分

代 数 部 分

函数与方程

题目：设 $f(x)$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上以 2 为周期的函数，对 $k\in Z$，用 I_k 表示区间$(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时 $f(x)=x^2$.

(i)求 $f(x)$在 I_k 上的解析表达式；

(ii)对自然数 k，求集合 $M_k=\{a|$使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

(1989 年理科第(24)题).

一、解法

对于(i)，我们有如下解法.

解：$\because f(x)$是以 2 为周期的函数.

$\therefore$当 $k\in Z$ 时，$2k$ 是 $f(x)$的周期.

又$\because$当 $x\in I_k$ 时，$(x-2k)\in I_0$.

$\therefore f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$.

即对 $k\in Z$，当 $x\in I_k$ 时，$f(x)=(x-2k)^2$.

对于(ii)，我们有

解法一：当 $k\in N$ 且 $x\in I_k$ 时，利用(i)的结论可得方程 $(x-2k)^2=ax$. 整理得

$$x^2-(4k+a)x+4k^2=0$$

它的判别式是 $\Delta=(4k+a)^2-16k^2=a(a+8k)$.

上述方程在区间 I_k 上恰有两个不相等的实根的充要条件是 a 满足

$$\begin{cases} a(a+8k)>0 \\ 2k-1<\frac{1}{2}\left[4k+a-\sqrt{a(a+8k)}\right] \\ 2k+1\geqslant\frac{1}{2}\left[4k+a+\sqrt{a(a+8k)}\right] \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} a(a+8k)>0 & (1) \\ \sqrt{a(a+8k)}<2+a & (2) \\ \sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a & (3) \end{cases}$$

由(1)知 $a>0$ 或 $a<-8k$,

当 $a>0$ 时,因 $2+a>2-a$,故从(2)、(3)可得 $\sqrt{a(a+8k)}\leqslant 2-a$,即

$$\begin{cases} a(a+8k)\leqslant(2-a)^2 \\ 2-a>0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} (2k+1)a\leqslant 1 \\ a<2 \end{cases}$

$\therefore 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$.

当 $a<-8k$ 时,$2+a<2-8k<0$,易知 $\sqrt{a(a+8k)}<2+a$ 无解.

综上所述,a 应满足 $0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$.

故所求集合为 $M_k=\{a\,|\,0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\}$.

解法二:(*ii*)即为方程 $(x-2k)^2=ax$ 有两个不相等的实

数解.

将原方程化简得：$x^2-(4k+a)x+4k^2=0$ (1)

令 $y=f(x)=x^2-(4k+a)x+4k^2$ $(k\in N)$，则方程(1)在$(2k-1,2k+1]$上有两个不相等实根的充要条件为

$$\begin{cases}\Delta=a(a+8k)>0\\ f(2k-1)>0\\ f(2k+1)\geqslant 0\\ 2k-1<\dfrac{4k+a}{2}\leqslant 2k+1\end{cases}\quad (k\in N)$$

即
$$\begin{cases}a<-8k \text{ 或 } a>0\\ a<\dfrac{1}{2k-1}\\ a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}\\ -2<a\leqslant 2\end{cases}\quad (k\in N)$$

$\therefore 0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$，$(k\in N)$

即所求集合为 $M_k=\{a\mid 0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}\}$.

解法三：(ii)即为方程$(x-2k)^2=ax$有两个不相等的实数解.

令 $y_1=f_1(x)=(x-2k)^2$，

$x\in(2k-1,2k+1]$，$(k\in N)$.

$y_2=f_2(x)=ax$.

其图象如图 1.

易知直线 l_1 的方程为

$$y=\frac{1}{2k+1}x.$$

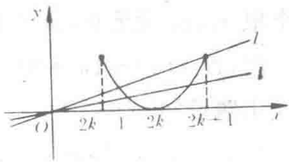

图 1

$\because a$ 为直线 $y=ax$ 的斜率，

$\therefore$ 当直线 $l: y_2=ax$ 与曲线 $y_1=(x-2k)^2$ 有两个交点时，必有 $0<k_l\leqslant k_{l_1}$，即 $0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$.

故所求的集合为 $M_k=\{a\mid 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\}$.

二、解法分析与启示

前面给出了题(ii)的三种解法.其中解法一利用一元二次方程根的判别式、求根公式等知识将讨论方程的根的问题转化为不等式组的解的问题，是一种纯代数的方法，过程比较繁杂；解法二则将一元二次方程根的分布与二次函数的图象紧密结合起来，利用二次函数的图象与性质来讨论一元二次方程的根的情况，过程比较简捷；解法三将方程的左、右两边看作是两个函数，将方程解的情况转化为两函数图象的交点的个数，得到了本题的最佳解答方法.分析上述三种解法，给我们以下两点启示：

1.研究含参数的一元二次方程的根的分布问题，借助二次函数的图象，可使问题化难为易.

2.构造函数，利用函数图象研究含参数的二次方程(乃至超越方程)的根的情况，往往能获得简捷解答.

例 1　m 为何值时，方程 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<1<x_2<2$？

解：设 $f(x)=(m+3)x^2-4mx+2m-1$，

由题设知 $m\neq-3$.

当 $m+3>0$ 即 $m>-3$ 时，抛物线开口向上，如图 2.方程的两根满足 $0<x_1<1<x_2<2$ 的充要条件为

$$\begin{cases} m+3>0 \\ f(0)=2m-1>0 \\ f(1)=m+3-4m+2m-1<0 \\ f(2)=4(m+3)-8m+2m-1>0 \end{cases}$$

解之得：$2<m<\dfrac{11}{2}$.

当 $m+3<0$ 即 $m<-3$ 时，抛物线开口向下，如图 3，方程两根满足 $0<x_1<1<x_2<2$ 的充要条件为

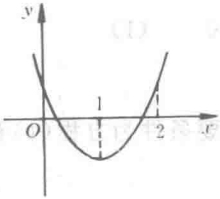

图 2

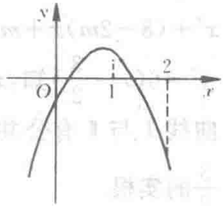

图 3

$$\begin{cases} m+3<0 \\ f(0)=2m-1<0 \\ f(1)=m+3-4m+2m-1>0 \\ f(2)=4(m+3)-8m+2m-1<0 \end{cases}$$

此不等式组无解.

综上所述，当 $2<m<\dfrac{11}{2}$时，方程的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<1<x_2<2$.

例 2　在直角坐标系中，有椭圆 I 和抛物线 Ⅱ，它们的参数方程分别是

$$\text{I}\begin{cases} x=m+2\cos\varphi \\ y=\sqrt{3}\sin\varphi \end{cases} \quad (m\text{ 是常数}, \varphi\text{ 是参数})$$

Ⅱ $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}+t^2 \\ y=\sqrt{6}\,t \end{cases}$ （t 为参数）

当Ⅰ与Ⅱ有交点时，求 m 的范围.

解：将参数方程化为普通方程为

Ⅰ：$\dfrac{(x-m)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

Ⅱ：$y^2=6(x-\dfrac{3}{2})$

消去 y^2 得：

$$x^2+(8-2m)x+m^2-16=0 \qquad (1)$$

由 $y^2=6(x-\dfrac{3}{2})$ 知，$x\geqslant\dfrac{3}{2}$.

∴曲线Ⅰ与Ⅱ有公共点的充要条件为方程(1)有不小于 $\dfrac{3}{2}$ 的实根.

设 $f(x)=x^2+(8-2m)x+m^2-16$，则方程(1)有不小于 $\dfrac{3}{2}$ 的实根的充要条件为

$$\begin{cases} \Delta=32(4-m)\geqslant 0 \\ f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{9}{4}+(8-2m)\cdot\dfrac{3}{2}+m^2-16\geqslant 0 \\ -\dfrac{8-2m}{2}\geqslant\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

或 $f(\dfrac{3}{2})=(\dfrac{3}{2})^2+(8-2m)\cdot\dfrac{3}{2}+m^2-16\leqslant 0 \qquad (2)$

其中不等式组(1)无解，由(2)解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant\dfrac{7}{2}$.

∴当Ⅰ与Ⅱ有公共点时，m 的取值范围是 $-\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant\dfrac{7}{2}$.

例 3　设 a、$b>0$，且 $a^3+b^3=2$. 求 $a+b$ 的取值范围.

解：设 $a+b=\omega$，则 $b=\omega-a$，代入 $a^3+b^3=2$ 并整理得：

$$3\omega a^2-3\omega^2 a+\omega^3-2=0 \qquad (1)$$

$\because a$、$b>0$，$\therefore 0<a<\omega$.

即方程(1)在区间$(0,\omega)$内至少有一实根.

设 $f(a)=3\omega a^2-3\omega^2 a+\omega^3-2$.

$\because f(0)=f(\omega)=\omega^3-2$，

$\therefore$方程(1)的二根必都在区间$(0,\omega)$上.

$$\therefore\begin{cases}3\omega>0\\ f(0)=f(\omega)=\omega^3-2>0\\ \Delta=3\omega(8-\omega^3)\geqslant 0\\ 0<\dfrac{1}{2}\omega<\omega\end{cases}$$

解之得 $\sqrt[3]{2}<\omega\leqslant 2$.

即 $\sqrt[3]{2}<a+b\leqslant 2$.

例 4　设方程 $\sin^2\theta+3a^2\cos\theta-2a^2(3a-2)=1$ 有解. 求 a 的范围.

解：令 $t=\cos\theta$，则原方程可化为

$$t^2-3a^2t+6a^3-4a^2=0 \qquad (1)$$

为使原方程有解，只需方程(1)在$[-1,1]$上至少有一实根.

设 $f(t)=t^2-3a^2t+6a^3-4a^2$，则方程(1)在$[-1,1]$上只有一根时，有 $f(1)f(-1)\leqslant 0$.

$\because f(1)=1-3a^2+6a^3-4a^2=(a-1)(2a-1)(3a+1)$，

$f(-1)=1+3a^2+6a^3-4a^2=(2a+1)[2a^2+(a-1)^2]$，

$\therefore (a-1)(2a-1)(3a+1)(2a+1)[2a^2+(a-1)^2]\leqslant 0$.

解之得$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$或$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{3}$.

当方程(1)的两根均在$[-1,1]$上时,有

$$\begin{cases} f(1)=(a-1)(2a-1)(3a+1)\geqslant 0 \\ f(-1)=(2a+1)[2a^2+(a-1)^2]\geqslant 0 \\ \Delta=9a^4-24a^3+16a^2\geqslant 0 \\ -1\leqslant \frac{3a^2}{2}\leqslant 1 \end{cases}$$

解之得:$-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$.

综上所述,a的取值范围是$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$.

例 5 设$k\in R$,集合$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$,集合$B=\{x\mid x^2-2kx+k+2\leqslant 0\}$,试求集合

$$M=\{k\mid B\subseteq A\}.$$

解:由题设知,本题即求使不等式

$$x^2-2kx+k+2\leqslant 0$$

的解集是集合A的子集的k的取值范围.

设$f(x)=x^2-2kx+k+2=(x-k)^2-k^2+k+2$,它的图象是开口向上的抛物线,顶点坐标为$(k,f(k))$.

当$B=\varnothing$时,必有$B\subseteq A$,此时$f(k)>0$.

即$-k^2+k+2>0$ 解得$-1<k<2$.

当$B\neq\varnothing$时,$B\subseteq A$等价于如下不等式组:

$$\begin{cases} f(k)=-k^2+k+2\leqslant 0 \\ 1\leqslant k\leqslant 4 \\ f(1)=3-k\geqslant 0 \\ f(4)=18-7k\geqslant 0 \end{cases}$$

解之得：$2\leqslant k\leqslant\frac{18}{7}$.

综上所述，可得 $M=\{k\mid -1<k\leqslant\frac{18}{7}\}$.

例 6　设 a 是实数，讨论下列方程实根的个数：

$$\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-x).$$

解：在使对数本身有意义，即在 $x-1>0,3-x>0,a-x>0$ 的条件下，原方程变为

$$\lg(x-1)(3-x)=\lg(a-x) \tag{1}$$

$$(x-1)(3-x)=a-x \tag{2}$$

设 $y_1=(x-1)(3-x),x\in(1,3)$; (3)

$y_2=a-x,x\in(-\infty,a)$. (4)

在同一坐标系中分别画出函数(3)和(4)的图象，前者是抛物线的一部分，后者是一组平行射线，如图 4.

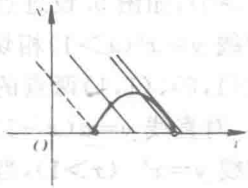

图 4

直线(4)通过(1,0)时，$a=1$，通过点(3,0)时，$a=3$，直线(4)与抛物线(3)相切的充要条件是方程(2)有重根.

故由 $\Delta=5^2-4(a+3)=0$ 得 $a=\frac{13}{4}$.

从上图可得：

当 $a\leqslant1$ 或 $a>\frac{13}{4}$ 时，(4)与(3)没有公共点，故原方程没有实根；

当 $1<a\leqslant3$ 或 $a=\frac{13}{4}$ 时，(4)与(3)有且只有一个公共点，故原方程有一个实根；