高中数学基础知识和训练

丁恳文 编

广东科技出版社

高中数学基础知识和训练

丁塾文 编

广东科技出版社

粤新登字04号

Gaozhong Shuxue Jichu Zhishi he Xunlian

高中数学基础知识和训练

编　　者：丁整文

出版发行：广东科技出版社

（广州市水荫路11号）

经　　销：广东省新华书店

印　　刷：广东韶关新华印刷厂

规　　格：787×1092　1/32　印张13.25　字数300 000

版　　次：1993年12月　第1版

1993年12月　第1次印刷

印　　数：1—10,200册

ISBN　7—5359—1169—2/G·277

定　　价：5.80元

前 言

根据高中会考的要求，我们编写了这本书，目的在于帮助高中学生比较系统和扎实地掌握好高中数学基础知识和基本技能，争取会考有好的成绩，为他们往后的工作和继续学习打下较好的数学基础。

根据广东省高中会考数学科考试纲要的规定，会考的主要题型是选择题，其次是填空题和解答题。因此，本书的例题、练习题和检测题绝大部分是选择题，兼有部分的填空题和解答题。由于选择题的型式大家已熟知，书中的例题没有逐题加注“选择题”的字样，请读者留意。

本书的侧重点在于基础训练，以教学大纲规定的必学内容为限，几乎没有复杂的综合题出现。不过，书中也仍编有个别综合性质的例题和习题，目的在于加深学生对有关概念，知识和方法的理解，并促进应用的灵活性。

作为会考复习辅助材料，本书的编写尚属首次，免不了存在不足和缺点。我们诚恳希望广大师生及时提出意见和建议。

编　者

1993年5月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

一、基本知识提要

（一）集合

1．集合的定义

通常把一组确定的对象的全体看成一个集合．集合里的各个对象叫做这个集合的元素．

习惯上，用大写的拉丁字母（如A，B，P，$Q\cdots$）代表集合，集合的元素记为小写的拉丁字母（如a，b，p，$q\cdots$）．如果a是集合A的元素，表示成$a\in A$（读作"a属于A"）；如果a不是集合A的元素，表示成$a\notin A$（读作"a不属于A"）．

2．集合的表示方式

列举法，描述法和图示法．

3．集合的分类

有限集（只含有限个元素的集合）和无限集（含有无穷多个元素的集合）．

为了讨论上的方便，还称一个元素都没有的集合为空集．并记为ϕ．例如$\{x|x+1=x+3\}$就是一个空集．

4．常见的数集和标记

自然数集，记作N；整数集，记作Z；有理数集，记作

Q；复数集，记作C。

习惯上，还用R^+表示所有正实数所组成的集合，称为正实数集；用R^-表示所有负实数所组成的集合，称为负实数集；等等。

5. 集合的关系

（1）子集。

对于两个集合A和B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$），读作"A包含于B"（或"B包含A"）。

当A不是B的子集时，记作$A\nsubseteq B$（或$B\nsupseteq A$），读作"A不包含于B"（或"B不包含A）。

特别值得注意的，有$A\subseteq A$，$\phi\subseteq A$，这两个关系式对任何集合A都成立。

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作$A\subset B$（或$B\supset A$）；当A不是B的真子集时，记作$A\not\subset B$（或$B\not\supset A$）。

对于两个集合A和B，如果$A\subseteq B$和$A\supseteq B$同时成立，我们就说这两个集合相等，记作$A=B$，读作"A等于B"。

（2）交集。

对于给定的两个集合A和B，我们把所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的交集，记作$A\cap B$（读作"A交B"）。即有

$$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}.$$

（3）并集。

对于给定的两个集合A和B，我们把所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A，B的并集，记作$A\cup$

B(读作"A并B")。即有

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}.$$

(4) 全集和补集。

在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这时，我们把这个给定的集合看作全集，通常用符号I表示。

已知全集I，集合$A \subseteq I$，那么由I中所有不属于A的元素所组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$(读作"A补")。即有

$$\overline{A} = \{x \mid x \in I \text{且} x \notin A\}.$$

(二)映射与函数

1. 映射的定义

设A，B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合A，B及从A到B的对应法则f)叫做从集合A到集合B的映射，记作$f: A \to B$；而把和集合A中的元素a对应的B中的元素b叫做a的象，并把a叫做b的原象。

2. 函数的定义

如果在某变化过程中，有两个变量x，y，并且对于x在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y都有唯一确定的值和它对应，那么y就是x的函数，x叫做自变量，x的取值范围叫做函数的定义域，和x的值对应的y的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

上述从变量之间的依赖关系，给出了函数的定义，如果从映射的概念出发，可把函数看作是一类特殊的映射。

关于映射$f: A \to B$，当集合A, B都是非空的数的集合，且B中的每一个元素（即每一个数值）都有原象时，这样的映射$f: A \to B$就是定义域A到值域B上的函数。可记作

$$y = f(x),$$

自变量x在定义域A内取一个确定的值a时，对应的函数值表示为$f(a)$。

根据上述讨论可知，对函数概念的理解和掌握必须全面，可把函数看作是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊映射，而不能把表示函数的式子看作为函数的自身。

通常，把定义域、值域以及由定义域到值域上的对应法则称为函数的三要素。

3. 函数的表示方式

解析法（用式子表示）；列表法；图象法。同时，定义域常用区间表示。

4. 函数的性质

(1) 单调性。

对于给定区间上的函数$f(x)$，如果对于属于这个区间的任意两个自变量x_1和x_2，当$x_1 < x_2$时，都有$f(x_1) < f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是增函数；如果对于属于这个区间的任意两个自变量x_1和x_2，当$x_1 < x_2$时，都有$f(x_1) > f(x_2)$，那么就说$f(x)$在这个区间上是减函数。

如果函数$y = f(x)$在某个区间上是增函数或减函数，就说$f(x)$在这一区间上具有（严格的）单调性，这一区间叫做

$f(x)$的单调区间。

(2) 奇偶性。

对于函数$f(x)$，如果对于函数定义域内任意一个x，$-x$也属于定义域，并且都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做奇函数；要是都有$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做偶函数。

奇函数的图象关于原点成中心对称图形；相反地，一个函数的图象关于原点成中心对称图形，这个函数一定是奇函数。

偶函数的图象关于y轴成轴对称图形；相反地，一个函数的图象关于y轴成轴对称图形，这个函数一定是偶函数。

(3) 最大值和最小值。

对于给定区间上的函数$f(x)$，如果有自变量x_0属于这个区间，使得对任何属于这个区间的x都有$f(x_0)\geqslant f(x)$(或者都有$f(x_0)\leqslant f(x)$)，那么就称$f(x_0)$是函数$f(x)$在这个区间上的最大值(或者最小值)。

5. 反函数的概念

如果对于函数$y=f(x)$的每一个确定的函数值y_0，在定义域中都只有唯一的一个自变量x_0满足$y_0=f(x_0)$(也就是说，对于函数$y=f(x)$的定义域中任意两个不同的自变量x_1和x_2，都有$f(x_1)\neq f(x_2)$)，那么，对于变量y的每一个确定的值y_0，取满足$f(x_0)=y_0$的唯一的x_0和y_0对应，这就得到一个以y为自变量的函数，称为函数$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$。习惯上，函数$y=f(x)$的反函数记作$y=f^{-1}(x)$，反函数的定义域和值域分别是原来函数(简称为原

函数)的值域和定义域。

函数$y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称。

（三）幂函数

1．函数式

$y=x^n$（n是常数，$n\in Q$）。

2．定义域

由使x^n有意义的所有实数x组成的数集（可见，当n不同时，定义域也不同）。

3．函数图象

几个常见的幂函数图象，如图1-1（$n>0$的情形）和图1-2（$n<0$的情形）所示。

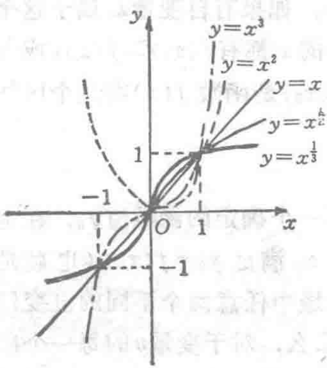


图1-1

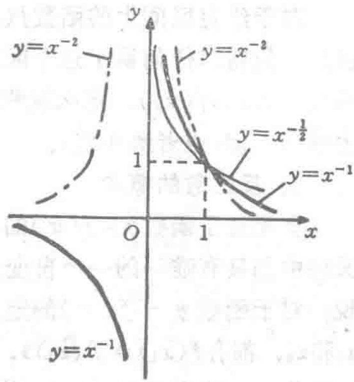


图1-2

4．性质

（1）当$n>0$时，幂函数$y=x^n$的图象通过点（0，0），

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

$(1, 1)$；$y=x^n$在区间$[0, +\infty)$上是增函数。

(2) 当$n<0$时，幂函数$y=x^n$的图象通过点$(1, 1)$；$y=x^n$在$(0, +\infty)$上是减函数；在第一象限内，图象向上与y轴无限地接近，向右与x轴无限地接近。

(3) 函数$f(x)=x^n$的奇偶性与n值有关。如：$f(x)=x^2$是偶函数，$f(x)=x^3$是奇函数；$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$既不是奇函数也不是偶函数；等等。

(四) 二次函数

1. 函数式

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0，\text{实数}a，b，c\text{是常数})；$$

也可写成分解式

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)\ (a，x_1，x_2\text{是常数}，a\neq 0，$$

x_1，x_2可能是实数，也可能是一对共轭复数)。

这两个表示式中的常数有如下关系：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2. 定义域为R

3. 图象与性质

如表1-1。

(五)指数函数和对数函数

指数函数和对数函数是一对互为反函数的函数，它们的表达式、定义域、值域以及图象和性质如表1-2所示。

表1-1　函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图象和性质

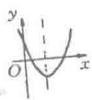
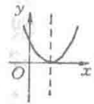
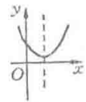
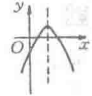
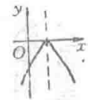
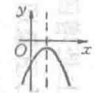
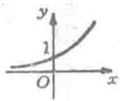
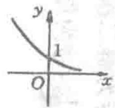
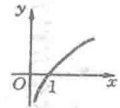
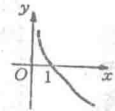
a	$a>0$			$a<0$		
$\triangle=b^2-4ac$	$\triangle>0$	$\triangle=0$	$\triangle<0$	$\triangle>0$	$\triangle=0$	$\triangle<0$
图　象						
与x轴的公共点	两个	一个	无	两个	一个	无
开口方向	开口向上			开口向下		
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$					
对称性	关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$对称					
单调性	在$(-\infty,-\frac{b}{2a})$上是减函数，在$(-\frac{b}{2a},+\infty)$上是增函数			在$(-\infty,-\frac{b}{2a})$上是增函数，在$(-\frac{b}{2a},+\infty)$上是减函数		

表1-2

	指数函数		对数函数	
函数式	$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$		$y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$	
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$		$(0,\ +\infty)$	
值　域	$(0,\ +\infty)$		$(-\infty,\ +\infty)$	
图　象	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
				
特　征	图象在x轴上方，经过点$(0,\ 1)$		图象在y轴右方，经过点$(1,\ 0)$	
单调性	增函数	减函数	增函减	减函数
底 a 对函数的影响	$1<a_1<a_2$：当$x<0$时，$1>a^x_1>a^x_2$；当$x>0$时$1<a^x_1<a^x_2$	$0<a_1<a_2<1$：当$x<0$时，$a^x_1>a^x_2>1$；当$x>0$时$a^x_1<a^x_2<1$	$1<a_1<a_2$：当$0<x<1$时，$0>\log_{a_2}x>\log_{a_1}x$；当$x>1$时，$0<\log_{a_2}x<\log_{a_1}x$	$0<a_1<a_2<1$；当$0<x<1$时，$\log_{a_2}x>\log_{a_1}x>0$；当$x>1$时$\log_{a_2}x<\log_{a_1}x<0$

（六）指数方程和对数方程

1. 指数方程

指数里含有未知数的方程叫做指数方程．常用解法有：

（1）化为形式$a^{f(x)}=b^{g(x)}$（常数a，b是正数），然后两边取对数，转为解方程

$$f(x)=g(x)\log_a b,$$

特别地，当$a=b$的情形，这个方程为$f(x)-g(x)=0$。

（2）化为形式

$$a^{2x}+pa^x+q=0,$$

然后用换元法，设$a^x=y$,转为解二次方程$y^2+py+q=0$，舍去负根，由正根y可得$x=\log_a y$为原方程的解。如无正根，则原指数方程无解。

2. 对数方程

在对数符号后面含有未知数的方程叫做对数方程。常用解法有：

（1）化为形式$\log_a f(x)=b$,进而转为解方程$f(x)=a^b$。

（2）化为形式

$$(\log_a x)^2+p\log_a x+q=0.$$

设$\log_a x=y$，转为解二次方程，并借助$x=a^y$，求原对数方程的解。

注意：在上述对数方程的解法中，求得x值之后，还必须代入原方程进行验根，只有使原方程的各个对数都有意义的x值才是所求的根，否则是增根，应当舍去。

在解指数方程和对数方程时，通常都得对原方程进行转化(如上所述)，转化时要充分运用指数运算和对数运算的法

则，包括对数换底公式的应用。

二、例题分析

例1 已知集合$A=\{$不大于6的正整数$\}$，实数$a=6$，那么

(A) $a\subset A$ (B) $\{a\}\subset A$

(C) $\{a\}\in A$ (D) $a\notin A$

答案：(B)

分析：例中，集合A用描述法表示，如用列举法表示，应为

$$A=\{1，2，3，4，5，6\},$$

所以，$a=6$属于A。但在四个选项中并没有一项是$a\in A$。与此等价的是$\{a\}\subset A$，即(B)项，故应选(B)。

本题也可用排除法求解：四个选项中，(A)和(C)是明显不对的。这是因为：a是数，A是数集，a应看作为元素，$\{a\}$才是表示集合(只含一个元素a的集合)，因而，a和A的关系是属于与否，不是包含关系，故(A)项不对；$\{a\}$和A的关系是包含与否，故(C)项不对。而(D)项$a\notin A$，与上面分析的$a\in A$矛盾，也是不对，应该排除。这样，在排除了(A)、(C)、(D)之后，剩下(B)项，必为本题答案。

例2 集合$A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|1\leqslant x<3\}$，那么$A\cap B=$

(A) $1\leqslant x<2$ (B) $\{x|1\leqslant x<2\}$

(C) $\{1\leqslant x<2\}$ (D) $\{x|1<x<2\}$

答案：(B)

分析：A和B是数集，它们的交$A\cap B$也是数集，即是不等式组

$$\begin{cases}-2<x<2,\\ 1\leqslant x<3.\end{cases}$$

$\because\quad -2<1<2<3,$

$\therefore$ 不等式组的解集为

$\{x|1\leqslant x<2\}$.

故应选(B)。

也可用排除法求解：(A)、(C)两项的式子都不表示集合，故应排除；(B)、(D)所示的两个数集，相差一个元素，即数1。为此，检验1是否属于$A\cap B$。因为$-2<1<2$，故$1\in A$，又$1\leqslant 1<3$，故也有$1\in B$，所以$1\in A\cap B$。由于1不属于(D)项所示集合，所以应排除(D)，剩下(B)是本例答案。

说明：本例若改成填空题的形式，难免有的考生误用(A)、(C)项的式子作答。而作为选择题，有(B)项作为提示和暗示，可减少这种失误的。可见，解答选择题时，一定要把整题读完，充分利用选项的提示作用，使失误减少。

例3 在下列函数中，与函数$y=2x^2+1$不表示同一函数的是

(A) $y=|x^2|+|x^2+1|$　　(B) $y=\sqrt{(2x^2+1)^2}$

(C) $y=|2x^2+1|$　　(D) $y=\dfrac{(2x^2+1)(x+1)}{x+1}$

答案：(D)

分析：两个函数相同，必须满足两个条件：①它们的定

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbo