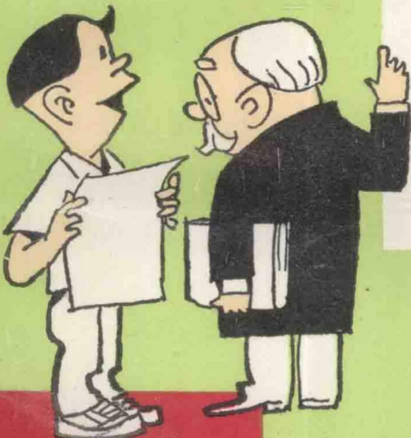
王永俊 主 编
金宝铮 副主编

中学数学特长生读本



初中二年级

经济日报出版社

中学数学特长生读本

（初中二年级）

陈　娴　阮国杰　编　著

经济日报出版社

图书在版编目（CIP）数据

中学数学特长生读本：初中二年级/王永俊主编，金宝铮副主编－北京：经济日报出版社，1996.8

ISBN 7－80127－237－4

Ⅰ．中… Ⅱ．王 Ⅲ．数学课－中学－教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 16876 号

中学数学特长生读本（初中二年级）

主　　编：	王永俊
副 主 编：	金宝铮
责任编辑：	赵润庭
责任校对：	陈国钧
出版发行：	经济日报出版社
社　　址：	北京市王府井大街 277 号（邮编 100746）
总 经 销：	全国新华书店
印　　刷：	北京星月印刷厂印刷
规　　格：	787×1092 毫米　1/32 开本　8.625 印张
字　　数：	175 千字
印　　数：	1—11000 册
版　　次：	1997 年 1 月第一版　1997 年 1 月第一次印刷
书　　号：	ISBN 7－80127－237－4/G·113
定　　价：	9.00 元

前　言

当今世界，自然科学、社会科学、数学已发展成为三足鼎立的独立的科学体系。中国青少年在数学学习上的潜能和成就，以及在国际大赛中多次获得世界团体冠军的佳绩，已为世界所公认。在即将进入21世纪的关键时期，中国教育的普及与提高被提到战略的高度，得到党和国家的重视。这当中，数学教育与教学质量的提高也就理所当然地成为全国关注的重点科学之一。

当前，教育的重要任务是变应试教育为素质教育。在数学教学上就要使学生在学好《大纲》要求的基础上，更多更快地学习到体现现代数学思想和更高教学背景的“活的数学”，以发展为数学特长，从而带动和推动相关学科的发展。而当前教师和家长倍感棘手的问题是，如何使后进生对学数学有兴趣，使优秀生向更高层次攀登。这就需要一个起转化作用的工具，建造起一个过渡的桥梁；需要一套既能以《全日制九年义务教育数学教学大纲》为依据，结合《初中数学竞赛大纲初订稿》而编辑的适合青少年思维发展特点的读物，使后进生提高兴趣，潜移默化地步入中等或优秀生行列；使优秀生发展思维，形成特长，形成竞赛能力，参与数学竞赛。本套书就是本着这个宗旨编写的，旨在“使您的孩子聪明起来”。

本套书分中学、小学两部分。小学部分为三个分册，中学部分六个分册（教学读本与练习各三分册）。适合青少年学生连续使用。为适应素质教育的要求，例题与习题解答力求深入浅出，使家长和教师能参与辅助工作，使本套书成为学生的良师，教师、家长的益友。

参加本套书编写的都是多年从事数学教学工作的数学教研员和富有教学经验的高级教师，并且都是国家级数学奥林匹克高级或一级教练员，以及北京数学奥林匹克教练员。在数学教学上具有丰富的经验，在培养数学国际竞赛选手上又是富有能力的实践者，可以说本书是这样一个群体的集体智慧与成功经验的小结，也是他们对学生智力转化工作的一个探索和实验。

祝愿本套书的读者，通过学习这套书能够更加聪明起来。起来。

编者

1996年8月

目　录

第一讲　因式分解（一）

因式分解是解方程及代数式、三角式恒等变形中的有力工具，是解决许多数学问题的重要方法之一．除了课本上介绍的因式分解的基本方法外，还有拆添项法、配方法、换元法、待定系数法等也较经常使用．

第一节　拆项和添项

变一项为两项或几项的代数和的变化叫拆项，添项是特殊的拆项，即把零拆成两个相反项的和．在因式分解时，当直接分组分解难以进行时，通过适当的拆项或添项，造成能使用提公因式或公式法进行分组分解的方法称“拆、添项法”．

例 1　分解因式：$x^3+9x^2+26x+24$

分析：原式不缺项，所以使用拆项分组分解，按每组各项系数对应成比例的原则分为三组，每组两项，把二次项 $9x^2$ 和一次项 $26x$ 分别拆为两项，使三组系数比为：$1:2=7:14=12:24$

解：原式$=(x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24)$

$=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)$

$$=(x+2)(x+3)(x+4)$$

例 2　分解因式：$x^4-2x^3-11x^2+2x+36$

分析：把 $-2x^3$ 拆成 $2x^3-4x^3$，把 $-11x^2$ 拆成 $-8x^2-3x^2$，把 12x 拆成 $-6x+18x$，然后利用分组分解法来解.

解：原式 $=(x^4+2x^3)-(4x^3+8x^2)-(3x^2+6x)+(18x+36)$

$=x^3(x+2)-4x^2(x+2)-3x(x+2)+18(x+2)$

$=(x+2)[(x^3-3x^2)-(x^2-3x)-(6x-18)]$

$=(x+2)[x^2(x-3)-x(x-3)-6(x-3)]$

$=(x+2)(x-3)(x^2-x-6)$

$=(x+2)^2(x-3)^2$

例 3　分解因式：$x^2-y^2+4x-2y+3$

分析：本题先把 3 拆成 4-1，然后再利用分组分解法.

解：原式 $=(x^2+4x+4)-(y^2+2y+1)$

$=(x+2)^2-(y+1)^2$

$=(x+2+y+1)(x+2-y-1)$

$=(x+y+3)(x-y+1)$

例 4　分解因式：$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

分析：注意到：$(b+c)-(a+b)=c-a$，所以用添项分组分解，即添加“$o=b-b$”.

解：原式 $=bc(b+c)+ca[(b+c)-(a+b)]-ab(a+b)$

$=c(b+c)(b+a)-a(a+b)(c+b)$

$=(a+b)(b+c)(c-a)$

例 5 分解因式：a^5+a+1

解：原式 $=(a^5+a^4+a^3)-(a^4+a^3+a^2)+(a^2+a+1)$

$=a^3(a^2+a+1)-a^2(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$

$=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$

例 6 分解因式：$a^3+b^3+c^3-3abc$

分析：原式中出现 a^3+b^3，可考虑用公式 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$，故添加 $3ab(a+b)$；$-3ab(a+b)$ 两项，使 a^3+b^3 化成 $(a+b)^3$ 与 c^3 相加，得到因式 $a+b+c$，再继续分解.

解：原式 $=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

说明：$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ 可看作一个常用公式，利用这个公式可直接分解因式.

例 7 分解因式：$8a^3+27b^3-c^3+18abc$

分析：本题应用公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

解：原式 $=(2a+3b-c)(4a^2+9b^2+c^2-6ab+2ac+3bc)$

例 8 分解因式：$(x-y)^3+(y-x-2)^3+8$

分析：由于 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$，当 $a+b+c=0$ 时，$a^3+b^3+c^3-3abc=0$，于是得到当 $a+b+c=0$ 时，$a^3+b^3+c^3=3abc$，本题就是利用此结论进行因式分解.

解：由于 $(x-y)+(y-x-2)+2=0$

$\therefore\quad (x-y)^3+(y-x-2)^3+8$

$=3(x-y)(y-x-2)\cdot 2$

$=6(x-y)(y-x-2)$

第二节 配方法

配方法通常指 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 中左端缺少某些项需要配上缺项，使它成为一个完全平方式的方法，在应用配方法分解因式时，常把多项式配成 A^2-B^2 的形式，使多项式分解成 $(A+B)(A-B)$ 的形式.

例 9 分解因式：$(m^2-1)(n^2-1)+4mn$

分析：将 $(m^2-1)(n^2-1)$ 展开得 $(m^2n^2+1)-(n^2+m^2)$ 把 m^2n^2+1 与 (n^2+m^2) 均配成完全平方，再应用平方差公式分解.

解：原式 $=(m^2n^2+2mn+1)-(n^2-2mn+m^2)$

$=(mn+1)^2-(n-m)^2$

$=(mn+1+n-m)(mn+1-n+m)$

例 10 分解因式：$a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$

解（一） 原式$=a^2+a^2+2a+1+(a^2+a)^2$

$=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1$

$=(a^2+a+1)^2$

解（二） 原式$=(a+1)^2-2(a+1)\cdot a+a^2+(a^2+a)^2+2(a+1)a$

$=(a+1-a)^2+2(a^2+a)+(a^2+a)^2$

$=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1$

$=(a^2+a+1)^2$

例 11 分解因式：$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$

分析：注意到原式与$(x^2-y^2-z^2)^2=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2+2y^2z^2-2x^2z^2$ 仅有一项之差，故可将$-2y^2z^2$ 分拆为 $2y^2z^2$ 与$-4y^2z^2$ 两项，正巧又可凑成用平方差公式分解.

解：原式$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2+2y^2z^2-2x^2z^2-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$

$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)$

$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$

$=(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z)$

例 12 试将 $2^{1998}+1$ 分成均不小于 10000 的两个自然数的乘积.

分析：$\because 2^{1998}+1=(2^{999})^2+1$，故用配方法配中项.

解：$2^{1998}+1=(2^{1998}+2\cdot 2^{999}+1)-2\cdot 2^{999}$

$=(2^{999}+1)^2-(2^{500})^2$

$$=(2^{999}+2^{500}+1)(2^{999}-2^{500}+1)$$

易知这两个因数均不小于10000.

例13　证明：具有如下性质的自然数a有无数多个：对于任意的自然数n，$z=n^4+a$都不是素数.

分析：想法将所述表达式分解因式.

证明：设$a=4k^4$（k为大于1的自然数），则

$$z=n^4+4k^4=n^4+4n^2k^2+4k^4-4n^2k^2$$
$$=(n^2+2k^2)^2-(2nk)^2$$
$$=(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)$$
$$=(n^2+2k^2+2nk)[(n-k)^2+k^2]\quad(*)$$

∵n为自然数，k为大于1的自然数，

故$n^2+2k^2+2nk>1$，$(n-k)^2+k^2>1$

∴(＊)式右边的两个因子都是大于1的整数，即z是合数，由于大于1的自然数k有无穷多个，故有无穷多个自然数a，使n^4+a对一切自然数n都不是素数.

第三节　换元法

换元法也叫变量代换法，换元法就是在一个比较复杂的式子中，根据式子的特征，引进适当的中间变量，从而将这个式子的结构简化，便于分解.

例14　分解因式：$9(p-q)^2-6(q-p)+1$

分析：设$p-q=a$，把问题化成了简单的二次三项式的因式分解问题.

解　设 $p-q=a$

则原式 $=qa^2+6a+1$

$$=(3a+1)^2=(3p-3q+1)^2$$

例 15　分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

分析：原式里已经有一部分是乘积形式，应展开整理，通过观察可以发现 $(x+1)(x+4)$ 和 $(x+2)(x+3)$ 中除去常数不同外，其它各项均相同，故可考虑采用换元法，注意到 $(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$ 与 $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ 的平均值是 x^2+5x+5，故设 $y=x^2+5x+5$.

解：原式 $=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-24$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$$

设 $y=x^2+5x+5$，则

原式 $=(y-1)(y+1)-24$

$=y^2-1-24$

$=y^2-25$

$=(y+5)(y-5)$

$=(x^2+5x+10)(x^2+5x)$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)]$

例 16　分解因式：$(x+1)^4+(x+3)^4-272$

分析：为了展开括号以后可以消项，且注意到 $(x+1)$ 与 $(x+3)$ 的平均数为 $x+2$，故采用平均代换，设 $y=x+2$.

解：设 $y=\frac{1}{2}[(x+1)+(x+3)]=x+2$，则

原式 $=(y-1)^4+(y+1)^4-272$

$=2\ (y^4+6y^2+1)\ -272$

$=2\ (y^4+6y^2-135)$

$=2\ (y^2-9)\ (y^2+15)$

$=2\ (y+3)\ (y-3)\ (y^2+15)$

$=2\ (x+5)\ (x-1)\ (x^2+4x+19).$

例 17　分解因式：$(x^2+xy+y^2)\ -4xy\ (x^2+y^2)$

解：设 $x^2+y^2=a$，$xy=b$.

则　原式$=\ (a+b)^2-4ab$

$=\ (a^2+2ab+b^2)\ -4ab$

$=a^2-2ab+b^2$

$=\ (a-b)^2$

$=\ (x^2+y^2-xy)^2$

说明　运用换元法分解因式时，对于较复杂的题，有时可设两个未知数，称为双换元.

例 18　分解因式：$(a+b-2ab)\ (a+b-2)\ +\ (1-ab)^2$

分析：将 $a+b$ 及 ab 各看作一个整体，可使问题简化.

解：设　$a+b=m$，$ab=n$. 则

原式$=\ (m-2n)\ (m-2)\ +\ (1-n)^2$

$=m^2-2m-2mn+4n+\ (1-n)^2$

$=m^2-2m\ (n+1)\ +\ (n+1)^2$

$=\ (m-n-1)^2$

$=\ (a+b-ab-1)^2$

$=\ (a-1)^2\ (b-1)^2$

第四节 双十字相乘法

请先看一个例题：把 $x^2+xy-2y^2+2x+7y-3$ 分解因式，这是一个含两个字母的二次多项式：$x^2+(2+y)x-(2y^2-7y+3)$.

由于 $-(2y^2-7y+3)$ 可用十字相乘法分解。

$\therefore x^2+(2+y)x-(2y^2-7y+3)=x^2+(2+y)x-(y-3)(2y-1)$ 然后，再对 x 用十字相乘法分解即可.

$\therefore x^2+xy-2y^2+2x+7y-3=x^2+(2+y)x-(2y^2-7y+3)$

$=x^2+(2+y)x-(y-3)(2y-1)$

$=(x-y+3)(x+2y-1)$.

本例也可以按以下的次序进行：先用十字相乘法分解二次项，再用十字相乘法分解常数项. 即 $x^2+xy-2y^2+2x+7y-3=(x-y)(x+2y)+2x+7y-3=(x-y+3)(x+2y-1)$

这里要注意：在分解常数项时，先依一个字母一次项的系数分解，再用另一个字母的一次项系数检验.

对于形如 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ 的二元二次多项式的因式分解，可以采用双十字相乘凑出.

例 19　分解因式：$x^2+xy-6y^2+2x+11y-3$

分析：先整理成关于 x 的二次三项式，再用双十字相乘法：

解：原式 $=x^2+(y+2)x-(6y^2-11y+3)$

$=x^2+(y+2)x-(2y-3)(3y-1)$

$=[x-(2y-3)][x+(3y-1)]$

$=(x-2y+3)(x+3y-1)$

例 20 分解因式：$2a^2-5ab-3b^2+a+11b-6$

解：原式$=(2a+b)(a-3b)+a+11b-6$

$=(2a+b-3)(a-3b+2)$

例 21 分解因式：$xy+y^2+x-y-2$

解：原式$=y(x+y)+x-y-2$

$=(y+1)(x+y-2)$

例 22 分解因式：$3x^2+4y^2+3z^2+8xy-8yz-10xz$

分析：这里有三个字母，只要把其中的一个字母看作常数即可．本题先将原式整理成关于 x、y 的二元二次多项式，将 z 看成常数，再用双十字相乘法分解．

解：原式$=3x^2+8xy+4y^2-10zx-8zy+3z^2$

$=(x+2y-3z)(3x+2y-z)$

复习总结：

本讲内容介绍的因式分解的方法有：拆项和添项法、配方法、换元法、双十字相乘法．在解因式分解题时应注意：先观察题目特点，看能否提取公因式，再观察能否应用公式，然后考虑分组分解，有时还要在分组分解之前进行拆项或添项．对于比较复杂的因式分解，就还须掌握一些其它的方法与技巧．例如换元法就是在一个比较复杂的代数式中，根据其特征，把其中的某些部分看成一个整体，并用一个新的文字

（新元）代替，从而使这个代数式的结构简化，易于分解."换元"的思想，不仅在因式分解中有用，在其他许多地方都有用.

因式分解时还应考虑到分解因式是否分到不能再分了，根据因式分解的定义可知，若无特别说明，因式分解是在有理数范围内进行，在多项式的因式分解中，若所得的因式仅仅相差一个非零的数值因式，就认为它们的结果是相同的. 例如 $9a^2-1=(3a+1)(3a-1)$ 及 $9a^2-1=9\left(a^2-\frac{1}{9}\right)=9\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)$ 结果是一致的.