自主创新
方法先行

线性代数学习指导

上海大学数学系　编

高等教育出版社

自主创新
方法先行

线性代数
学习指导

上海大学数学系　编

Xianxing Daishu
Xuexi Zhidao

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是2015年上海普通高校优秀本科教材《线性代数》(上海大学数学系编)的配套辅导书。全书共分六章，其中前五章每章由五个部分组成：第一部分：基本要求、重点、难点内容，指出学生应该了解、掌握的知识；第二部分：主要内容，对本章知识进行系统的梳理，并对涉及的基本理论、基本计算方法进行总结；第三部分：典型题析，对线性代数中一些较为典型的解题方法给以详细的分析；第四部分：习题选解，对教材中重要或具有一定难度的习题给出详细解答；第五部分：单元练习与解答，读者可通过对这些习题的练习帮助自己掌握课程中的基本概念、基本方法和基本理论。第六章提供了五套模拟试卷，供学生复习、检验知识的掌握。

本书可作为高等学校非数学类专业“线性代数”课程的教学参考书，也可供有志考研的读者复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/上海大学数学系编.--北京：高等教育出版社,2016.1

ISBN 978-7-04-044320-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①上… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第275706号

策划编辑 张彦云　责任编辑 张彦云　封面设计 王 琰　版式设计 童 丹
责任校对 李大鹏　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	19.25	版　　次	2016年1月第1版
字　　数	340千字	印　　次	2016年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	30.20元

物 料 号 44320-00

引言

线性代数是理工类、经济管理类专业学生的数学基础课程之一, 在学生数学能力与数学素养的培养中起着关键性作用, 其理论与方法在科学研究、理论实践中有着广泛的应用。然而线性代数课程的一个显著特点是其抽象性, 表现在符号、概念、性质、理论众多, 而不同知识之间又存在相互依存的紧密关系。因此如何让学生既感觉学习不难, 又能在学习过程中培养数学能力与数学素养就成为线性代数课程教学中要解决的核心问题。为此我们编写了这本《线性代数学习指导》, 其目的就是指导学生在学习中如何消化已学的知识, 如何理解课程中的概念、理论、方法, 以及如何利用已学的知识去解决课程中更为深入的新问题。同时本书也为授课老师提供了一本全面解释课程内容的参考书, 其中的知识点概要、典型题解、试卷等都可以作为课程参考内容, 并能有机融合于课程的课内、课外教学体系中, 从而达到帮助学生掌握线性代数课程相关内容的要求。

本书是 2015 年上海普通高校优秀本科教材《线性代数》(上海大学数学系编, 高等教育出版社出版) 的配套辅导书, 前五章每章由五个部分组成: 第一部分: 基本要求、重点、难点内容, 指出学生应该了解、掌握的知识; 第二部分: 主要内容, 对本章知识进行系统的梳理, 并对涉及的基本理论、基本计算方法进行总结; 第三部分: 典型题析, 对线性代数中一些较为典型的题目求解方法给出详细的分析; 第四部分: 习题选解, 对教材中重要或具有一定难度的习题给出详细解答; 第五部分: 单元练习与解答, 读者可通过练习掌握课程中的基本概念、基本方法和基本理论。每章后的单元练习含有两套试卷, 第一套仅针对本章知识点和理论方法, 适合初学者练习; 第二套涵盖其他章节的内容、理论方法, 适合复习用。第六章还提供了五套模拟试卷, 供学生复习、并检验对知识的掌握是否还有欠缺。

本书罗列了大量线性代数中的问题。对数学的学习, 特别是对具有高度抽象体系的线性代数课程的学习需要大量的练习, 但是不能为了解题而解题。解题的目的既是为了巩固所学的知识, 同时也是为了检验是否掌握所学的知识,

特别是我们能否利用所学知识去解决理论或应用中的问题。解题不是机械化的，而应该遵循某些准则，匈牙利数学家 G· 波利亚在《怎样解题：数学思维的新方法》中阐释了解题的五个步骤：熟悉问题、深入理解问题、探索有益的念头、实现计划、回顾。我们希望读者能够遵循这个准则去解决本书中的问题：熟悉问题依赖于我们对问题及知识的理解；深入理解问题在于我们如何理清问题的未知、已知条件；探索有益念头，需要我们对问题涉及的知识有直觉上的反射，因此对概念、性质、理论、方法的回顾就成为必然；实现计划，需要实施前面的步骤，即给出问题的初步解答；回顾是指我们要对问题解决的方法以及问题本身进行反思，方法是否简洁、是否自然、是否还需要推敲？过程是否还需简化？问题本身的条件是否可以减弱或加强，减弱是否结论还成立、加强是否结论更加完整？只有如此我们才能将知识融入大脑，就此而言，G· 波利亚解题的五个步骤是我们解决问题的一般方法。

除此之外，我们需要理解线性代数知识及理论方法形成的一般规律：从简单到一般、从具体到抽象、公理化，例如线性空间的概念的形成是根据具体向量空间、函数空间的抽象而形成的，其定义的方式是公理化；而对复杂问题的解决又可归为对简单问题的解决，例如矩阵的对角化、求矩阵的相抵标准形就是将复杂的矩阵形式转化为简单的矩阵形式。希望读者通过对本书的阅读以及练习能够对线性代数知识与理论体系形成一个完整的概念，从而掌握线性代数中最基本的理论与方法。

本书主编为王卿文、杨建生，由杨建生统稿。参加本书编写的人员有杨建生、丁洋 (第一章、第六章)、王培康、刘巧华 (第二章)、王卿文、张琴 (第三章、第四章)、张建军、高楠 (第五章)。本书可作为高等学校非数学类专业的教学参考书，也可供有志考研的读者复习使用。

书中不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2015 年 9 月于上海

目录

第一章

矩阵

§1.1 基本要求、重点、难点内容

1.1.1 基本要求

1. 掌握矩阵的各种运算及其运算规律;
2. 理解逆矩阵的定义与性质, 掌握逆矩阵的计算方法;
3. 掌握矩阵的初等变换, 了解初等矩阵的性质;
4. 掌握初等变换化矩阵为行阶梯形矩阵、行最简矩阵的方法;
5. 了解矩阵的标准形, 理解矩阵秩的定义, 掌握用初等变换求矩阵秩的方法;

*6. 了解分块矩阵及其运算, 掌握分块矩阵的初等变换;

*7. 了解矩阵秩的等式与不等式.

注　在本书中, 对标注“*”的内容, 初学者仅需了解或适当选择学习.

1.1.2 重点内容

1. 矩阵运算;
2. 初等变换、矩阵的相抵或等价;
3. 求逆矩阵、矩阵的秩.

1.1.3 难点内容

*1. 分块矩阵及其初等变换;

*2. 证明矩阵秩的等式与不等式.

§1.2 主 要 内 容

1.2.1 矩阵的定义

定义 1.1　称 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行

n 列的矩形表格

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

为 $m \times n$ **矩阵**, 简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$, 其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列交叉点上的**元素** (简称元).

注 (1) 本书中的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵, 即矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 中元素 a_{ij} 为实数. $m \times n$ 实矩阵的全体记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$,$m \times n$ 复矩阵的全体记为 $\mathbf{C}^{m\times n}$.

(2) $n \times n$ 矩阵称为 n **阶方阵**. 方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角元**.

(3) 两个 $m \times n$ 矩阵称为**同型矩阵**或**同维矩阵**.

定义 1.2 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 满足 $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

1.2.2 特殊矩阵

1. **零矩阵** 所有元素都为零的矩阵, 称为**零矩阵**, 记为 $\mathbf{0}$.
2. **行向量** $1 \times n$ 矩阵称为 n 维**行向量**.
3. **列向量** $m \times 1$ 矩阵称为 m 维**列向量**.

例如, 下列 $n \times 1$ 矩阵

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为 n 维列向量. 通常称 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 为 $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 的**标准单位向量组**. 在书中除非特别说明, $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ 均指这些向量.

任意一个 $m\times n$ 矩阵均可以表示为行向量和列向量的简单形式. 例如, 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行至第 3 行对应的行向量, 称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$

的**行向量组**, 此时 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

类似地, 设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 分别为 A 的第 1 列至第 4 列对应的列向量, 称 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 A 的**列向量组**, 此时 $A = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)$.

4. **单位矩阵** 主对角元全为 1, 其余元素全为零的 n 阶方阵称为 n 阶**单位矩阵**, 记为 I 或 E.

5. **对角矩阵** 非主对角元均为零的 n 阶方阵, 称为**对角矩阵**, 记为 $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, 其中 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$ 为主对角元. 如果 $d_i = k(i = 1, 2 \cdots, n), k$ 为数, 则称其为**数乘矩阵**, 记为 kI.

6. **上 (下) 三角形矩阵** 主对角元下方 (上方) 元素都为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶**上 (下) 三角形矩阵**.

7. **对称矩阵** 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 且 $a_{ij} = a_{ji}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称 A 为 n 阶**对称矩阵**.

8. **反称矩阵** 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 且 $a_{ij} = -a_{ji}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称 A 为 n 阶**反称矩阵**.

1.2.3 矩阵的运算

1. 矩阵的加法运算

定义 1.3 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$, 称 $(a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ 为 A 与 B **之和**, 记为 $A + B$.

2. 矩阵的负运算

定义 1.4 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 A 的**负矩阵**, 记为 $-A$.

利用矩阵的加法运算和负运算, 定义矩阵的**减法运算**, 即 $A - B = A + (-B)$.

3. 矩阵的数乘运算

定义 1.5 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, k 为数, 称 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 k 的**乘积**或**数乘**, 记为 kA 或 Ak.

矩阵的加法运算、数乘运算统称为矩阵的线性运算.

矩阵的线性运算具有下列运算律:

(1) 加法的交换律 $A + B = B + A$;

(2) 加法的结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(3) 零矩阵满足 $0 + A = A + 0 = A$;

(4) 负矩阵满足 $A - A = 0$;

(5) **数乘结合律** $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$, 其中 λ,μ 为数;

(6) **数乘分配律**

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A},\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$, 其中 λ,μ 为数;

(7) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(8) $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

4. 矩阵的乘法运算

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$. 称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj} \tag{1.2.2}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注 行向量与列向量相乘的结果是一行一列的矩阵, 即

$$(a_1,a_2,\cdots,a_s)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{pmatrix}=\left(\sum_{k=1}^{s}a_kb_k\right).$$

有时将其简记为对应的数 $\sum\limits_{k=1}^{s}a_kb_k$.

矩阵乘法运算及矩阵的线性运算满足下列运算律:

(1) **乘法结合律** $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) **乘法分配律** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(3) **乘法和数乘结合律** $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$, 其中 λ 为数;

(4) **单位矩阵满足** $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$;

(5) **零矩阵满足** $\boldsymbol{0}_{m\times s}\boldsymbol{A}_{s\times n}=\boldsymbol{0}_{m\times n},\ \boldsymbol{A}_{s\times n}\boldsymbol{0}_{n\times t}=\boldsymbol{0}_{s\times t}$.

注 (1) 矩阵乘法不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 一般不相等. 第一种情况是 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 之一有意义, 另外一个无意义; 第二种情况是 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 均有意义, 但 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不同型; 第三种情况是 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 有意义而且同型, 但不相等.

(2) 矩阵的乘法不满足消去律: 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, 不一定推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

5. 方阵的幂运算

定义 1.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 定义

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^k=\overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{k}(k\text{为正整数}),$$

称 $\boldsymbol{A}^k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次**幂**.

幂运算满足如下运算律

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\ \left(\boldsymbol{A}^k\right)^l=\boldsymbol{A}^{kl}. \tag{1.2.3}$$

注 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, 一般未必有 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时, 有 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$, 特别有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n-i},$$

其中 $\dbinom{n}{i}=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

设多项式 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$, 称 $\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\boldsymbol{A}^i$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**多项式**, 记为 $f(\boldsymbol{A})$.

6. 矩阵的转置运算

定义 1.8 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

称

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix} \tag{1.2.4}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**, 记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵转置运算有如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 其中 λ 为数;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

注 (1) 一般未必有 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 只有在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时此式成立.

(2) 当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 时, 有

$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

(3) $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$ 是反称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

***7. 矩阵的共轭**

定义 1.9 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为复矩阵, 称 $(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵, 记为 $\overline{\boldsymbol{A}}$, 其中 $\overline{a_{ij}}$ 为复数 a_{ij} 的共轭.

共轭矩阵有下列性质:

性质 1.2.1 (1) $\overline{k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}}=\overline{k}\ \overline{\boldsymbol{A}}+\overline{l}\ \overline{\boldsymbol{B}}$; (2) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\ \overline{\boldsymbol{B}}$; (3) $\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$.

1.2.4 初等变换与初等矩阵

定义 1.10 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1) **换法变换** 交换两行 (交换 i,j 两行, 记为 $r_i\leftrightarrow r_j$);

(2) **倍法变换** 以非零数 k 乘某一行的每个元素 (k 乘第 i 行, 记为 $r_i\times k$);

(3) **消法变换** 把某一行每个元素乘数 k 加到另一行对应的元素上 (第 j 行乘 k 加到第 i 行上, 记为 r_i+kr_j).

如果这些变换对列施行, 则称其为矩阵的**初等列变换**. 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

注 初等列变换用记号“c”表示.

定义 1.11 将 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为 n 阶**初等矩阵**, 具体有下列三种：

(1) **换法阵 $\boldsymbol{P}(i,j)$** 将 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行与第 j 行对调 (或第 i 列与第 j 列对调), 即

$$\boldsymbol{P}(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix};$$

(2) **倍法阵 $\boldsymbol{P}(i(k))$** 将 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行 (或者第 i 列) 乘非零数 k, 即

$$\boldsymbol{P}(i(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix};$$

(3) **消法阵 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$** 将矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 j 行 (或者第 i 列) 的 k 倍加到第 i 行 (或者第 j 列), 即

$$\boldsymbol{P}(i,j(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}.$$

性质 1.2.2 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行 (或列) 变换得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 左 (或右) 乘相应的 m(或 n) 阶初等矩阵.

定义 1.12 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相抵或等价**.

矩阵相抵具有下列性质:

性质 1.2.3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矩阵.

(1) **自反性** $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相抵 ;

(2) **对称性** 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相抵 ;

(3) **传递性** 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相抵.

定义 1.13 满足下列两个条件的矩阵称为**行阶梯形矩阵**:

(1) 矩阵的零行在矩阵的最下方 ;

(2) 非零行第一个非零元的列标随着行标的递增而严格增大.

定义 1.14 在行阶梯形矩阵中, 非零行的第一个非零元为 1, 而这些 1 所在列的其余元素全为零, 这样的矩阵称为**行最简矩阵**.

定理 1.2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以经过一系列初等变换化为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

其中 r 是满足 $0\leqslant r\leqslant \min(m,n)$ 的整数.

注 根据定理 1.2.1, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在非负整数 r, 使得 $\boldsymbol{A}$ 与

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{1.2.5}$$

相抵, 当 $r=0$ 时, 规定上述矩阵为零矩阵. 称 (1.2.5) 为 $\boldsymbol{A}$ 的**相抵标准形**.

1.2.5 矩阵分块及其运算

1. 定义与运算

定义 1.15 将 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示成如下形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}, \tag{1.2.6}$$

称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**分块表示**, 其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $n_i\times m_j$ 矩阵 $(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n,\sum\limits_{j=1}^{t}m_j=m$.

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算规则相似. 分块时要注意运算的两个矩阵能按块运算, 并且参与运算的子块也能运算. 特别需要注意分块矩阵的转置运算.

如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$