研究生入学直通车系列丛书

2017

最新考研数学复习参考用书

同步基础讲解→考研强化辅导→能力提高点睛

考研数学辅导进阶教程

数学一

基础 强化 提高

编著◎吕新民

完美搭配:《进阶教程》+《全程演练》

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

研究生入学直通车系列丛书

2017

最新考研数学复习参考用书

同步基础讲解→考研强化辅导→能力提高点睛

考研数学辅导进阶教程

数学一

基础 强化 提高

编著◎吕新民

内 容 提 要

本书严格依据最新研究生入学考试大纲并结合课程教学大纲编写而成. 全书共分成二十七章，涵盖高等数学、线性代数和概率论与数理统计三门课程内容. 每一章主要包括：(1) 考纲解析：严格依据最新研究生入学考试大纲并结合课程教学大纲对本章节内容涉及的考点按基本概念、基本性质、基本运算及基本方法作一个简单归类；(2) 知识反刍：严格依据最新研究生入学考试大纲并结合课程教学大纲对章节内容作一个全面的归纳和总结；(3) 同步基础讲解：完全同步于课程教材，适用于大一新生学知识、打基础；(4) 考研强化辅导：是同步基础讲解的延伸与提高，主要适用于大四学生提高成绩、赢取考试；(5) 能力提高点睛：针对学生遇到的疑难问题作专题探讨，提供多种解题的思路，突出数学的解题方法.

本书是研究生入学考试的必备参考书，也是大一、大二学生学习高等数学、线性代数和概率论与数理统计的同步辅导书，特别有益于成绩优秀的大学生进一步提高数学水平.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学辅导进阶教程：基础、强化、提高 / 吕新民编著. —南京：东南大学出版社，2016. 4

ISBN 978-7-5641-6450-8

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①吕… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 069604 号

考研数学辅导进阶教程——基础、强化、提高

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话：025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	22.5
字　　数	562 千字
版　　次	2016 年 4 月第 1 版
印　　次	2016 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-6450-8
定　　价	51.80 元

前　　言

每次在给大一新生上数学课时，总有学生希望我介绍一本与教材同步的辅导书，以帮助他们解决在学习新课时遇到的问题；每次在给大四学生上考研辅导课时，总有学生希望我介绍一本考研辅导方面的书，以帮助他们对所学内容做一个全面总结，从而能轻松赢取考试.

几十年下来，在我的脑海里总在思考一个问题：如何将二者有机的结合起来呢？前者是后者的基础，而后者是前者的归纳与升华. 正确处理好大一的新课学习与大四的考研复习是非常重要的. 只有让学生在学习新课时把基础打牢，才能为大四的考研复习打下坚实的基础，进而起到事半功倍之效. 本书正是基于这种想法编写而成.

本书是严格依据最新的研究生入学考试大纲（数学一与数学二）并结合课程教学大纲内容按章节编写而成的，其目的是为了便于大一新生的新课学习和大四学生考研的最后复习. 每章内容主要包括：

（1）考纲解析：依据最新的研究生入学考试大纲的要求并结合课程教学大纲的要求对本章节涉及的考点按基本概念、基本性质、基本运算及基本方法作一个简单归类. 其目的是让学生对每一个知识点的内容与掌握尺度有一个基本了解. 考纲所涉及的内容是你在学习过程中需要理解和掌握的知识点，考纲的基本要求是检验你学习过程中理解和掌握知识点是否牢固的依据.

（2）知识反刍：依据最新的研究生入学考试大纲的要求并结合课程教学大纲的要求对本章节所涉及的具体内容作一个全面归纳与总结.

（3）同步基础讲解：详细讲解本章节所涉及的概念、性质与运算. 其中，选择题与填空题的讲解重点反映基本概念与性质，计算题与证明题的讲解则侧重运算与数学方法.

（4）考研强化辅导：把握本章节与其他章节知识点的关联性，提高综合处理问题的能力. 这部分内容，对于大一新生来说是参加大学生数学竞赛的敲门砖，对于准备参加研究生入学考试的大四学生来说是提高成绩、赢取考试的关键.

（5）能力提高点睛：主要针对学生在学习过程中遇到的疑难问题作专题探讨，目的是找出问题的特点，提供多种解题的思路，突出数学的解题方法.

本书是作者长期从事大学生数学教学和研究生入学考试辅导工作的积累与总结. 在编写过程中，得到了南京理工大学研究生院的领导、教务处的领导以及理学院领导的大力支持，得到了东南大学出版社的领导和编辑的鼎立支持. 在此，对他们的关心、支持和帮助一并表示衷心感谢.

限于作者才疏学浅，书中难免存在不当和疏漏之处，敬请批评指正.

作者邮箱：luxinmin_nanjing@163. com.

吕新民

2016 年 3 月于南京

目　　录

第一部分　高等数学

第1章　函数、极限与连续

一、考纲解析

【考纲要求】

1. 理解极限的定义(包括“ε-N”的定义、“ε-δ”的定义以及“ε-X”的定义)，掌握函数极限存在与左、右极限之间的关系.

2. 掌握极限的性质及极限的四则运算法则.

3. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较以及用等价无穷小量求极限的方法.

4. 掌握极限存在的两个准则以及利用两个准则求极限的方法，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

5. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型；了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界定理、最值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

【考点提示】

1. 基本概念：极限、无穷小量、无穷小量的比较、连续、间断点.

2. 基本性质：极限的性质、无穷小的性质及连续的性质.

3. 基本运算：求极限的各种方法(有的方法分散在后续各章节中).

二、知识反刍

1. 数列极限的定义与性质

(1)“ε-N”的定义：设$\{x_n\}$是一个数列，a是一个常数，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$，则称a为数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 性质：唯一性、有界性及保号性.

2. 函数极限的定义与性质

(1)“ε-δ”的定义：设$f(x)$是一个函数，A是一个常数，如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在

正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

若上述条件改为：当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 右侧趋向于 x_0 时的极限，或称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限，记作 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$. 类似可定义函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限 $f(x_0-0)$.

注：不论是 $x\to x_0$，还是 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$，x 都不等于 x_0，即 $x\neq x_0$. 因此考察函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限时，$f(x)$ 在 x_0 处可以没有定义.

(2)"ε-X"的定义：设 $f(x)$ 是一个函数，A 是一个常数，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

如果上述条件改为：当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 $+\infty$ 时 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 类似可定义 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(3) 性质：唯一性、(局部) 有界性及(局部) 保号性.

3. 极限的运算法则

每一个数列 $\{x_n\}$ 即是定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 上的函数 $x_n=f(n)(n\in\mathbf{N})$，因此数列极限事实上可视为函数极限的特殊情形. 设在自变量的同一变化过程中，如果 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)$；

(3) 若 $\lim g(x)\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

4. 数列极限与函数极限之间的关系

设 $f(x)$ 是一个函数，A 是一个常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0(\text{或}\infty)}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对于函数 $f(x)$ 定义域内任一趋向于 x_0(或 ∞) 的数列 $\{x_n\}$，且 $x_n\neq x_0$(或 ∞)，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

注：上述结果主要适用于判断某些函数的极限不存在. 例如考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$，取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi}$，$x_n''=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=1$，故极限不存在.

5. 无穷小量与无穷大量

(1) 定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0(\text{或}\infty)}f(x)=0$，称函数 $f(x)$ 在当 $x\to x_0$(或 ∞) 时为无穷小量；如果 $\lim\limits_{x\to x_0(\text{或}\infty)}f(x)=\infty$，称函数 $f(x)$ 在当 $x\to x_0$(或 ∞) 时为无穷大量.

注：无穷小量是极限存在的一种特殊形式，无穷大量是极限不存在的一种特殊形式.

(2) 两者之间的关系

在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大量,则 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷小量;如果 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x)\neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷大量.

(3) 无穷小量的性质

※ 有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量.

※ 无穷小量与有界量的积仍是无穷小量.

(4) 无穷小量的比较

设在自变量的同一变化过程中,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 均为无穷小量.

※ 如果 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量.

※ 如果 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更低阶的无穷小量.

※ 如果 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$,称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小量.特别地,如果 $C=1$,称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量,记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

注:应熟练掌握如下一些常用的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$;$\tan x\sim x$;$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$;$\arcsin x\sim x$;$\arctan x\sim x$;$\ln(1+x)\sim x$;$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$;$e^x-1\sim x$;$(1+x)^\lambda-1\sim\lambda x(\lambda>0)$,能为解题带来方便.

(5) 等价无穷小替换定理

设在自变量的同一变化过程中,$\alpha_1(x)$,$\alpha_2(x)$,$\beta_1(x)$ 及 $\beta_2(x)$ 均为无穷小量,且 $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$,$\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$.如果 $\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$,则

$$\lim\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A.$$

注:利用等价无穷小替换定理可以将一般函数的极限最终归结为多项式函数的极限,从而大大简化求极限的过程.

(6) 函数极限与无穷小的关系

设 $f(x)$ 是一个函数,A 是一个常数,则

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\quad \text{其中 } \lim\alpha(x)=0.$$

6. 极限存在的两个准则及两个重要极限

(1) 单调有界法则(仅对数列极限):若数列 $\{x_n\}$ 单调增加(或减少),且有上界(或下界),则数列 $\{x_n\}$ 必有极限.利用单调有界法则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

(2) 夹逼准则(既可对数列极限,也可对函数极限):这里以函数极限为例,设函数 $f(x)$,

$g(x)$,$h(x)$ 满足 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,且在自变量的同一变化过程中,$\lim f(x)=\lim h(x)=A$,则 $\lim g(x)=A$. 利用夹逼准则可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

利用结果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 并结合夹逼准则,可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

7. 连续与间断点

(1) 连续的定义:如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点处均连续,称函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

注: 在端点处(如果包含的话)的连续性作如下规定:左端点右连续,右端点左连续.

(2) 间断点的含义:如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有定义,或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,或函数 $f(x)$ 在 x_0 处虽有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,此时称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断.

(3) 间断点的分类

※ 如果 $f(x_0-0)$,$f(x_0+0)$ 均存在,称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 其中,如果 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$,称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点;如果 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

※ 如果 $f(x_0-0)$,$f(x_0+0)$ 至少有一个不存在,称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 其中,如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点;否则,称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

8. 连续函数的性质

(1) 四则运算性质:如果函数 $f(x)$,$g(x)$ 均在 x_0 处连续,则

※ $f(x)\pm g(x)$ 在 x_0 处连续;

※ $f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续;

※ 若 $g(x_0)\neq 0$,则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处连续.

(2) 反函数的连续性

设函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上单调且连续的函数,则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间上单调且连续.

(3) 复合函数的连续性

设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$,如果 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处极限存在,记 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,而 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处极限存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

(4) 基本初等函数与初等函数的连续性

※ 基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)在其定义域内是连续的;

※ 初等函数(基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而得到的函数)在其定义区间上是连续的.

注:初等函数在其定义域内未必是连续的. 例如函数 $f(x)=\sqrt{\ln\sin x}$,其定义域为 $I=\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,这是一些离散的点,显然函数 $f(x)$ 在 I 上不连续.

9. 闭区间上连续函数的性质

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 具有如下性质:

(1) 最值性:即存在 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$,使得 $f(\xi_1)=m,f(\xi_2)=M$,其中 m,M 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

(2) 介值性:设 $f(a)=A,f(b)=B$,则对于介于 A 与 B 之间的任何数 C,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$.

(3) 零点定理:如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

三、同步基础讲解

【例 1.1】 选择题.

(1) 已知 $\{x_n\}$ 是一个数列,a 是一个常数,与关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 等价的描述为(   ).

A. 在点 a 的某一个邻域内含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项

B. 在点 a 的任一个邻域内含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项

C. 在点 a 的某一个邻域外只含有 $\{x_n\}$ 中的有限多项

D. 在点 a 的任一个邻域外只含有 $\{x_n\}$ 中的有限多项

解:依据"ε-N"的定义,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$,即 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$. 这表明在点 a 的 ε 邻域外至多只有前 N 项. 由 ε 的任意性知正确答案为 D.

(2) 当函数 $f(x)$ 满足条件(   )时,$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})f(x)=0$.

A. 仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

B. 仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

C. $f(x)$ 为有界函数

D. $f(x)$ 为任意函数

解:因为

$$\lim_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=0,$$

所以利用等价无穷小的性质,正确答案为 C.

(3) 设 $x\to0$ 时,$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 $n=$(   ).

A. 1   B. 2   C. 3   D. 4

解:因为

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^n},$$

注意到 $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$，从而 $n = 3$. 故正确答案为 C.

（4）设 $f(x)$ 是三次多项式，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = 1$，则 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3} = $（　　）.

A. 1　　　　B. -1　　　　C. 0　　　　D. 不存在

解：因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，结合条件知 $f(1) = f(2) = 0$，于是可设 $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-b)$. 由题设

$$\begin{cases} a(1-2)(1-b) = 1, \\ a(2-1)(2-b) = 1, \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

由此易知 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}$ 不存在. 故正确答案为 D.

（5）$x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x-1}}}$ 的（　　）.

A. 可去间断点　　　　B. 跳跃间断点　　　　C. 无穷间断点　　　　D. 震荡间断点

解：因 $f(1-0) = 1$，$f(1+0) = 0$，所以 $x = 1$ 是函数的跳跃间断点. 故正确答案为 B.

【例 1.2】　填空题.

（1）设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}, & x < 1, \\ \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}}, & x > 1, \end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，则常数 $a = $________.

解：因为

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 1^-}(1+\sqrt{2-x}) = 2,$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{a}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+}\left[\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right]^{\frac{a}{x}} = e^a,$$

由题设，$f(1-0) = f(1+0)$，即 $2 = e^a$，故 $a = \ln 2$.

（2）设 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-1} = 1$，则 a, b 的值分别为________.

解：由题设，$1 = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+a)-b^2}{(x-1)(\sqrt{x+a}+b)}$，欲使关系式成立，$a, b$ 应满足

$$\begin{cases} a - b^2 = -1, \\ \sqrt{1+a} + b = 1, \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} a = -\frac{3}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

（3）已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^4 - 7x^3 - 14)^a - x] = b$ 存在，则 a, b 的值分别为________.

解：由题设，$x^4 - 7x^3 - 14$ 与 x 同次幂，从而 $a = \frac{1}{4}$. 于是

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{-7x^3 - 14}{(\sqrt[4]{x^4 - 7x^3 - 14} + x)(\sqrt{x^4 - 7x^3 - 14} + x^2)} = -\frac{7}{4}.$$

(4) 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x\cdot f(x)}=$ ________.

解:由题设,可知

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}\xlongequal{令 t=2x}\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x\cdot f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{4}.$$

(5) 设 $a,b\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\dfrac{1}{a+e^{bx}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则 a,b 应满足的条件是________.

解:由题设,$f(x)=\dfrac{1}{a+e^{bx}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,则 $a\geqslant 0$;又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则 $b<0$. 故 a,b 应满足的条件是 $a\geqslant 0,b<0$.

【例 1.3】 设 $\{x_n\}$ 是一个数列. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$.

证明:必要性. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$. 现取自然数 N_0,使得 $2N_0>2N_0-1>N$,则当 $n>N_0$ 时有 $|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$,且 $|x_{2n}-a|<\varepsilon$. 由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$.

充分性. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N_1 和 N_2,当 $n>N_1$ 时,$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$,当 $n>N_2$ 时,$|x_{2n}-a|<\varepsilon$.

取正整数 N,使得 $N>\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,上面两个不等式同时成立,从而 $|x_n-a|<\varepsilon$. 由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

注:利用"ε-N"的定义验证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,关键是要找到 N,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$ 即可.

【例 1.4】 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\ln(1-x)}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})\quad(|x|<1)$.

解:(1) 分子有理化,分母利用等价无穷小,可得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{-x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=-\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=-1.$$

(2) 因为

$$3\leqslant(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}\leqslant 3\sqrt[x]{3},$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{3}=1$,由夹逼准则,原式 $=3$.

(3) 因为

$$\sin\ln(x+1)-\sin\ln x=2\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2},$$

由复合函数极限的运算法则,可得

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{2}=0,$$

而 $\left|\cos\dfrac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\right|\leqslant 1$,利用等价无穷小的性质,原式 $=0$.

(4) 当 $x\to+\infty$ 时,$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$,于是

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(1+2^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[x\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right]=\ln 2.$$

(5) 由对数函数的性质并结合复合函数极限的运算法则,可得

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\right]\\&=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x}\right]\\&=\ln(1\cdot \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{-1})=0.\end{aligned}$$

(6) 令 $\tan x=1+t$,则当 $x\to\dfrac{\pi}{4}$ 时,$t\to 0$. 于是

$$原式=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{-2(1+t)}{t(2+t)}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{-2(1+t)}{2+t}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

(7) 因为 $\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=2\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$,所以

$$原式=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

(8) 分子、分母同乘以 $1-x$,得

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

当 $|x|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$,故原式 $=\dfrac{1}{1-x}$.

【例 1.5】 (1) 已知数列 $x_1=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1+x_n^2)(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限值；

(2) 已知数列 $x_1=\sqrt{3}, x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限值.

解:(1) 因为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(1+x_n^2)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot x_n=x_n,$$

即数列单调递增. 又因为 $x_1=\dfrac{1}{2}<1, x_2=\dfrac{1}{2}\left[1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]<1$，假定 $x_k<1$，则当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\dfrac{1}{2}(1+x_k^2)<\dfrac{1}{2}(1+1)=1$. 故由数学归纳法知，对于一切 n，均有 $x_n<1$，从而数列单调递增且有上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，将关系式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1+x_n^2)$ 两边取极限，得 $a=\dfrac{1}{2}(1+a^2)$，解得 $a=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(2) 显然 $x_2=\sqrt{3+2\sqrt{3}}>\sqrt{2}+1>\sqrt{3}=x_1$，故

$$x_{n+1}^2-x_n^2=2(x_n-x_{n-1})=\frac{2(x_n^2-x_{n-1}^2)}{x_n+x_{n-1}}=\frac{2^2(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2)}{(x_n+x_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})}$$

$$=\cdots=\frac{2^{n-1}(x_2-x_1)}{(x_n+x_{n-1})(x_{n-1}+x_{n-2})\cdots(x_3+x_2)}>0,$$

注意到数列是正项数列，从而 $x_{n+1}>x_n$，即数列单调递增. 又因为 $x_1=\sqrt{3}<3, x_2=\sqrt{3+2x_1}<\sqrt{3+2\cdot 3}=3$，假定 $x_k<3$，则当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\sqrt{3+2x_k}<\sqrt{3+2\cdot 3}=3$. 故由数学归纳法知，对于一切 n，均有 $x_n<3$，从而数列单调递增且有上界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，将关系式 $x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{3+2a}$，解得 $a=3$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

【例 1.6】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的连续性.

解: $x=0$ 是函数的分段点，因为

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\pi x}{\sin\pi x}\cdot\frac{x^2-4}{\pi}=-\frac{4}{\pi},$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=0,$$

故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点，且是跳跃间断点.

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}$ 是初等函数，在其定义区间上是连续的. 故只有当 $\sin\pi x=0$，即 $x=-n$（n 是正整数），函数才有可能有间断点. 当 $x=-2$ 时，因为

$$\lim_{x\to -2}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\pi}{\sin(x+2)\pi}\cdot\frac{x(x-2)}{\pi}=\frac{8}{\pi},$$