

《经济数学简明教程》

学 习 指 导

李树香 周 冰 李文献 主编

广东省高等教育出版社

经济数学简明教程学习指导

李树香 周 冰 李文献 主编

广东省教育厅成人教育处

内 容 简 介

《学习指导》是《经济数学简明教程》的配套用书。内容包括(1)各章书的基本要求、重点、难点的详细叙述。(2)分析、讲解、纠正学习中容易产生的错误。(3)适当编入一些有代表性的题目选解,以提高读者分析能力和解题能力。(4)编入少量超过教材要求的内容,并为有志进入本科和考经济类硕士研究生的需要,我们根据国家教委颁布有关考试大纲的部分内容编入指导书内,为读者提供必要的基础知识。(5)提供了全部习题答案,便于自学。本书可供教师,学生以及自学经济数学简明教程读者作参考书。

张二瑞

河南大学数学系编

前 言

为了便于自学,配合教材,编写这本《经济数学简明教程学习指导》,同时考虑到有部分学生进入本科和考经济类硕士研究生的需要,我们根据国家教委颁发的大专起点本科班和经济类硕士研究生入学考试大纲的要求,将级数,二阶微分方程,矩阵的特征值,特征问量和二次型,二维随机变量及其分布函数、贝叶斯决策分析编入指导书、供读者自学。

参加本书编写的是李文献,(一、二、十四章),李树香(三、四、七章),周冰(五、六、八章),钱志大(九、十章),林宗振(十一、十二、十三章)等几位教授、副教授。

广东省高教局成人教育办公室的领导同志对本教程的编写工作给予具体的指导和热情的支持,在此表示衷心的感谢。

暨南大学董事会董事,泰国华侨实业家颜开臣先生在百忙之中为本书写《寄语》,在此表示衷心感谢。

本书的编写得到暨南大学教育学院的领导和理工学院以及数学系的支持,特别是彭大火院长给予热情支持和指导以及冼其尤,冯志刚,柏元淮教授对本书提出了宝贵建议,在此表示感谢。

本书是适应教学的需求编写的,加上我们水平有限,缺点、错误在所难免,尚祈专家们和读者指正。

编 者

一九九四年九月于暨南园

名人寄语

数学是研究数量之间关系的科学,它在自然科学和社会科学以及管理科学中均有广泛的应用,特别是现代企业生产多数是由电脑控制,有的甚至用机器人操作,如果没有数学这个强有力的工具,管理就谈不上现代化。

企业的成败,取决于产品的质量经济效益以及劳动生产率,质量高、经济效益高、劳动生产率高,企业才能取得成功。

关于质量方面:要建立一套质量控制和检测的方法,因而可利用概率与数理统计来实现质量监督。有了这层监督,才能使质量获得改善,获得提高。

关于提高经济效益:虽然因素是多方面的,如产量、单位产品变动成本、固定成本、产品价格都有直接的影响。但在畅销的前提下,影响最大的是成本。因此一个企业要提高经济效益,关键是降低成本,对成本要有严格的管理与控制。任何一项新产品的研制与开发,均应是事先进行成本预测。因此,只有用数学方法进行定量分析,才能作出正确的决策。

至于提高全员劳动生产率,则需要用统筹的方法,防止劳动力的浪费,做到人尽其才,各施其职,这是很重要的。兵不在于多而在于精,一个企业绝不能存在人多好办事的想法。企业全体员工素质要高,生产力中人是决定因素,但同时也要有现代化的设备。如果仅有先进的设备而没有高素质的人才,企业不可能办好;反之,如果有高素质的人才而没有好的设备也不

行,必须把两者统一起来。而人的素质主要表现在业务水平,思想品德、身体状况等三个方面。对于一个企业家来说,主要是用人,要把各方面人的积极性调动起来,才能做到运筹帷幄,战无不胜,攻无不克。

同时,企业生产的产品必须适应市场的需要,一般应“以销定产”,要防止生产的盲目性,这就要加强市场预测,特别是当今世界市场竞争激烈。只有当你的产品列入名、优才有竞争力。要做到物美价廉,才能立于不败之地。

总之,要办好一个企业,它必须对对整个经济活动进行周密的分析,要加强各方面的预测:如市场预测、成本预测、利润预测,而预测又是为决策提供依据。而这些都离不开了数学的演变和推算。

企业家必须具有奋斗精神,积极努力向前推进和扩张,才是保障自己事业的最好方针与方法。我在事业上有点成就,这与我早年就读于暨南大学数学系有关,它给我提供了数学的方法和思维,应用于企业管理。算是取得了一点成绩。

现在,由暨南大学数学系五位教授编著的《经济数学简明教程》为有志于从事经济领域工作的人提供了一本很好教材,我仅衷心希望青年朋友们,趁今天有良好深造的机会,应该扎扎实实打好基础,学好知识,将来为报效祖国,为造福人民,做出更大的贡献。

颜开臣于曼谷

1994. 8. 18

按语：颜开臣先生，祖籍广东潮阳，早年就读于广州暨南大学数学系。现旅居泰国曼谷，是一位白手起家的青年企业家。由一家简单的青山制衣厂发展成为一个庞大的“青山集团”机构，由一个单元企业发展成为多元企业，如皮革、制衣、建筑、房地产、贸易、食品等。拥有员工四千多人。近年大力向外发展投资，已在哈尔滨投资房地产；潮阳建立泰华联合制衣厂；深圳食品有限公司；寮国青山制衣厂；香港同富集团有限公司。

现任青山集团机构总裁；泰国中华总商会常务会董；泰国介寿堂慈善总会副主席；泰华报人公益基金会名誉主席；广州暨南大学董事会董事等要职。

目 录

第一章	函数	(1)
第二章	极限与连续	(10)
第三章	导数与微分	(18)
第四章	导数的应用	(33)
第五章	不定积分	(65)
第六章	定积分与广义积分	(81)
第七章	一阶微分方程	(90)
第八章	多元函数微积分	(103)
第九章	行列式与矩阵	(127)
第十章	线性方程组	(162)
第十一章	概率论基础知识	(196)
第十二章	随机变量及其分布函数	(219)
第十三章	随机变量的数字特征	(227)
第十四章	数理统计学基础	(250)
各章习题答案		(262)

第一章 函 数

一、基本要求

通过本章学习,要求读者做到下列几个方面:

1. 对函数概念有一个正确的认识。构成函数有两个要素,即其对应关系和定义域。给出一个函数要同时给出这两个方面。两个函数也只有具有相同的定义域和对应规律才能说他们是相等的。

2. 在牢记几个基本初等函数的性质和图形基础上,结合复合函数和初等函数的概念,能够计算某些函数的函数值和指出其定义域。

3. 会把几个函数复合成为一个复合函数;对于一个复合函数,能弄清其结构,并能把它分解开来。

二、重点与难点

本章的重点是函数概念,求函数值和定义域,复合函数的分解。

难点是复合函数的分解。

三、例题选解与分析

今后所遇到的函数,主要是初等函数和分段函数。这些函数或者是由基本初等函数经过有限多次四则运算以及复合而

得到的,或者能分成几段,在每段上,是由基本初等函数经过有限多次四则运算以及复合而得到的.因此,熟悉基本初等函数、弄清函数的结构、分解复合函数是完成本章习题的关键。

1. 函数的复合

例1 分别把下列函数复合成一个复合函数。

$$(1) y=1+u^2, \quad u=\sin x$$

$$(2) y=e^{-u}, \quad u=1-v^3, \quad v=\sin x.$$

解(1) 对于 x 的任何值, $u=\sin x$ 取值在 $[-1, 1]$ 上, 这样的 u 值, $y=1+u^2$ 总是有意义的. 因此, 可以通过复合的方法建立 y 与 x 的函数关系。

将 $u=\sin x$ 代入 $y=1+u^2$, 得复合函数

$$y=1+(\sin x)^2=1+\sin^2 x.$$

(2) 对于 x 的任何值, $v=\sin x$ 取值在 $[-1, 1]$ 上, 这样的 v 值, $u=1-v^3$ 取值在 $[0, 2]$ 上, 在这范围内, $y=e^{-u}$ 总是有意义的. 因此, 把 $v=\sin x$ 代入 $u=1-v^3$ 中, 得 $u=1-\sin^3 x$, 再把它代入 $y=e^{-u}$ 中, 得复合函数

$$y=e^{-(1-\sin^3 x)}=e^{-1+\sin^3 x}.$$

必须指出, 并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数, 例如, $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 而 $u=2+x^2$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意值 x , 相应的函数值 u 都大于或等于 2, 对 $y=\arcsin u$ 都没有意义. 因此, 它们不能复合成一个复合函数。

2. 复合函数分解

复合函数的分解, 是对一个复合函数引入适当的中间变

量,使得该复合函数是几个简单函数的复合。所谓简单函数是指通常的六类基本初等函数或他们之和、差、积、商所组成的函数。因此,把一个复合函数进行分解的关键在于:弄清函数的结构,即从自变量的每一个值要得到相应的函数值需要经过哪些运算?运算的次序如何?哪些运算已经符合简单函数的要求?哪些运算可以合并起来?从而引入适当的中间变量使复合函数分解开。

例1 指出函数 $y=e^{e^{x^2}}$ 是由哪些简单函数复合而成的。

我们知道,对于每一个 x 值,首先取 x 的平方运算得 x^2 ,然后取指数运算得 e^{x^2} ,再取指数运算即得 $y=e^{e^{x^2}}$,而且其中每一步运算都符合简单函数要求,所以可令 $v=x^2, u=e^v, y=e^u$ 使函数分解开。

解 $y=e^{e^{x^2}}$ 可看成由 $y=e^u, u=e^v, v=x^2$ 所复合而成的。

例2 指出函数 $y=e^{e^{-x^2}}$ 是由哪些简单函数复合而成的。

对于函数 $y=e^{e^{-x^2}}$, 它的运算情况是:

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow -x^2 \rightarrow e^{-x^2} \rightarrow e^{e^{-x^2}}$$

检查每一步运算,发现从 $x \rightarrow x^2 \rightarrow -x^2$ 可以归并为 $x \rightarrow -x^2$,仍符合简单函数的要求,从而就中只用一个中间变量就可以了。

解 $y=e^{e^{-x^2}}$ 是由 $y=e^u, u=e^v, v=-x^2$ 复合而成的。

例3 指出函数 $y=\arctg \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 是由哪些简单函数复合而成的。

解 $y=\arctg \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 是由 $y=\arctg u, u=v^{-\frac{1}{2}}$,

$v = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ 复合而成的。

注意 $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ 是基本初等函数间的四则运算, 故

$v = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ 是简单函数。

例 4 指出 $y = -\cos^2(e^{3x})$ 是由哪些简单函数复合而成的。

解 $y = -\cos^2(e^{3x})$ 是由 $y = -u^2, u = \cos v, v = e^w, w = 3x$ 复合而成的。

3. 函数的定义域

决定函数的定义域, 一定要注意:

- (1) 只有非负数才能进行开偶次方根运算;
- (2) 分母不能为零;
- (3) 零和负数没有对数;
- (4) 其他初等函数的定义域;
- (5) 对于复合函数, 分解以后, 每个简单函数的定义域和值域, 以及每相连接的两个简单函数中, 前面函数的值域与下一个函数的定义域的公共部分。

例 试指出下列函数的定义域。

(1) $y = \frac{1}{1+x^2};$

(2) $y = \frac{x-4}{x+4};$

(3) $y = \lg(x-2);$

(4) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$

$$(5) \quad y = \lg[\lg(\lg x)] + \sqrt{15-x}.$$

解 (1) 因为对任何的 $x \in (-\infty, +\infty)$, $1+x^2 \neq 0$ 所以函数 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(2) \quad \text{要使函数 } y = \frac{x-4}{x+4}, \text{ 有意义, 即要 } x+4 \neq 0, \text{ 即}$$

$$x \neq -4$$

所以, 函数 $y = \frac{x-4}{x+4}$ 的定义域为

$$(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty).$$

$$(3) \quad \text{要使函数 } y = \lg(x-2) \text{ 有意义, 即要 } x-2 > 0, \text{ 即}$$

$$x > 2$$

所以, 函数 $y = \lg(x-2)$ 的定义域为 $(2, +\infty)$.

$$(4) \quad \text{要使函数 } y = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \text{ 有意义, 即要}$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-3 > 0 \end{cases},$$

或

$$\begin{cases} x+1 \leq 0, \\ x-3 < 0. \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x > 3. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x \leq -1, \\ x < 3. \end{cases}$$

故定义域为 $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$.

$$(5) \quad \text{要使函数 } y = \lg[\lg(\lg x)] + \sqrt{15-x} \text{ 有意义, 即要}$$

即要

$$\begin{cases} \lg(\lg x) > 0, \\ 15 - x \geq 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \lg x > 1, \\ x \leq 15, \end{cases}$$

也就是

$$\begin{cases} x > 10, \\ x \leq 15. \end{cases}$$

所以, 函数 $y = \lg[\lg(\lg x)] + \sqrt{15 - x}$ 的定义域为 $(10, 15]$ 。

对于分段函数, 因为分段函数是在不同范围内用不同式子分段表示的函数, 所以这种函数的定义域就是各分段区间的并。

例 2 指出函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 1, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域。

解 函数定义域为

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup [1, +\infty) = (-\infty, +\infty).$$

4. 函数值的计算

分段函数在不同的区间用不同的式子分段表示自变量与因变量之间的函数关系, 在求这种函数在某点的函数值时, 必须注意该点所在范围。

例1 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x+2, & x < 0. \end{cases}$$

求函数值 $f(3), f(1), f(0.5), f(-1)$.

解 $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5,$

$$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1,$$

$$f(0) = 2,$$

$$f(0.5) = 2,$$

$$f(-1) = -1 + 2 = 1.$$

例2 已知

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 2, & x < 0, \end{cases} \quad \text{和} \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1, \\ x-1, & x \leq 1, \end{cases}$$

求 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)-g(x)$.

解 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是分段函数, 虽然定义域都为 $(-\infty, +\infty)$, 但分段不同, 它们之间的代数运算需要分别在区间 $(-\infty, 0)$ 、 $[0, 1]$ 和 $(1, +\infty)$ 三个区间内进行. 因此,

$$f(x)+g(x) = \begin{cases} x^2+2x+1, & x > 1, \\ x^2+x-1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & x < 0. \end{cases}$$

$$f(x)-g(x) = \begin{cases} x^2-2x-1, & x > 1, \\ x^2-x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x+3, & x < 0. \end{cases}$$

5. 建立函数关系

例1 某工厂生产某种产品, 日产量最多为 150 吨, 固定成本为 130 元, 每多生产一吨, 成本增加 5 元, 求每日产品的

总成本 C (元)关于日产量 x (吨)的函数关系。

解 由假定,日产量为 x 吨时,每日产品的总成本是固定成本与变动成本之和,其中

固定成本 = 130(元),

变动成本 = $5x$ (元)。

所以,总成本

$$C = 130 + 5x(\text{元}),$$

定义域为 $[0, 150]$ 。

2 某工厂生产某型号汽车,年产量为 a 部,分若干批进行生产,每批生产准备费为 b 元;设产品均匀投放市场,即年平均库存量为批量的一半;又设每年每部汽车的库存费为 c 元。试求出一年中库存费与生产费之和与批量之间的函数关系。

解 设批量为 x (部),生产准备费与库存费之和为 y 。

由假定,批量为 x 时,批数为 $\frac{a}{x}$,从而生产准备费为

$$b \times \frac{a}{x},$$

因均匀投放市场,年平均库存量为 $\frac{x}{2}$,故库存费为 $c \times \frac{x}{2}$ 。

所以,它们之间的函数关系为

$$y = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2}x(\text{元}),$$

定义域为 $(0, a]$ 。

例 3 制作一个容积为 V 立方米的无盖圆柱形蓄水池,已知池底每平方米的造价为 a 元,而周围每平方米的造价为 $\frac{a}{2}$ 元,试建立蓄水池的总造价与底面半径的函数关系。

解 设底面圆半径为 r (米), 水池的高为 h (米), 总造价为 y (元)。

由假定, 得 $h = \frac{V}{\pi r^2}$,

底面的造价为 $\pi r^2 \times a$,

周围的造价为 $(2\pi rh) \times \frac{a}{2} = \frac{Va}{r}$

所以, 造价

$$y = a\pi r^2 + \frac{Va}{r} (\text{元}),$$

定义域为 $(0, +\infty)$ 。