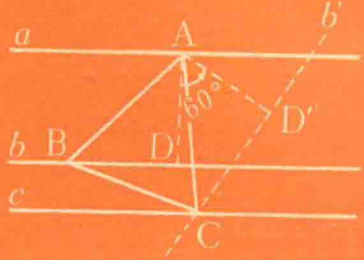
数学进修用书



王 澄

直线形

ZHI XIAN XING

数学进修用书

直 线 形

王 澄

浙江人民出版社

数学进修用书

直　线　形

王　澄

*

浙江人民出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本：787×1092　1/32　印张9　字数220,000

1979年11月第　一　版

1979年11月第一次印刷

印数：1—8,200

统一书号：7103·1071

定　价：0.72 元

内 容 提 要

本书较系统地叙述了直线形的性质、比例和相似直线形的意义及应用、直线形面积的求法和应用等基本知识，同时还提供了很多教学方法上的启示．取材丰富，文字简练．不仅适合自学，而且是一本较好的教学参考书．

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的．随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加．在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人材的极其光荣的任务．当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切．本丛书出版目的，就是为他们进修提供一点比较系统的材料．编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实．同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学．丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学．

前　言

几何学的对象是现实世界的空间形式．现实世界的空间形式是多种多样的，因此，几何学研究的对象也是多种多样的．就初等平面几何来说，主要是研究直线形和圆的性质，这也就是《直线形》和《圆》这两本小册子的中心内容．

通常的平面几何教科书中，总是首先叙述平面几何的基本概念，再分别研究直线形和圆的性质，然后探讨有关比例和面积的问题．我们这两本书，基本上也是依照这个系统编写的．在《直线形》中，对于平面几何的那些最基本的概念，例如关于直线的公理、两直线的平行和垂直等等，我们将不再叙述而直接采用．同时，《直线形》和《圆》也作了大体上的分工：在《直线形》中，除了圆的定义及圆规的使用以外，不涉及圆的其它性质；而在《圆》中，则不加限制地应用《直线形》中的所有结果．换句话说，直线形中牵涉到圆的问题，比例和面积中有关圆的部分，都放在《圆》中叙述，后一点与一般的几何教科书是有些不同的．

由于本书是一本几何基础知识的参考书，它不同于一般的教科书．在选材上，比中学几何教材将有所扩大、加深、提高，但仍然注意联系中学几何教学实际．对于中学教材中已有的一般内容，叙述就比较简单，同时阐明这些内容的意义，或进行类比、小结．对较难的部分，着重分析问题，说清楚为什么．对较新的概念，则通过实例，由浅入深地进行叙述．另

外，在每个章节后面，配备了相当数量的习题.

为了让读者在独立解题后能够校对自己的解法和答案，或者在遇到疑难时有所参考，我们在书后提供了各章节习题的简单解答. 由于习题的难易程度不同，解答的详略也就跟着不同，有些甚至略去解答. 同时，还要说明，不少习题可以有多种解法，我们仅举出较常见的或较易想到的一种，这种解法也不一定是最好的，希望读者不为书后的习题解答所束缚，而能创造出更好的解法来.

限于作者的水平，本书难免有不少缺点或错误，恳请读者批评指正.

目　　录

第一章　三角形 …………………………………………（ 1 ）
§1·1　基本概念 ……………………………………（ 1 ）
§1·2　三角形的内角和 ……………………………（ 4 ）
§1·3　轴对称和等腰三角形 ………………………（ 9 ）
§1·4　三角形的全等 ………………………………（ 16 ）
§1·5　三角形的边、角关系 ………………………（ 25 ）
§1·6　四种命题间的关系 …………………………（ 32 ）
§1·7　轨迹 …………………………………………（ 38 ）
§1·8　作图 …………………………………………（ 43 ）
§1·9　综合例题 ……………………………………（ 51 ）
第二章　四边形 …………………………………………（ 58 ）
§2·1　平行四边形 …………………………………（ 58 ）
§2·2　中心对称 ……………………………………（ 69 ）
§2·3　旋转与平行移动 ……………………………（ 76 ）
§2·4　几种特殊的平行四边形——矩形、菱形和正方形 ……………………………………………（ 85 ）
§2·5　梯形 …………………………………………（ 91 ）
§2·6　四边形的分类，综合例题 …………………（ 95 ）
第三章　比例和相似形 …………………………………（ 105 ）
§3·1　成比例的线段 ………………………………（ 105 ）
§3·2　平行线截得比例线段定理 …………………（ 110 ）
§3·3　三角形的相似 ………………………………（ 120 ）
§3·4　多边形的相似 ………………………………（ 133 ）
§3·5　位似变换 ……………………………………（ 141 ）

§3·6　三角形中各线段间的关系及计算 ……………………（152）
§3·7　代数式的作图 ……………………………………………（163）
§3·8　综合例题 ……………………………………………………（172）
第四章　面积 ……………………………………………………………（184）
§4·1　面积的基本概念，矩形的面积 ……………………（184）
§4·2　三角形的面积 ……………………………………………（190）
§4·3　等积图形 ……………………………………………………（204）
§4·4　综合例题 ……………………………………………………（213）
习题解答……………………………………………………………（225）

第一章　三　角　形

§1·1　基本概念

三角形是边数最少的多边形，也是研究多边形的基础．在讨论三角形的性质以前，我们先介绍一般多边形的概念．

设在平面上有有限个点 A_0、A_1、A_2、…、A_n，顺次连成线段 A_0A_1、A_1A_2、…、$A_{n-1}A_n$，且相邻的线段不在同一条直线上，则它们组成的线叫做折线．A_0、A_n 叫做折线的端点（图1·1）．如果折线的端点相合于一点，就叫做封闭折线（图1·2）．封闭折线又叫做多边形，组成多边形的各条线段叫做多边形的边．

如图1·3，多边形的不相邻的边都没有公共点，这样的多边形叫做简单多边形；但如图1·4的多边形，它有两条不相邻的边相交，这样的多边形就不是简单多边形．在简单多边形中，把多边形的每一条边向两方延长成一直线，如果多边形的其它各

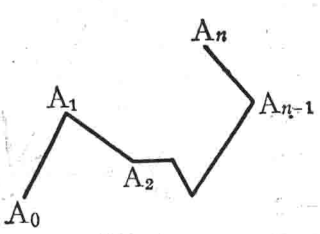


图1·1

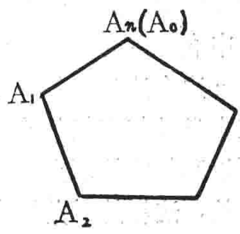


图1·2

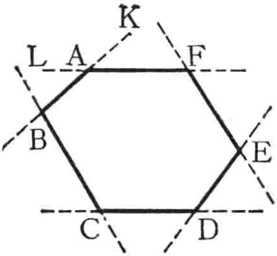


图1·3

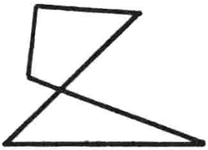


图1·4

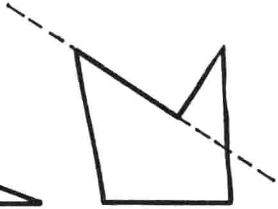


图1·5

边都在这直线的同旁，这样的多边形叫做凸多边形．图 1·3 的多边形是凸多边形，而图1·5的多边形则不是凸多边形．本书中所研究的多边形限于凸多边形．

多边形相邻两边所组成的角叫做多边形的内角（简称多边形的角），角的顶点叫做多边形的顶点．n 边多边形有 n 个内角，同时也有 n 个顶点，换句话说，多边形的边数、内角数、顶点数是相同的．多边形的一边与相邻边的反向延长线所成的角叫做多边形的外角，如图 1·3中 的 $\angle FAK$，$\angle BAL$ …等等．对应于多边形的每一个内角，都有和它互补的两个外角，这两个外角是相等的．

连结多边形的不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线，如图 1·6 中 的 AC、AD、BD、BE …等．n 边多边形的每一个顶点，除了它本身及与它相邻的两个顶点外，可以和其它的顶点连结成对角线，显然，这样的对角线有 $n-3$ 条，对整个多边形来说，它有着

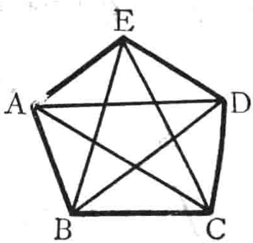


图1·6

$n(n-3)/2$ 条对角线. 注意每一条对角线联系着两个顶点，在分别计算时，它被计算了两次，因此对角线的总数是 $\frac{n(n-3)}{2}$. 同时，由每一个顶点出发的 $n-3$ 条对角线，将 n 边多边形分成 $n-2$ 个三边形.

一个多边形至少要有三条边，三边形通常叫做三角形. 容易看到，三角形一定是简单多边形，也一定是凸多边形.

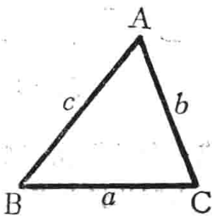


图1·7

三角形常用符号"△"来表示，例如图1·7中的三角形 ABC 就记作 $\triangle ABC$. 三角形有三条边和三个角，叫做三角形的元素. 为了方便起见，通常用小写字母 a、b、c 分别表示 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边的长.

连结三角形一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线；三角形的内角平分线与对边相交，自角的顶点到交点间的线段叫做三角形的角平分线；从三角形一个顶点到对边或其延长线引垂线，自顶点到垂足间的线段叫做三角形的高. 如图1·8，D 是 BC 的中点，AE 平分 $\angle BAC$，$AF \perp BC$，则线段 AD、AE、AF 分别是 $\triangle ABC$ 的中线、角平分线与高. 三角形有三条中线，三条角平分线和三个高，中线和角平分线都在三角形的内部，高则可能在三角形内部，也可能在三角形外（图1·9），也可能与三角形的边重合.

三角形的三条边是三个线段，那末，是不是任意三个线段都能够构成一个三角形呢？建议读者用三条分别为3、4、6厘米的木条拼拼看，结果将很容易拼成一个三角形；但如果把那条4厘米的木条截去1·5厘米，那末任凭你怎样拼凑，都拼

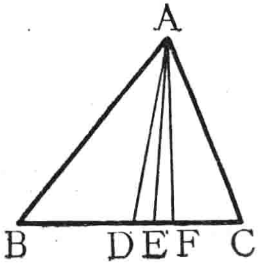


图1·8

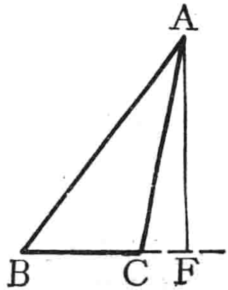


图1·9

不成一个三角形. 这是什么缘故呢?

人们从亿万次实践知道：在所有连结两点的线中，线段最短. 在$\triangle ABC$中，a是连结B、C两点的线段的长，而$b+c$则是折线BAC的长，因此，$b+c>a$. 同理，$c+a>b$, $a+b>c$. 这样就得到三角形的一个重要性质："三角形任何两边的和大于第三边". 同时，在上述的不等式中，经过移项，容易推出："三角形任何两边的差小于第三边".

在前面的第二个实验中，三条线段的长分别是2.5、3、6厘米，其中2.5与3的和不大于6(或者6与3的差不小于2.5)，难怪无法拚成一个三角形了.

这说明了一个三角形中的三条边之间是有着某些制约关系的.

§1·2 三角形的内角和

在纸上任意画一个三角形ABC，将它剪开后，如图1·10把各个角拚在一起，容易看到三个角的和是$180°$.

用几何语言来说：过C点作BA的平行线，则$\angle 1=\angle A$

(内错角)，$\angle 2=\angle B$（同位角），但 $\angle 1+\angle 2+\angle ACB=180^\circ$，所以 $\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$. 这样就已经证明了下面的定理：

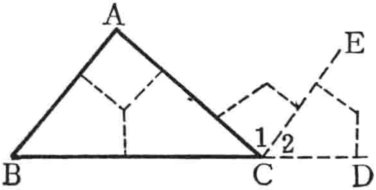


图1·10

定理 三角形三个内角的和等于180°.

这定理阐明了三角形三个内角间互相依赖的关系.

由于三角形的一个外角与它相邻内角的和等于180°，因此得到

推论1 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

其次，我们看到，三角形中不可能有二个直角或钝角，否则三角形三个内角的和便要大于二直角了，这与定理是矛盾的，因此又得到

推论2 三角形中不能有多于一个的直角或钝角.

根据三角形内角和的定理，我们可以把三角形进行分类：（1）三个角都是锐角的三角形，叫做锐角三角形；（2）有一个角是直角（其它两个角必都是锐角）的三角形，叫做直角三角形；（3）有一个角是钝角（其它两个角必都是锐角）的三角形，叫做钝角三角形.

我们知道，具有某种性质的对象全体组成一个集合，这些对象叫做集合的元素. 例如偶数的全体，三角形的全体，直角三角形的全体…都是集合. 对某一集合来讲，任何对象，或者属于这个集合，或者不属于这个集合，二者必居其一，并且不能同时成立. 如果集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$. 如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合

B 内有不属于 A 的元素，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$. 另外，把不含任何元素的集合叫做空集，常用 ϕ 来记它. 空集是任何集合的子集. 若已知两个集合 A、B，由同时属于 A 与 B 的所有元素组成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A \cap B$. 又若已知两个集合 A、B，由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合，叫做 A、B 的并集，记作 $A \cup B$.

现在来看三角形的集合 P. 明显地，锐角三角形的集合 Q_1、直角三角形的集合 Q_2、钝角三角形的集合 Q_3 都是 P 的真子集，即 $Q_1 \subset P$，$Q_2 \subset P$，$Q_3 \subset P$；并且它们之间没有共同的元素，即 $Q_1 \cap Q_2 = \phi$，$Q_2 \cap Q_3 = \phi$，$Q_3 \cap Q_1 = \phi$；同时，Q_1、Q_2、Q_3 的元素的全体组成 P，即 $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 = P$.

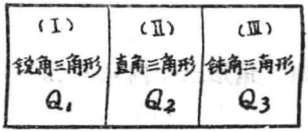


图1·11

如图1·11，用区域Ⅰ内的点表示锐角三角形，即用区域Ⅰ代表锐角三角形的集合 Q_1.（或者更通俗地说，设想Ⅰ是一个仓库的平面图，仓库内放置所有的锐角三角形.）同样，区域Ⅱ、Ⅲ分别代表直角、钝角三角形的集合 Q_2、Q_3. 这三个区域是没有共同部分的，并且它们合在一起代表三角形的集合. 这个图阐明了三角形依角分类中各类三角形之间的关系.

现在回过来从三角形内角和定理出发，研究多边形的内角和. 在§1·1中曾经指出，n 边多边形可以用由它的一个顶点出发的对角线将它分成 $n-2$ 个三角形，而这些三角形的内角的和正好是 n 边多边形的内角和. 现在把这结论写成定理的形式如下：

定理　*n 边多边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$.*

这个定理还可以用另外的方法来证明：如图1·12，在 n 边形中任意

取一点O，把它与各顶点连结起来，得到n个三角形，它们的所有内角和等于$n\cdot 180°$.但是把这n个三角形所有内角的和减去以O为顶点的各角的和（360°），正好就是n边形的内角和．因此n边形的内角和等于$n\cdot 180°-360°=(n-2)\cdot 180°$．读者还可考虑，如果在多边形的边上任取一点，并把这点和各顶点连结起来，是否也可证明？

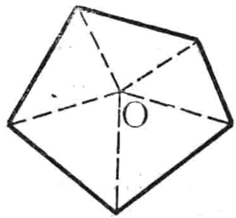


图1·12

从这里可以看到，一个定理有时可以用各种不同的方法来证明，希望读者多加思考．

现在根据前后的两个定理，解决一些计算问题．

例1　一三角形有两个内角相等，而第三角等于60°，求这三角形的两个内角的度数．

解　设这两个角的度数都是x，则

$$x+x+60°=180°$$

解之得　$x=60°$.

例2　一四边形的四个角都相等，问每个角等于几度？

解　设每个角为x度，则

$$x+x+x+x=360°$$

$$\therefore\quad x=90°.$$

如果将例2的四边形改为n边形（$n\geqslant 3$），则它的内角和为$(n-2)\cdot 180°$，由于各角都相等，所以每一个角都等于$\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

例3　一个多边形的内角和是1080°，问这个多边形是几边形？

解　设多边形的边数为n，则

$$(n-2)\cdot 180°=1080°$$

解之得　　$n=8$.

例 4　将五边形 $ABCDE$ 的各边顺次延长，得到五个外角，求这五个外角的和.

解　这五个外角与五个内角的和等于 $5\times180°$，而五个内角的和为 $(5-2)\times180°$，所以五个外角的和为 $5\times180°-(5-2)\times180°=2\times180°=360°$

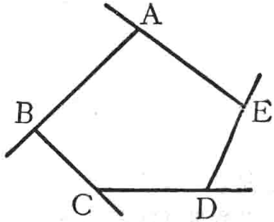


图1·13

在例 4 中，如果将五边形改为 n 边形 $(n\geqslant3)$，那末 n 个外角的和为 $n\cdot180°-(n-2)\cdot180°=360°$，结果还是一样的.

习　题　一

1.（1）试证直角三角形的两个锐角互为余角；（2）在直角三角形中，一个锐角比另一个锐角少12°，求这两个锐角的度数.

2.试证：过直线外一点，不能作两条直线和这直线垂直.

3.一个多边形的内角和等于 8 直角，求这多边形的边数.

4.某一多边形的内角和，比边数为它二倍的另一个多边形的内角和少10直角，问这多边形的边数是多少？

5.一个锐角的两条边分别与另一锐角的两条边垂直，则这两角相等.

6.$\triangle ABC$ 中，AD 为 $\angle A$ 的平分线，AH 是高，求证 $\angle DAH$ 等于 $\angle B$、$\angle C$ 之差的一半.

7.$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AD\perp BC$，求证 $\angle BAD=\angle C$，$\angle DAC=\angle B$.

8.$\triangle ABC$ 中，$\angle C>\angle B$，$\angle A$ 的外角平分线交 BC 的延长线于 D，已知 $\angle BDA=30°$，求证 $\angle C-\angle B=60°$.