

胡金德 谭泽光 考研数学系列

2016 考研数学 重点突破

220 题

(数学一)

清华大学 胡金德 主 编
清华大学 谭泽光

超值
附赠

- 考研数学 **公式小宝典** 数学(一)
- 考研数学重点、难点、易混淆点在线 **微课** 讲解
(登录北航出版社网站 www.buaapress.com.cn)



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

胡金德 谭泽光 考研数学系列

2016

考研数学
重点突破

220 题

(数学一)

清华大学

清华大学

胡金德
谭泽光

主 编



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书可供报考 2016 年研究生入学考试(数学一)的同学在冲刺阶段使用。根据考研数学一真题的题型和题量分布情况,本书最终确定题目:高等数学题 130 道;线性代数题 50 道;概率论与数理统计题 40 道,共 220 道题。所有题目及解答均由名师编写和审定,所选题目在题型和难度上紧扣大纲要求。旨在让考生对考研数学一中的重要考点有更加清楚和深刻的认识。

图书在版编目(CIP)数据

2016 考研数学重点突破 220 题. 数学一/胡金德, 谭泽光主编. —北京:北京航空航天大学出版社, 2015. 6
ISBN 978-7-5124-1813-4

I. ①2… II. ①胡… ②谭… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 144493 号

版权所有,侵权必究。

2016 考研数学重点突破 220 题(数学一)

胡金德 谭泽光 主编

责任编辑 王 实

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京宏伟双华印刷有限公司印刷 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:16 字数:458 千字

2015 年 7 月第 1 版 2015 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5124-1813-4 定价:30.80 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前 言

本书专为报考 2016 年研究生入学考试(数学一)的考生在最后冲刺阶段使用。为了使考生能在短时间内对考研数学一重要考点有更加清楚的认识,对考研数学一在试题的难度和做题的速度方面有更加精确的把握,我们通过深入分析考研数学考试大纲的要求以及近年来考研数学一命题的特点和动向,编写了本书。

针对冲刺阶段的特点,本书精心编写了 220 道题目,内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大部分,每一部分试题又分为选择题、填空题和解答题三个题型。

本书有如下特点:

一、布局精准,重点突出

针对考研数学一真题的题量分布情况:高等数学占 56%、线性代数占 22%、概率论与数理统计占 22%,本书最终确定题目:高等数学题 130 道、线性代数题 50 道、概率论与数理统计题 40 道,共 220 道题。

每一部分在选择题、填空题、解答题三种题目类型的设置上同样参考了考研真题比例,旨在让考生对考研真题的试题比例有一个清晰的认识。

同时,本书在试题所涵盖的知识点上也有所侧重,例如:数学一真题中的高等数学部分的选择题多为极限求解、二元函数微分、二重积分、级数等,而极少出现空间解析几何的题目。为此,我们在题目的设置上对重点考查的知识点出题较多,而对于极少考到的知识点出题较少,旨在让考生抓住重点,了解考研试题的动向。

二、题目精良,名师讲解

主编胡金德和谭泽光教授均为在清华大学从事几十年数学教学及十多年考研辅导的名师。两位老师均参与过考研大纲的制定、考研数学的命题及阅卷,对考研数学的命题规律和趋势有准确的把握,对试题的讲解详略得当,同时也抓住考生的心理特点,易于考生接受。

本套书,从全书体例的设定到具体题目的选取均由胡金德和谭泽光亲自主持,多人参与,并最终由两位主编定稿。所选题目在题型、难度上紧扣大纲要求。

在题目讲解部分,步骤严密独到,讲解精细,易于考生掌握。另外,在重点的题型和题目之后,两位老师还结合自身多年来的从教经验,给出独到精辟的总结。

本书附赠《考研数学公式小宝典(数学一)》,以帮助考生熟知公式及其适用范围与条件。

由于时间有限,书中难免有疏漏之处,诚望广大读者批评指正。

祝愿每位考生复习顺利,梦圆考场!

编 者

2015 年 6 月

第一部分 高等数学

一、选择题	3
二、填空题	9
三、解答题	10

第二部分 线性代数

一、选择题	18
二、填空题	20
三、解答题	20

第三部分 概率论与数理统计

一、选择题	26
二、填空题	27
三、解答题	28

习题精选答案与解析

第一部分 高等数学

一、选择题	35
二、填空题	48
三、解答题	57

第二部分 线性代数

一、选择题	108
二、填空题	112
三、解答题	115

第三部分 概率论与数理统计

一、选择题	140
二、填空题	143
三、解答题	146

后 记	166
-----------	-----

习题精选

$$E = \frac{E_c}{a} \int_{-a/L}^{+a/L} \sin(\omega t + \phi) dy$$

$$U = \frac{W_{AB}}{Q} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{Q} = |V_A - V_B|$$

$$m_e = N \cdot m_0 = \frac{Q}{v_e} \frac{M_m}{N_A}$$

第一部分 高等数学

一、选择题

【1】把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是 ()

- (A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .

【2】若当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f''(t) dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小(其中 f 有二阶连续导数),则必有 ()

- (A) $f''(0) = 1$. (B) $f''(0) = 0.5$.
(C) $f''(0) = 0$. (D) $f''(0)$ 不存在.

【3】下列函数中在 $[1, +\infty)$ 无界的是 ()

- (A) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$. (B) $f(x) = \sin x^2 + \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$.
(C) $f(x) = x \cos \sqrt{x} + x^2 e^{-x}$. (D) $f(x) = \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2}$.

【4】设 $f(x)$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = \sin 2x + 2e^x$ 的满足初始条件 $f(0) = f'(0) = 0$ 的特解,则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+f(x)]}{x^2}$ ()

- (A) 不存在. (B) 等于 0. (C) 等于 1. (D) 其他.

【5】设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^4} = -2$, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处 ()

- (A) 不可导. (B) 可导且 $f'(a) \neq 0$.
(C) 有极大值. (D) 有极小值.

【6】已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()

- (A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

【7】设函数 $f(x) = |x^3 - 1| \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 则 $\varphi(1) = 0$ 是 $f(x)$ 在

$x = 1$ 处可导的

()

(A) 充分必要条件.

(B) 必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

【8】函数 $f(x) = (x^2 - 2x - 3)|x^2 - 3x| \sin|x|$ 不可导点的个数是

()

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【9】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在二阶导数, 且 $f(x) = f(-x)$, 当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 则当 $x > 0$ 时, 有:

()

(A) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

(B) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

(C) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

(D) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

【10】设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$, 则

()

(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(1, f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.

(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(1, f(1))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标.

【11】函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 其二阶导函数的图形如图 1 所示, 则 $y = f(x)$ 的拐点的个数是

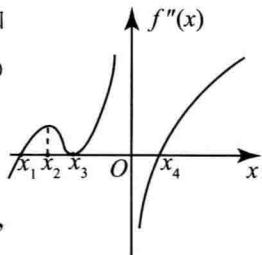
()

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.



【12】设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处满足 $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$, $f^{(n+1)}(0) > 0$, 则

()

(A) 当 n 为偶数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(B) 当 n 为偶数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(C) 当 n 为奇数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(D) 当 n 为奇数时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

【13】设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f'(x) + e^x]}{1 - \sqrt{1 + 2x}} = 0$, 则点 $x = 0$ ()

(A) 不是 $f(x)$ 的驻点.

(B) 是 $f(x)$ 的驻点但不是极值点.

(C) 是 $f(x)$ 的驻点且是极大值点.

(D) 是 $f(x)$ 的驻点且是极小值点.

【14】设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $x = a$ 处取得极大值, 则 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $x = a$ 处

()

(A) 必取极大值.

(B) 必取极小值.

(C) 不可能取极值.

(D) 是否取得极值不能确定.

【15】 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{1 - e^{-x}} = 1$, 则当 $f(0) = 0$ 时 ()

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

(D) 不能判定 $f(0)$ 是否为极值.

【16】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 内二阶可导, 且满足条件 $f(1) = f'(1) = 0, x > 1$ 时, $f''(x) < 0$, 则 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内 ()

(A) 曲线是向下凸的.

(B) 曲线是向上凸的.

(C) 单调减少.

(D) 单调增加.

【17】 若 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 内二阶可导, 且 $f(a) = A > 0, f'(a) < 0, f''(x) < 0 (x > a)$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 内 ()

(A) 没有实根.

(B) 有两个实根.

(C) 有无穷多个实根.

(D) 有且仅有一个实根.

【18】 设 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} dx dy, I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} dx dy, I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} dx dy$, 其中 D 由不等式 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 所确定, 则 ()

(A) $I_2 < I_3 < I_1$.

(B) $I_1 < I_2 < I_3$.

(C) $I_3 < I_1 < I_2$.

(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

【19】 函数 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\cos t} \cos t dt$ ()

(A) 为正数.

(B) 为负数.

(C) 恒为零.

(D) 不是常数.

【20】 已知 $f(\pi) = 2, \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$, 则 $f(0)$ 等于 ()

(A) 2.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 不确定.

【21】 下列广义积分发散的是 ()

(A) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx.$ (B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ (C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$ (D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

【22】 今有下列关于反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的四个命题:

① 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的奇函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 必收敛, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$.

② 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k f(x) dx$ 存在, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 必收敛, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k f(x) dx.$$

③ 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ 都发散, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx$ 未必发散.

④ 若 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 都发散, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 未必发散.

其中真命题的个数是

()

(A) 1 个.

(B) 2 个.

(C) 3 个.

(D) 4 个.

【23】 设 $f(x)$ 一阶可导, $f(x) > 0, f'(x) > 0$, 则当 $\Delta x > 0$ 时

()

(A) $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt > f(x)\Delta x > 0$.

(B) $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt < f(x)\Delta x < 0$.

(C) $f(x)\Delta x > \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt > 0$.

(D) $f(x)\Delta x < \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt < 0$.

【24】 旋轮线的一支 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的质心是

()

(A) $(\pi a, \frac{4}{3}a)$.

(B) $(\pi a, \frac{2}{3}a)$.

(C) $(\pi a, \frac{5}{4}a)$.

(D) $(\pi a, \frac{7}{4}a)$.

【25】 在空间曲线 $\begin{cases} x = t, \\ y = -t^2, \\ z = t^3 \end{cases} t \in \mathbf{R}$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线

()

(A) 只有一条.

(B) 只有两条.

(C) 至少有三条.

(D) 不存在.

【26】 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线

$\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

()

(A) 相交于一点.

(B) 重合.

(C) 平行但不重合.

(D) 异面.

【27】 已知 $f_x(x_0, y_0)$ 存在, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)}{h} =$

()

(A) $f_x(x_0, y_0)$.

(B) 0.

(C) $2f_x(x_0, y_0)$.

(D) $\frac{1}{2}f_x(x_0, y_0)$.

【28】 设函数 $f(x)$ 可导, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y = 2 - x$ 垂直, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在点 $x = x_0$ 处的增量 Δy 是

()

(A) 与 Δx 同阶但不等价的无穷小.

(B) 与 Δx 等价的无穷小.

(B) 比 Δx 高阶的无穷小.

(D) 比 Δx 低阶的无穷小.

【29】二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

()

(A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0.$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$

(C) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$ 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0.$

【30】下列命题正确的是

()

(A) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的驻点.

(B) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的驻点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的极值点.

(C) 若 (x_0, y_0) 为有界闭区域 D 上连续的函数 $f(x, y)$ 在 D 内部唯一的极值点, 且 $f(x, y)$ 在该点取极大值, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得它在 D 上的最大值.

(D) 若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值.

【31】设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, 三重积分

$\iiint_{\Omega} z^2 dv$ 在球坐标系下化为累次积分是

()

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi \cos^2\varphi dr.$

(B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi \cos^2\varphi dr.$

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin\varphi \cos\varphi dr.$

(D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin\varphi \cos\varphi dr.$

【32】对无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 下列命题成立的是

()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少一个收敛.

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少一个发散.

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【33】设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列积分小于零的是 ()

- (A) $\int_{\Gamma} f(x, y) dx$. (B) $\int_{\Gamma} f(x, y) dy$.
(C) $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$. (D) $\int_{\Gamma} f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$.

【34】在力场 $F = \frac{y^3 - x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的作用下, 一质点沿圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 逆时针运动一周所作的功为 ()

- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{3\pi}{2}$. (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $-\frac{3\pi}{2}$.

【35】设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 则下列命题正确的是 ()

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.
(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.
(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.
(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

【36】设 $u_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 则下列结论正确的是 ()

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 收敛.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

【37】设 $a_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n} \quad ()$$

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 敛散性与 λ 有关.

【38】已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = 2$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ ()

- (A) 3. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

【39】 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ 为二阶非齐次线性方程 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ 的三个线性无关解, 则该方程的通解为 ()

- (A) $C_1[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] + C_2\varphi_3(x)$.
 (B) $C_1[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] + C_2\varphi_3(x)$.
 (C) $C_1[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] + C_3[\varphi_1(x) - \varphi_3(x)]$.
 (D) $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x)$, 其中 $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

【40】 设二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + by' + y = 0$ 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0, +\infty)$ 上有界, 则实数 b 的取值范围是 ()

- (A) $[0, +\infty)$. (B) $(-\infty, 0)$.
 (C) $(-\infty, 4]$. (D) $(-\infty, +\infty)$.

二、填空题

【41】 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【42】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【43】 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【44】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{\sin x} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

【45】 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【46】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3+x^2)\sin \frac{1}{x} - \cos x}{x^2 [\ln(1+x) - \ln x]} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【47】 设 $a_n = 3 \int_0^{\frac{n+1}{n}} x^{2n-1} \sqrt{1+x^{2n}} dx$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \underline{\hspace{2cm}}.$

【48】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f(0)=1, f'(0)=3$, 则数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\frac{1}{1-\cos \frac{1}{n}}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【49】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} + \sqrt{1 - \cos \frac{4\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 - \cos \frac{2n\pi}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【50】 设 $f(x)$ 连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 + 1 - \cos t) f(t) dt$ 是与 x^3 等价的无穷小量, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【51】 已知 $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{2k-1} + mx^2 + nx}{x^{2k} + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $m = \underline{\hspace{1cm}}, n = \underline{\hspace{1cm}}$.

【52】 若函数 $f(x) = \frac{e^{2x-3} - n}{2(2x-m)(x-2)}$ 有无穷间断点 $\frac{3}{2}$, 可去间断点 2, 则 $m = \underline{\hspace{1cm}}$, $n = \underline{\hspace{1cm}}$.

【53】 对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(\rho, \theta) = (e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

【54】 设 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内二阶可导, 且在 $x=1$ 处与曲线 $y = x^3 - 3$ 相切, 在 $(0, +\infty)$ 内与曲线 $y = x^3 - 3$ 有相同的凹凸性, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有 $\underline{\hspace{1cm}}$ 个实根.

【55】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 则

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 f(t) dt + (1-x)f(x) \right] dx = \underline{\hspace{1cm}}.$$

【56】 反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \underline{\hspace{1cm}}.$

【57】 经过两个平面 $\pi_1: x + y + 1 = 0, \pi_2: x + 2y + 2z = 0$ 的交线, 并且与平面 $\pi_3: 2x - y - z = 0$ 垂直的平面方程是 $\underline{\hspace{1cm}}.$

【58】 设 $a_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2017$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的和为 $\underline{\hspace{1cm}}.$

【59】 已知 $f(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上连续, 对任意的正整数 n 恒有 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$, 其中 a_0, a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{1cm}}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \underline{\hspace{1cm}}.$

【60】 已知 $y' + p(x)y + q(x) = 0$ 的特解为 $y_1 = \frac{1}{e^{x^2}} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1 \right), y_2 = \frac{1}{e^{x^2}} \left(\frac{1}{3}x^2 + 4 \right)$, 则该方程通解为 $\underline{\hspace{1cm}}.$

三、解答题

【61】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)}{(1-\cos x)\ln(1-\sin^2 x)}.$

【62】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{e^x-1}{1-\cos x}}.$

【63】 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2}.$

【64】已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right]^{\frac{1}{\sin x}} = e^3$, 求 $\frac{f(x)}{x^3}$.

【65】确定 a 与 b 的值, 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sqrt{x^4 + ax} - \frac{(x^3 + x^2 + \frac{3}{2}bx)}{\sqrt{x}e} \right] = \frac{1}{4}.$$

【66】已知常数 $a > 0, bc \neq 0$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^a \ln \left(1 + \frac{b}{x} \right) - x \right] = c,$$

求 a, b, c .

【67】设 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^p(1-x) \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt$ 存在且不为 0, 求常数 p 的值及该极限值.

【68】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} \right]$.

【69】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot \cdots \cdot (2n)^2}$.

【70】求解下列极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2 + n} \right).$$

【71】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot n!} x^n}{\int_0^x \sqrt[3]{e^t} dt}$.

【72】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$.

【73】设 $f'(x)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0, F(x) = \int_0^x t^2 f(t^3 - x^3) dt$, 若 $x \rightarrow 0$, 则

$F(x) \sim \arctan x^n$, 求 n 及 $f'(0)$.

【74】设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$, 求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

【75】设函数 $f_n(x) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^2 + x$.

(I) 求证: 对每个正整数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 存在唯一的正根 x_n ;

(II) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【76】已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在

点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

【77】设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{t^2} - e^t) dt}{x \sin x - x \tan x}$.

【78】已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}},$$

求 $f(x)$.

【79】设函数 $f(x)$ 在 $x \leq x_0$ 时有定义, 且二阶导数存在. 问如何选择 a, b, c , 可使下面函数有二阶导数存在:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & x > x_0. \end{cases}$$

【80】设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都可导, 且 $F(x) = g(x) |f(x)|$, 求证:

(I) 当 $f(x_0) \neq 0$ 时, $F(x)$ 在点 $x = x_0$ 处必可导;

(II) 当 $f(x_0) = 0$ 时, $F(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f'(x_0)g(x_0) = 0$.

【81】求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的曲率半径.

【82】设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(I) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^3 = 0$ 变为 $y = y(x)$ 所满足的微分方程;

(II) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

【83】设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 都是常数且 $|a| \neq |b|$.

(I) 证明: $f(x) = -f(-x)$;

(II) 求 $f^{(n)}(x)$.

【84】设 $f'(-x) = x[f'(x) - 1]$, 且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$ 的极值.

【85】已知方程 $\sin^3 x \cos x = a (a > 0)$, 试讨论其在区间 $0 \leq x \leq \pi$ 上实根的个数.

【86】设曲线 L 是 $y = -x^2 + 1$ 在第一象限内的部分. 在 L 上求一点 M , 使过 M 点 L 的切线 AB 与两坐标轴和 L 所围成的图形的面积为最小.

【87】已知, 当 $|x| < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + a[f'(x)]^2 = g(x)$, 且 $f'(0) = 0$, 其中常数 $a > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $|x| < 1$ 可导且 $g(0) = 0, g'(0) > 0$, 试确定 $f(0)$ 是不是函数