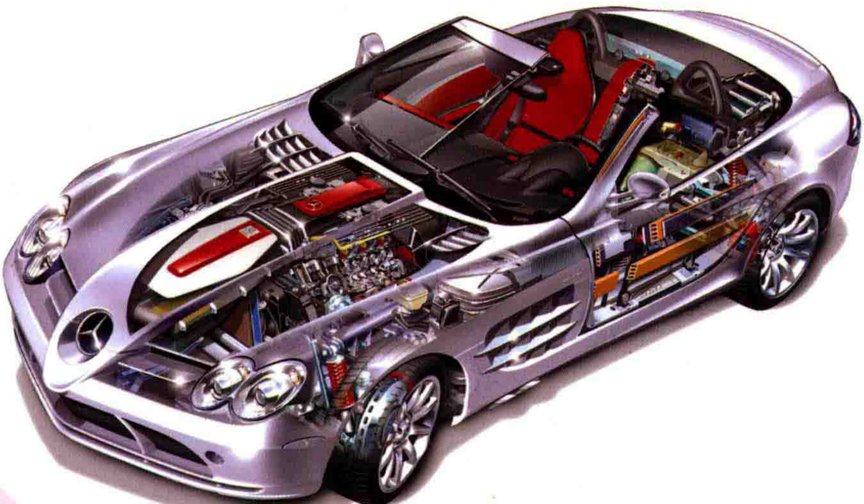
交通运筹学

普通高等教育交通类专业规划教材

张文会　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育交通类专业规划教材

交通运筹学

主　编　张文会
副主编　李昕光　白竹
参　编　马丽丽

机械工业出版社

本书系统地介绍了交通运筹学的基本理论和方法，特别注重运筹学在交通运输领域的实际应用。全书通过案例来说明基本概念，每章附有习题，供学生课后复习。主要内容包括：线性规划、线性规划的对偶理论和灵敏度分析、整数规划、运输与指派问题、目标规划、动态规划、网络模型、排队论、决策论、博弈论、网络计划技术。

本书可作为高等学校交通工程、交通运输、物流管理、汽车服务工程等专业的本科生教材，也可作为研究生教学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

交通运筹学/张文会主编. —北京：机械工业出版社，2014.5
普通高等教育交通类专业规划教材
ISBN 978-7-111-46552-2

Ⅰ.①交… Ⅱ.①张… [redacted]—应用—交通运输管理—高等学校—教材 Ⅳ.①F502

中国版本图书馆 CIP[redacted]数据核字[redacted]第08642[redacted]号

机械工业出版社（北[redacted]市百[redacted] 邮政[redacted]码 100037）
策划编辑：赵海青 责任[redacted]：赵海青
版式设计：常天培 责任校对：刘志文
封面设计：马精明 责任印制：李 洋
北京宝昌彩色印刷有限公司印刷
2014年11月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 15印张 · 361千字
0001—2500册
标准书号：ISBN 978-7-111-46552-2
定价：38.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

交通运筹学是为交通运输管理决策提供定量依据的应用科学，其特点是将交通管理中出现的实际问题归纳为抽象的数学模型，综合运用数学方法或计算机工具对模型进行求解，得到解决问题的最优或满意方案。实践证明，运筹学理论在某一系统或某一领域的成功应用，会为管理者提供科学合理的决策参考。因此，交通运筹学是交通管理人才必备的基本知识。

本书是在讲授“交通运筹学”课程的基础上，参照自编的讲义以及相关教材而编写的，所选例题更贴近交通运输工程实际。同时，编者力求各章节内容间的有机联系，理顺和整合部分内容，构成符合教学大纲的理论体系和知识结构。每章末均编写了适量的习题，以便于学生课后复习，巩固所学知识，有的习题还对正文的教学内容作了适当的引申。

本书共分11章，包括线性规划、线性规划的对偶理论和灵敏度分析、整数规划、运输与指派问题、线性目标规划、动态规划、网络模型、排队论、决策论、博弈论和网络计划技术。

本书由张文会任主编，李昕光、白竹任副主编。编写人员和分工：张文会（东北林业大学）编写了第1章、第2章和第3章；马丽丽（佳木斯大学）编写了第4章、第5章和第6章；李昕光（东北林业大学）编写了第7章和第8章；白竹（黑龙江工程学院）编写了第9章、第10章和第11章。研究生罗文文和魏文博也参加了本书稿部分章节的打印和文字校对工作。

在本书的编写过程中参考了大量的国内外文献，在此向所引文献的作者表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中难免存在疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2013年8月

目录

第 1 章　线 性 规 划

1.1　线性规划及其数学模型

线性规划（Linear Programming，LP）是在一组约束条件（既定要求）下寻找一个目标函数（衡量指标）的极值。线性规划是运筹学中较为成熟和应用广泛的一个重要分支，计算方法较为成熟，借助计算机可求解众多变量和约束条件的线性规划问题，计算更为方便。下面用实例来说明什么是线性规划问题以及线性规划问题的数学表达式。

在生产管理和经营活动中经常遇到一类问题，即在现有的资源条件下，如何组织安排生产，以获得最好的经济效益（求极大化问题）。

【例 1.1】 某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品。这些产品需要在设备 A 上加工，需要消耗材料 B、C，按工艺资料规定，生产单位产品所需的设备台时及 B、C 两种原材料的消耗如表 1-1 所示。已知在计划期内设备的加工能力为 150 台时，可供材料分别为 300kg、320kg；每生产一件甲、乙产品，工厂可获得利润分别为 50 元、40 元。假定市场需求无限制，工厂决策者应如何安排生产计划，使工厂在计划期内总的利润最大。

表 1-1　产品资源消耗

消耗 \ 产品	甲	乙	现有资源
设备 A/台时	4	3	150
材料 B/kg	7	5	300
材料 C/kg	5	6	320
利润/(元/件)	50	40	

解： 这样一个规划问题可用数学语言来描述，即可以用数学模型表示。假设在计划期内生产这两种产品的产量为待定的未知数 x_1、x_2，称为决策变量。产品生产得越多，获利就越多，但产量要受到设备和生产能力的限制，这种能力的限制就是约束条件。计划期内设备 A 的有效台时是 150，这是一个限制产量的条件，在安排产品甲、乙产量时，要考虑不得超过设备 A 的有效台时，这个条件可用不等式 $4x_1+3x_2\leqslant 150$ 来表示；材料消耗总量不得超过供应量，应有 $7x_1+5x_2\leqslant 300$，$5x_1+6x_2\leqslant 320$。生产的产量不能小于零，即 $x_1\geqslant 0$、$x_2\geqslant 0$，这个条件称为决策变量的非负要求。用 Z 表示利润，则有 $Z=50x_1+40x_2$，这个式子就是目标函数。该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下使利润达到最大，即目标函数达到最大值，用数学表达式描述为 $\max Z=50x_1+40x_2$。综合上述，这个问题的数学模型可归纳为：

$$\max Z=50x_1+40x_2$$

$$\begin{cases}4x_1+3x_2\leqslant 150\\7x_1+5x_2\leqslant 300\\5x_1+6x_2\leqslant 320\\x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\end{cases}$$

在上面的例题中 x_j 称为决策变量，不等式组称为约束条件，函数 Z 称为目标函数。随着讨论问题的要求不同，Z 可以是求最大值（如例 1.1），也可以是求最小值（如例 1.2），因为 Z 是 x_j 的线性函数，Z 的最大值也是极大值，最小值也是极小值，所以有时也将 $\max Z$ 与 $\min Z$ 说成求 Z 的极大值与极小值。

线性规划的数学模型由决策变量、目标函数与约束条件三个要素构成，其特征是：

1）解决问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，求最大值或最小值。

2）解决问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

由例 1.1 可知，一个生产计划问题可用线性规划模型来描述。求出 x_1、x_2 的值（即最优解），使目标函数达到最大值，就得到一种最优生产计划方案。

此外，线性规划通常也解决资源的最优利用、设备的最佳运行等问题，即在给定目标下，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源（如资金、设备、原材料、时间等）去实现这个目标（求极小化问题）。

【例 1.2】 靠近某河流有两个化工厂（见图 1-1），流经第一个化工厂的河流流量为 $4\times10^6 m^3$/天，在两个工厂之间有一条流量为 $2\times10^6 m^3$/天的支流。第一化工厂每天排放含有浓 H_2SO_4 的工业污水 $2.5\times10^4 m^3$，第二化工厂每天排放这种工业污水 $1.6\times10^4 m^3$。已知从第一化工厂排出的工业污水流到第二化工厂以前有 25% 可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于 0.2%。因此，这两个工厂都需各自处理一部分工业污水。第一化工厂处理工业污水的成本是 1000 元/$10^4 m^3$，第二化工厂处理工业污水的成本是 800 元/$10^4 m^3$。问在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业污水，使得这两个工厂总的处理工业污水费用最小。

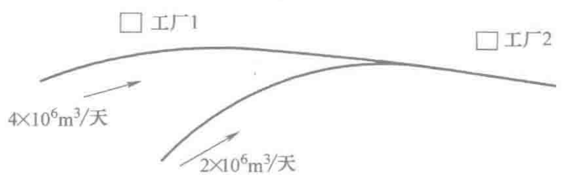


图 1-1

解： 设 x_1、x_2 分别为第一个和第二个化工厂每天应处理工业污水的量。

根据河流中工业污水的含量应不大于 0.2% 的要求，可建立以下不等式：

$$(2.5-x_1)/400\leqslant 2/1000$$

$$[0.75\times(2.5-x_1)+(1.6-x_2)]/600\leqslant 2/1000$$

由于每个工厂每天处理的工业污水量不会大于每天的排放量，故有：

$$x_1\leqslant 2.5,x_2\leqslant 1.6$$

经整理，得到下列线性规划模型：

$$\min Z=1000x_1+800x_2$$

$$\begin{cases}x_1\geqslant 1.7\\0.75x_1+x_2\geqslant 2.275\\x_1\leqslant 2.5\\x_2\leqslant 1.6\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

分析上述例题可知：线性规划是研究线性约束条件下线性目标函数的极大值或极小值问题的数学理论和方法；线性规划的数学模型由决策变量、目标函数与约束条件三个要素构

成。线性规划数学模型的一般表达式可写成为：

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_m \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

为了书写方便，上式也可写成：

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_i, i = 1, 2, \cdots, n \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

在实际中一般 $x_j \geqslant 0$，但有时候 $x_j \leqslant 0$ 或 x_j 无符号限制。

在线性规划的数学模型中，c_j 称为价值系数，a_{ij}称为工艺系数，b_i 称为资源限量。

1.2 图 解 法

图解法是直接在平面直角坐标系中作图来解线性规划问题的一种方法。这种方法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理，但它不是解线性规划问题的主要方法，只适合于求解两个变量的线性规划问题。

图解法的步骤：

1）可行域的确定。分别求出满足每个约束包括变量非负要求的区域，其交集就是可行解集合，称为可行域。

2）绘制目标函数等值线。先过原点作一条向量指向点（c_1，c_2），向量的方向就是目标函数增加的方向，称为梯度方向，再作一条与矢量垂直的直线，这条直线就是目标函数等值线。

3）求最优解。依据目标函数求最大或最小值来移动目标函数等值线，该直线与可行域边界相交的点对应的坐标就是最优解。一般情况下，求最大值时该直线沿着向量方向移动，求最小值时该直线沿着向量的反方向移动。

【例 1.3】 用图解法求解下列线性规划问题：

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：1）确定可行域。令三个约束条件为等式，得到三条直线，在第一象限画出满足三个不等式的区域，其交集就是可行域。

2）绘制目标函数等值线。将目标函数的系数组成一个坐标点（1，1），过原点 O 作一条向量指向点（1，1），矢量长度不限，矢量的斜率保持 1，再作一条与向量垂直的直线，这条直线就是目标函数等值线，该直线的位置任意，如果其通过原点，则目标函数值 $Z=0$，如图 1-2 所示。

3）求最优解。图 1-2 的向量方向是目标函数增加的方向或称为梯度方向，在求最大值时目标函数等值线沿着梯度方向平行移动（求最小值时将目标函数等值线沿着梯度方向的反方向平行移动），直到可行域的边界，停止移动，其交点对应的坐标就是最优解。如图 1-2所示，最优解 $X=\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$，目标函数的最大值 $Z=\frac{40}{3}$。

上例中求解得到问题的最优解是唯一的，但对于一般线性规划问题，求解结果还可能出现以下几种情况：

（1）多重最优解（无穷多最优解）

【例 1.4】 将例 1.3 的目标函数改为 $\max Z=4x_1+2x_2$，约束条件不变，则表示目标函数中以参数 Z 的这组平行直线与约束条件 $2x_1+x_2\leqslant 20$ 的边界线平行。平行移动目标函数直线与可行域相交于线段 AB，则线段 AB 上任意点都是最优解，如图 1-3 所示，即最优解不唯一，有无穷多个，称为多重解。最优解的通解可表示为 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$。

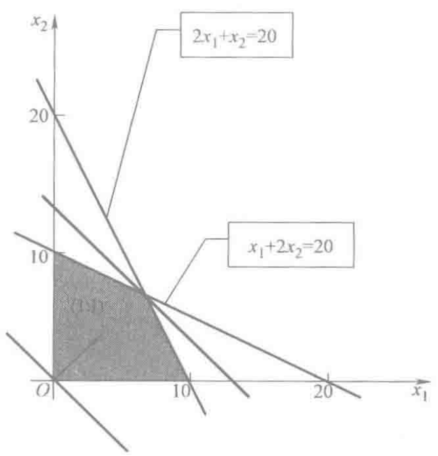


图 1-2

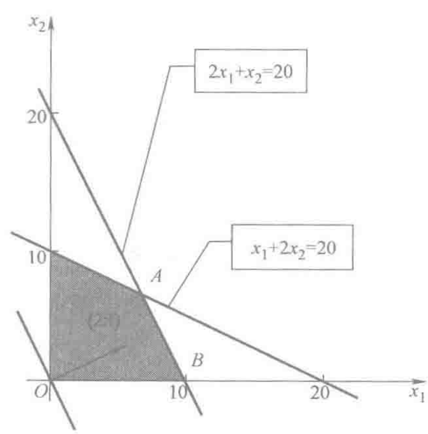


图 1-3

（2）无界解

【例 1.5】 将例 1.3 的约束条件改为 $\begin{cases} x_1+2x_2\geqslant 20 \\ 2x_1+x_2\geqslant 20 \\ x_1, x_2\geqslant 0 \end{cases}$，目标函数不变，则可行域如图 1-4 所示，目标函数增加的方向与例 1.3 相同，A 点是最小值点，要达到最大值，目标函数值可在可行域中沿梯度方向继续平移直到无穷远，x_1、x_2 及 Z 都趋于无穷大（无上界），这种情形称为无界解，即为无最优解。

（3）无可行解　在例 1.3 的数学模型中增加一个约束条件 $x_1+x_2\geqslant 30$，则该问题的可行域为空集，如图 1-5 所示，即无可行解，因此该问题也就不存在最优解。

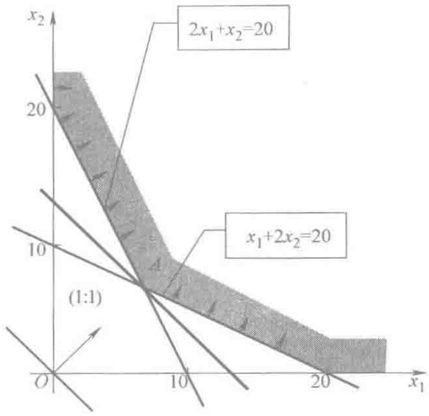


图 1-4

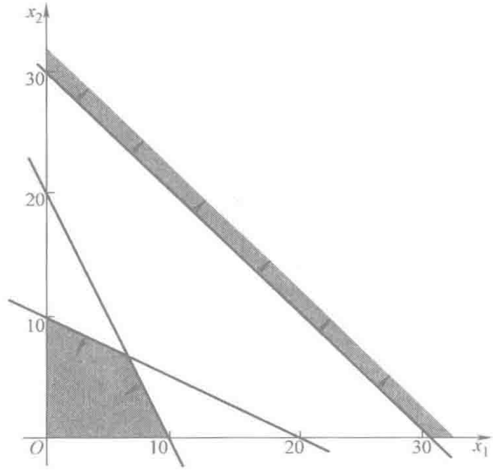


图 1-5

通过以上例题分析，可将图解法得出线性规划问题解的几种情况归纳为如下表 1-2 所示。

表 1-2　线性规划解的几种情况

解的几种情况	约束条件图形特点	数学模型特点
唯一最优解	一般围成有界可行域，且只在一个顶点得到最优值	
多重最优解	在围成有界可行域的边界上，至少在两个顶点处得到最优值	目标函数和某一约束条件成比例
无可行解（无解）	围不成可行域	有矛盾的约束条件
无界解（无解）	围成无界可行域，且无有限最优值	缺乏必要的约束条件

1.3　线性规划的单纯形法

1.3.1　线性规划的标准型

线性规划问题有各种不同的形式。对目标函数，有的要求实现最大化，有的要求最小化；约束条件可以是“≥”形式的不等式，也可以是“≤”形式的不等式，也可以是等式；决策变量通常是非负约束，但也允许在（$-\infty$，∞）范围内取值，即无约束。在用单纯形法求解线性规划问题时，为了讨论问题方便，需将线性规划模型变换为统一的标准形式。线性规划问题的标准型为：

1）目标函数求最大值（也可以求最小值）。

2）约束条件均为等式方程。

3）变量 x_j 为非负。

4）常数 b_i 都大于或等于零。

数学模型可表示为：

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m}x_n = b_n \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n; b_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

或写成下列形式：

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n; b_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

用向量和矩阵表示该线性规划问题，可以使数学模型更简洁，即：

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n; \boldsymbol{b}_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \boldsymbol{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

$\boldsymbol{A}$——约束方程的 $m \times n$ 维系数矩阵，一般 $m \leqslant n$，且 A 的秩为 m，记为 $r(A) = m$；

$\boldsymbol{b}$——资源向量；

$\boldsymbol{C}$——价值向量；

$\boldsymbol{X}$——决策变量向量。

实际问题提出的线性规划问题的数学模型都应变换为标准型后求解。以下讨论如何变换为标准型的问题。

1）若要求目标函数实现最小化，即 $\min Z = \boldsymbol{CX}$。这时只需将目标函数最小化变换为目标函数最大化，即令 $Z' = -Z$，于是得到 $\max Z' = -\boldsymbol{CX}$。

2）若约束方程为不等式。这里有两种情况：一种是约束方程为“≤”不等式，则可在不等式的左端加入非负松弛变量，把原不等式变为等式；另一种是约束方程为“≥”不等式，则可在不等式的左端减去一个非负剩余变量（也称松弛变量），把原不等式变为等式。

3）若变量不满足 $x_j \geqslant 0$。这里也有两种情况：一种是 $x_j \leqslant 0$，可令 $x_j' = -x_j$，用 $-x_j'$代替 x_j；另一种是 x_j 无约束，可令 $x_j = x_j' - x_j''$，用 $x_j' - x_j''$代替 x_j，其中 $x_j' \geqslant 0$，$x_j'' \geqslant 0$。

4）若 $b_i \leqslant 0$。这时只需将约束方程两边同时乘以 -1。

下面举例说明。

【例 1.6】 将下述线性规划问题变换为标准型。

$$\min Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{为无约束} \end{cases}$$

解

1）用 $x_4 - x_5$ 替换 x_3，其中 x_4，$x_5 \geqslant 0$。

2）在第一个约束不等式“≤”号的左端加入松弛变量 x_6。

3）在第二个约束不等式“≥”号的左端减去剩余变量 x_7。

4）令 $Z' = -Z$，把求 $\min Z$ 改为求 $\max Z'$。得到该问题的标准型为：

$$\max Z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.3.2 线性规划的有关概念

已知线性规划的标准型为：

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}$$

（1）基　式中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$m \leqslant n$ 且 $r(\boldsymbol{A}) = m$，显然 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $m \times m$ 阶子矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $r(\boldsymbol{B}) = m$。$\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $m \times m$ 阶非奇异子矩阵（$|\boldsymbol{B}| \neq 0$），则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划的一个基（或基矩阵）。当 $m = n$ 时，基矩阵唯一，当 $m < n$ 时，基矩阵就可能有多个，但最多不超过 C_n^m。

【例 1.7】 已知线性规划

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 5 \end{cases}$$

求其所有基矩阵。

解　约束方程的系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 2×5 矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = 2$，则其子矩阵为 $C_5^2 = 10$ 个，其中第 1 列和第 3 列构成的 2 阶矩阵不是一个基，基矩阵为以下 9 个：

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 基向量、非基向量、基变量、非基变量　当确定某一子矩阵为基矩阵时，则基矩阵对应的列向量称为基向量，其余列向量称为非基向量，基向量对应的变量称为基变量，非基向量对应的变量称为非基变量。

基变量和非基变量是针对某一确定基而言的，不同的基对应的基变量和非基变量不同。例 1.7 中 $\boldsymbol{B}_1$ 的基向量是 $\boldsymbol{A}$ 中的第 1 列和第 2 列，其余列向量是非基向量，x_1、x_2 是基变量，x_3、x_4、x_5 是非基变量；$\boldsymbol{B}_2$ 的基向量是 $\boldsymbol{A}$ 中的第 1 列和第 4 列，其余列向量是非基向量，x_1、x_4 是基变量，x_2、x_3、x_5 是非基变量。

(3) 基本解　对某一确定基 $\boldsymbol{B}$，令非基变量等于零，利用约束条件 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解出基变量，则这组解称为基 $\boldsymbol{B}$ 的基本解。例 1.7 中对于 $\boldsymbol{B}_9$ 而言，$\boldsymbol{X}=(0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 2)$ 是其基本解。

(4) 可行解　满足约束条件的解 $\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为可行解。

(5) 最优解　满足目标函数的可行解称为最优解，即使得目标函数达到极值的可行解就是最优解。

(6) 基本可行解　满足非负条件的基本解称为基本可行解（也称基可行解）。在例 1.7 中，$\boldsymbol{X}=(0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 2)$ 既是基本解，又满足条件 $x_j\geqslant 0$，则其是一个基本可行解。

(7) 基本最优解　最优解是基本解称为基本最优解。例 1.7 中 $\boldsymbol{X}=\left(\dfrac{3}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 8\right)^{\mathrm{T}}$ 是最优解，同时又是 $\boldsymbol{B}_3$ 的基本解，因此它是基本最优解。

当最优解唯一时，最优解也是基本最优解。当最优解不唯一时，则最优解不一定是基本最优解。

(8) 可行基与最优基　基可行解对应的基称为可行基，基本最优解对应的基称为最优基。最优基也是可行基。

基本解、可行解、最优解、基本可行解、基本最优解的关系如图 1-6 所示。箭尾的解一定是箭头的解，否则不一定成立。

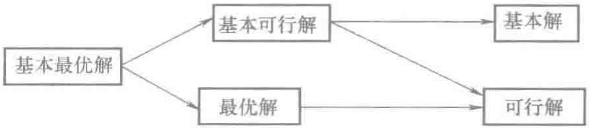


图 1-6

1.3.3　线性规划的几何意义

在 1.2 节介绍图解法时，已直观地看到可行域和最优解的几何意义，在此从理论上进一步讨论。

(1) 凸集　设 K 是 n 维空间的一个点集，对任意两点 $X^{(1)}$、$X^{(2)}\in K$，当 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ 时，则称 K 为凸集。

从直观上讲，凸集没有凹入部分，其内部没有空洞。实心圆、实心球体、实心立方体等都是凸集，圆环不是凸集。图 1-7a 所示是凸集，图 1-7b 所示不是凸集。任何两个凸集的交集是凸集，如图 1-7c 所示。

(2) 凸组合　设 X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $\cdots$, $X^{(K)}$ 是 $R^{(n)}$ 中的一点，若存在 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, 且 $\lambda_i\geqslant 0$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{K}\lambda_i=1$，使得 $X=\sum\limits_{i=1}^{K}\lambda_i X_i$ 成立，则称 X 为 $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $\cdots$, $X^{(K)}$ 的凸组合。

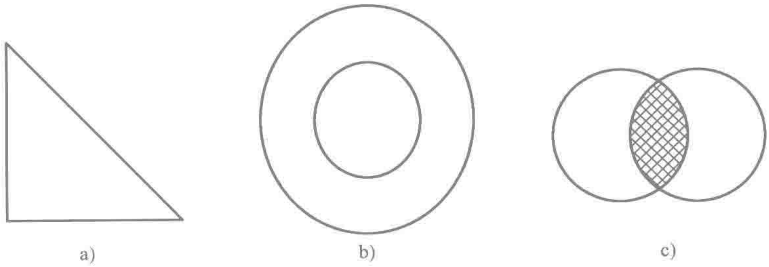


图 1-7

(3) 极点　设 K 是凸集，$X \in K$，若 X 不能用 K 中两个不同的点 $X^{(1)}$，$X^{(2)}$ 的凸组合表示为：

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

则称 X 是 K 的一个极点（或顶点）。

X 是凸集 K 的极点，即 X 不可能是 K 中某一线段的内点，只能是 K 中某一线段的端点。

(4) 几个定理

【定理 1.1】 若线性规划的可行解 K 非空，则 K 是凸集。

【定理 1.2】 若线性规划的可行解集合 K 的点 X 是极点，其充要条件为 X 是基本可行解。

【定理 1.3】 若线性规划有最优解，则最优解一定可以在可行解集合的某个极点上得到。

定理 1.1 描述了可行解集的几何特征。

定理 1.2 描述了可行解集的极点与基本可行解的对应关系。极点是基本可行解，基本可行解在极点上，但它们并非一一对应，可能有两个或几个基本可行解对应于同一个极点（退化基本可行解）。

定理 1.3 描述了最优解在可行解集中的位置。若最优解唯一，则最优解只能在某一极点上达到；若具有多重最优解，则最优解是在某些极点上的凸组合。因此，最优解是可行解集的极点或界点，不可能是可行解集的内点。

由定理 1.2 和定理 1.3 可知，线性规划的最优解是在有限个基本可行解中求得的，这样我们可以找到一种解题方法：先求出可行域的所有顶点，然后计算这些顶点的目标函数值，取最大的值为最优值，其相应的顶点坐标就是最优解。但当 m、n 较大时，这种方法是不可行的。

综上所述，若线性规划的可行解集非空且有界，则一定有最优解；若可行解集无界，则线性规划可能有最优解，也可能没有最优解。若线性规划具有无界解，则可行域一定无界。

1.3.4　普通单纯形法

单纯形法是求解线性规划问题最主要的一种方法。根据上述线性规划问题的基本定理可知，目标函数的最大值在可行域的某一个顶点达到，而且顶点个数有限。单纯形法的指导思想就是先任取一个顶点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，代入目标函数得 Z_1，然后在顶点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的基础上换一个顶点 $\boldsymbol{X}^{(2)}$，使得 $Z_2 > Z_1$，这样一次次迭代，经有限个步骤就可求得使目标函数达到最大值的点，于是就得到线性规划问题的最优解，这种迭代过程就是从一个顶点移动到另一个邻近顶点的

过程。

【例 1.8】 用单纯形法求下列线性规划的最优解：

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 40 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 30 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解

1）变换为标准型

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

2）找初始基本可行解　该问题的系数矩阵为：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 中第 3 列和第 4 列组成二阶单位矩阵 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{B}_1) = 2$，则 $\boldsymbol{B}_1$ 是一个初始基，由此得到一个初始基本可行解为 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (0, 0, 40, 30)^{\mathrm{T}}$。

3）检验 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 是否为最优解　分析目标函数 $\max Z = 3x_1 + 4x_2$ 可知，非基变量 x_1，x_2 的系数都是正数，若 x_1，x_2 为正数，则 Z 值就会增加。所以 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 不是该问题的最优解。因此，只要在目标函数的表达式中还存在有正系数的非基变量，目标函数值就有增加的可能，就需要将非基变量与基变量进行对换，即可行解必须从该顶点移到另一个顶点。判别线性规划问题是否达到最优解的数称为检验数，记为 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, n)$。本例中 $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = 4$，$\lambda_3 = 0$，$\lambda_4 = 0$。

检验数：目标函数用非基变量表示，其变量的系数为检验数。

4）第一次换基迭代　在此需要选择一个 $\lambda_k > 0$ 的非基变量 x_k 换成基变量，称为进基变量，同时选择一个能使所有变量非负的基变量 x_i 换成非基变量，称为出基变量。

一般选择 $\lambda_k = \max\{\lambda_j \mid \lambda_j > 0\}$ 对应的 x_k 进基，本例中 x_2 进基。由于 x_2 进基，必须要从原基变量 x_3、x_4 中选择一个换出作为非基变量，并且使得新的基本解仍然可行。由约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

知，当 $x_1 = 0$ 时，可得到如下不等式组

$$\begin{cases} x_3 = 40 - x_2 \geqslant 0 \\ x_4 = 30 - 3x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

因此 x_2 只有选择 $x_2 = \min(40, 10) = 10$ 时，才能使上述不等式组成立。又因为非基变量等于零，当 $x_2 = 10$ 时，$x_4 = 0$，即 x_4 为出基变量。

用线性方程组的消元法（初等行变换），将基变量 x_2、x_3 解出得到：

$$\begin{cases}\frac{5}{3}x_1+x_3-\frac{1}{3}x_4=30\\ \frac{1}{3}x_1+x_2+\frac{1}{3}x_4=10\end{cases}$$

解得另一个基本可行解为：

$$\boldsymbol{X}^{(2)}=(0,\ 10,\ 30,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

5）检验 $X^{(2)}$ 是否为最优解　$X^{(2)}$ 是不是最优解，仍要看检验数的符号。由 $\frac{1}{3}x_1+x_2+\frac{1}{3}x_4=10$ 得 $x_2=10-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4$，代入目标函数得：

$$Z=3x_1+4\left(10-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_4\right)=40+\frac{5}{3}x_1-\frac{4}{3}x_4$$

目标函数中非基变量的检验数 $\lambda_1=\frac{5}{3}$，$\lambda_2=-\frac{4}{3}$。因为 $\lambda_1>0$，所以 $X^{(2)}$ 不是最优解。

6）第二次换基迭代　迭代方法同上面的相同，x_1 为进基变量，选择出基变量用最小比值规则，即常数向量与进基变量的系数列向量的正数求比值，最小比值对应的变量出基。本例 $\theta=\min\left\{\frac{30}{5/3},\ \frac{10}{1/3}\right\}=18$，第一行的比值最小，$x_3$ 为出基变量。因此 x_1、x_2 为基变量，x_3、x_4 为非基变量。

将 x_1、x_2 的系数矩阵用初等变换的方法变换为单位矩阵（或消元法解出 x_1、x_2）得到：

$$\begin{cases}x_1+\frac{3}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4=18\\ x_2-\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4=4\end{cases}$$

解得另一个基本可行解为：

$$\boldsymbol{X}^{(3)}=(18,4,0,0)^{\mathrm{T}}$$

7）检验 $X^{(3)}$ 是否为最优解　由 $x_1+\frac{3}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4=18$ 知，$x_1=18-\frac{3}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4$，将其代入目标函数：

$$Z=40+\frac{5}{3}\left(18-\frac{3}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4\right)-\frac{4}{3}x_4=70-x_3-x_4$$

因为 $\lambda_j<0$，所以 $X^{(3)}=(18,\ 4,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 是最优解，最优值 $Z=70$。

通过分析上述例题可知，如何通过观察得到一个基本可行解并能判断是否为最优解，关键看模型是不是典则形式（典式）。

所谓典式就是：①约束条件系数矩阵存在 m 个不相关的单位向量；②目标函数中不含有基变量。满足条件①时立即可以写出基本可行解，满足条件②时马上就可以得到检验数。

以上全过程计算方法就是单纯形法，用列表的方法计算更为简洁，这种表格称为单纯形表，如表 1-3 所示。