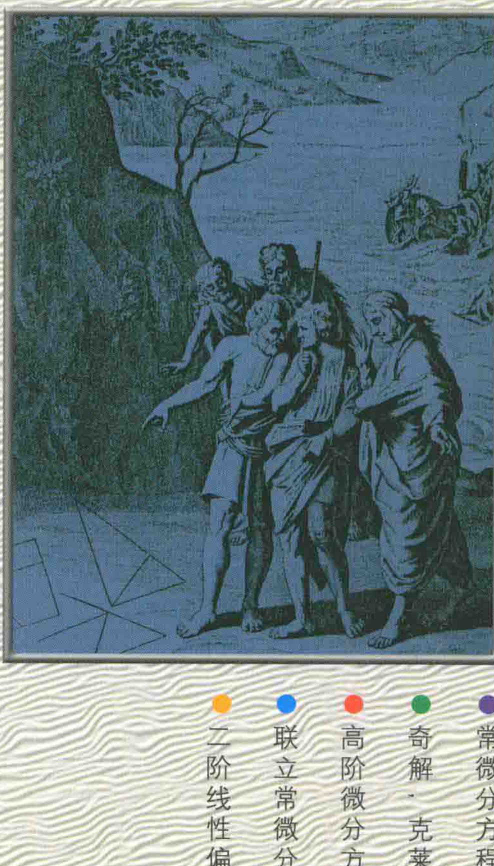
德国讲义日本考题

——微分方程卷

[德]罗德 著
刘培杰数学工作室 编译

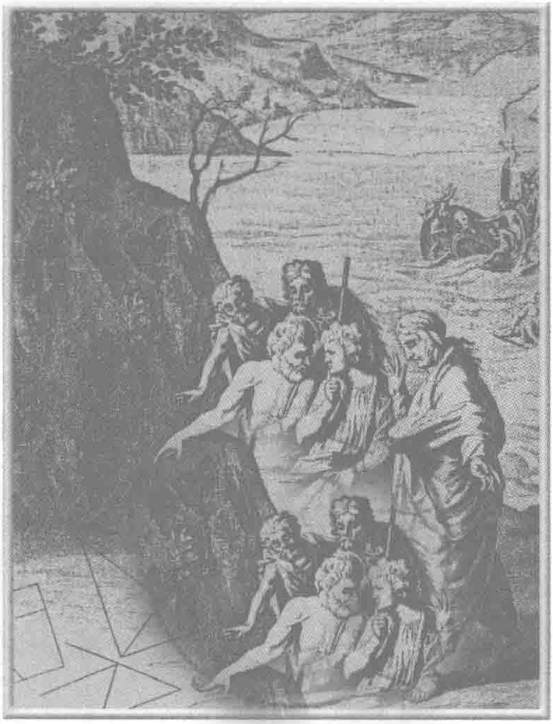


- 常微分方程组与偏微分方程组
- 奇解、克莱罗与拉格朗日微分方程
- 高阶微分方程、线性微分方程
- 联立常微分方程组及其稳定性
- 二阶线性偏微分方程

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

德国讲义日本考题

——微分方程卷



[德]罗德 著

刘培杰数学工作室 编译

◎常微分方程组与偏微分方程组

◎奇解、克莱罗与拉格朗日微分方程

◎高阶微分方程、线性微分方程

◎联立常微分方程组及其稳定性

◎二阶线性偏微分方程

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书收录了大量德国和日本关于微分方程方面的知识点和考题,每个知识点后配有大量的典型例题,书中的问题有趣,解题思路多样.

本书适合参加数学竞赛的高中生和教练员参考阅读,也适合数学很强的初中生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

德国讲义日本考题.微分方程卷/(德)罗德著;刘培杰数学工作室编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.4

ISBN 978-7-5603-5270-1

Ⅰ.①德… Ⅱ.①罗… ②刘… Ⅲ.①微分方程 Ⅳ.①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 060489 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　单秀芹
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 17　字数 180 千字
版　　次　2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5270-1
定　　价　38.00 元

目录

第一编　德国讲义

第二编　日本考题

第一编

德国讲义

微分方程（Ⅰ）

第1章

§1 微分方程一般概念

1. 定义与分类

微分方程是一个方程，它含有未知而要确定的函数的导数. 如果这些函数只有一个自变量 x，方程就叫作常微分方程，否则，就叫作偏微分方程. 微分方程组是用来求 x 的若干个未知函数 $y,z,u,\cdots$ 的. 如果只考虑一个函数 $y=y(x)$，那么在用来确定它的微分方程中除去 x 与 y 以外，还有某些（待求函数的）导数 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\cdots$. 如果 $y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$是方程中的最高阶导数（$n\geqslant 1$），就说微分方程是 n 阶的.

举例来说，$y=xy'+\sin y'$是一阶的，$(1+y')^{\frac{3}{2}}=\rho(x,y)y''$是二阶的，等等. 一般地

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

是 n 阶的,其中 F 是括号中各变量的某一个函数. 如果 F 对变量 $y,y',y'',\cdots$ 来说是有理的,我们又可把这种微分方程说成是几次的. 特别是,如果 $a,a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是 x 的给定的函数,下面形式

$$a+a_0y+a_1y'+a_2y''+\cdots+a_ny^{(n)}=0$$

的 n 阶微分方程叫作是一次的或是线性的,因为在方程中,$y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 至多是一次的. 像 $y=xy'+\sin y'$ 就不说它是几次的了.

2. 微分方程的积分

积一个微分方程这句话的意思是:找出所有的函数,使这样的函数及其导数代入微分方程后,就能将此方程变为恒等的,即对变量 x 的所有的值都适合,那样的函数叫作微分方程的解或积分. 我们不能希望在每一个情况下,微分方程的解都能用初等函数来表示,或者,也不能希望只用已经熟知的函数的显式来表示. 最重要的乃是确定解的解析性质,解的图形伸展情况以及其他特征. 像最简单的微分方程

$$y'=f(x)$$

我们就已经能够看得很清楚,它的所有的积分都包含在形式

$$y=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

中,其中 C 是一个任意常数.

解可分为一般解、特定解与奇解. 一个 n 阶常微分方程的一般解(或完全解)含有 n 个任意常数,且这 n 个常数不能用较少个数的常数来替代,给这些常数以特定值,就成为特定解. 对应于微分方程的某种间断性,还会出现奇解,而奇解通常不是特定解. 例如就微

分方程 $y'^2+y^2=1$ 来说,$y=\sin(x+C)$是它的一般解,$y=\cos x$ 是特定解$\left(C=\frac{\pi}{2}\right)$,而 $y=\pm1$ 是奇解.

举例 二阶线性常微分方程

$$y''+y=0 \tag{1}$$

有特定解

$$y=0,\sin x,\cos x,\sin(x+1),$$
$$2\cos x,e^{ix},e^{-ix},\sqrt{1+\sin 2x}$$

等. 要找出所有的解,把所给方程的两边乘以 $2y'(\neq 0)$,就有 $2y'y''+2yy'=0$ 或$\frac{d}{dx}(y'^2+y^2)=0$,于是有

$$y'^2+y^2=C \tag{2}$$

其中 C 是任意积分常数,这个新的一阶微分方程叫作原来方程的"初积分",我们可以把它写成$\frac{y'}{\sqrt{C-y^2}}=1$,其中平方根式要给予正号或负号(因为由于 $y'\neq0$ 知 $y^2\neq C$),即$\frac{dy}{\sqrt{C-y^2}}=dx$,从而两个变量被分离开了,两端积分就得:

当 $C\neq0$ 时,有

$$\int\frac{dy}{\sqrt{C-y^2}}=\arcsin\frac{y}{\sqrt{C}}=x+C'$$

所以有

$$y=\sqrt{C}\sin(x+C'),C\neq0 \tag{$*$}$$
$$y=e^{\pm i(x+c'')},C=0 \tag{$**$}$$

其中 C',C''是新的积分常数.

从而就求得 $y''+y=0$ 在 $y'\neq0$ 时的所有的解. 但是如果对一切 x 有 $y'=0$,那么 $y''=0$. 于是,按式(1)

也就有 $y=0$,这就是说我们可以在式(*)中令 $C=0$ 也就得到这个解.

于是得到结果

$$y=\sqrt{C}\sin C'\cos x+\sqrt{C}\cos C'\sin x$$

与

$$y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}c''}\cos x\pm\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}c''}\sin x$$

如果令 $\sqrt{C}\sin C'=C_1$, $\sqrt{C}\cos C'=C_2$,其中常数 C_1 与 C_2 是任意的,且也可以是复数,就有

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x \tag{3}$$

微分方程(1)的所有的解就都包含在这里面了.这个一般解自然还可以写成别的形式,例如可以写成像式(*)那样

$$y=A\sin(x-x_0) \tag{3'}$$

其中

$$A=+\sqrt{C_1^2+C_2^2},\cos x_0=\frac{C_2}{A},\sin x_0=-\frac{C_1}{A}$$

在式(3)中,给 C_1 与 C_2 以特定的值就得到特定解,例如上面所讲的八个解都是(读者可以自行证明),这里没有奇解.

但是对给定的 C,微分方程(2) $y'^2+y^2=C$(它在 $y'\neq0$ 时的所有的解上面已求得为 $y=\sqrt{C}\sin(x+C')$)还有奇解.因为这里在 $y'=0$ 时,就得到 $y=\pm\sqrt{C}$.如果把微分方程写成形式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{C-y^2}$,就看到 $y=\pm\sqrt{C}$ 是导数的支值,这两个解是微分方程 $y'^2+y^2=C$ 的奇解,且在一般解 $y=\sqrt{C}\sin(x+C')$ 中不论 C 取什么样的值都不能得到这些奇解.

3. 微分方程的构成

如果函数

$$y=f(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

中含有 n 个任意常数(参数)$C_1,C_2,\cdots,C_n$,且它们不能归结为较少个数的任意常数,于是这就在 xOy 平面上得到一族"n 重无穷多"(∞^n)的曲线,我们就能够用前 n 个导数 $y'=f'(x,C_1,C_2,\cdots,C_n),y'',\cdots,y^{(n)}$ 来消去参数 C_λ,结果就得到一个 n 阶常微分方程. 从几何上来说,它表示这族曲线的共同性质,所以从 $y=a\cos x+b\sin x$,其中 a,b 是任意常数,就有 $y'=-a\sin x+b\cos x,y''=-a\cos x-b\sin x$,立刻就得到 $y''+y=0$,即微分方程(1).

举例　a)求所有 ∞^1 抛物线 $y^2=2px$ 的微分方程,这些抛物线在顶点处有同一个切线 $x=0$(图 1). 从 $y^2=2px$(抛物线族)及求导数以后的方程 $yy'=p$ 消去 p,就得到 $y^2=2xyy'$,或者若把 x 轴($y=0$)除外,就得

$$y=2xy'$$

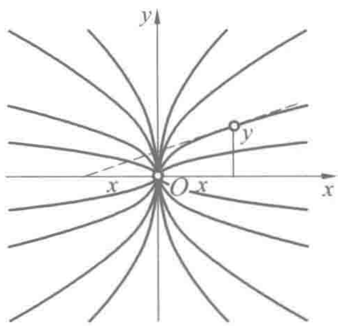


图 1

这个微分方程的几何意义是:对于这族中每一条抛物

线来说,次切线$\frac{y}{y'}$等于切点的横标的两倍,这是我们熟知的性质.

b)求所有∞^1圆$(x-a)^2+y^2=R^2$的微分方程,而这些圆有固定的半径R且中心在x轴上任意一点$(a,0)$处.微分后得到$(x-a)+yy'=0$,所以

$$y^2+y^2y'^2=R^2$$

若$y'=\tan\theta$,就有$y^2(1+\tan^2\theta)=R^2$,因为$\frac{y}{\cos\theta}$是法线长N,这就表示$N^2=R^2$,所以微分方程表示这族所有∞^1圆的公共几何性质:在族中每个圆上每一点处,法线长是同一个值R.此外,微分方程还有奇解$y=\pm R$,它的几何意义从图2来看是显然的.

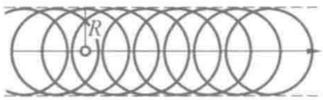


图2

c)平面上有固定半径R的所有∞^2圆$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$的微分方程,可以从方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$
$$(x-a)+(y-b)y'=0$$
$$1+y'^2+(y-b)y''=0$$

消去任意的圆心坐标a,b,并且因为$y''\neq0$,有$y-b=-\frac{1+y'^2}{y''}$及$x-a=\frac{(1+y'^2)}{y''}y'$,就得

$$(1+y'^2)^2\frac{y'^2}{y''^2}+\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}=R^2$$

或

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=R^2$$

或

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm R$$

这个微分方程的几何意义是:所有被考虑的圆具有常数曲率半径 $\rho=R$.

d)就平面上所有 ∞^3 圆(半径是任意的)来说,由于前一个例子,它的微分方程通常写作 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}=0$,或者详细写出来就是

$$3y'y''^2=y'''(1+y'^2)$$

就是说,一切圆的所有的点都是顶点(曲率半径为极大或极小的点).

e)我们可以按下面的方法得到平面上所有 ∞^4 抛物线的微分方程:在圆锥曲线的一般方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ 中,当 $AC-B^2=0$,就是抛物线,其中 A 与 C 不能同时等于零.如果 $C\neq 0$(否则就把 x 与 y 互换位置),我们可以用 C 来除两边,于是 y^2 的系数等于1,而对应的抛物线方程就有形式

$$B^2x^2+2Bxy+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

从而有

$$y=-(Bx+E)\pm\sqrt{\alpha+\beta x}$$

其中

$$\alpha=E^2-F,\beta=2(BE-D)$$

我们现在就通过微分上式来消去这四个任意常数 B,E,α,β.我们有

$$y'=\frac{-B\pm\beta}{2\sqrt{\alpha+\beta x}},y''=\frac{\mp\beta^2}{4(\sqrt{\alpha+\beta x})^3}$$

于是

$$y''^{-\frac{2}{3}}=\frac{2^{\frac{4}{3}}(\alpha+\beta x)}{\beta^{\frac{4}{3}}}$$

所以

$$(y''^{-\frac{2}{3}})''=0$$

或

$$3y''y^{(4)}-5y'''^2=0$$

但是如果 $C=0$,那么也就有 $B=0$,从而 A 就不能等于零. 同时 $E\neq0$,否则 y 在方程中就不出现了,于是 y 有形式

$$y=a+bx+cx^2$$

我们就得到主轴与 x 轴相垂直的所有抛物线的微分方程

$$y'''=0$$

f)用同样的方法,我们得到平面上所有 ∞^5 圆锥曲线的微分方程. 我们从圆锥曲线的一般方程中解出 y,即

$$y=a+bx\pm\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2},\gamma\neq0$$

其中常数 a,b,α,β,γ 是由 A,B,C,D,E,F 来确定的. 现在由消去法得到

$$(y''^{-\frac{2}{3}})'''=0$$

或

$$-9y''^2y^{(5)}+45y''y'''y^{(4)}-40y'''^3=0 \qquad (\Delta)$$

详细的推导读者可自己去做.

§2　常微分方程组与偏微分方程组

1. 动力学的基本方程

力学中指出,质量为 m 的质点受力 $\boldsymbol{K}$ 的作用就得到一个加速运动. 加速度与 m 的乘积,按大小与方向来说,都与 $\boldsymbol{K}$ 一致,所以,如果 t 是时间,就有

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{K} \tag{4}$$

因为力不仅与时间及点的位置有关,也还与它的速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 有关,所以把矢量形式的微分方程(4)按分量分解,就得到下面含三个数量微分方程的二阶微分方程组

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=X\left(t,x,y,z,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=Y\left(t,x,y,z,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=Z\left(t,x,y,z,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \end{cases} \tag{5}$$

可用来确定自变量为 t 的未知函数 x,y,z,其中的 X, Y,Z 在最简单的情形下是诸变量 x,y,z 的给定函数.

2. 矢量场的场线(流线)的微分方程

设 $\boldsymbol{F}$ 是一个场矢量. 场线是场内的(一般说来)空间曲线,它的切线总与切点处的场矢量有相同的方向. 如果 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ 是任意一条场线上某点 P 的位置矢量,那么,就有 $\boldsymbol{F}/\!/\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,于是

$$\boldsymbol{F} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \qquad (6^*)$$[1]

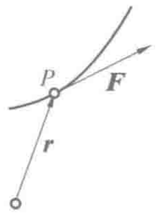


图 3

这已经是场线的矢量形式的微分方程了,把它按分量分解($\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$)就得到微分方程组

$$P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x = 0, Q\mathrm{d}z - R\mathrm{d}y = 0, R\mathrm{d}x - P\mathrm{d}z = 0 \quad (7)$$

它们都是一阶的,且是以微分形式[2]来表示的. 这个写法的好处是随便哪个变量都可作为自变量. 如果它是 t,那么问题是来确定满足方程(7)的三个可微函数 $x(t), y(t), z(t)$. Q, R 这时是 x, y, z 的给定函数. 如果我们取 $t = x$,那么方程就变为

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q, Q\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = R\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, R = P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

如果 $PQR \neq 0$,就是说,如果 $\boldsymbol{F}$ 不与任何一个坐标平面平行,那么三个方程中的每一个都可以从另两个得到,所以只要取第一个与末一个就可以了,又因为 P 必须不等于 0,所以可把这两个方程写成形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{P} = \varphi(x, y, z), \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{R}{P} = \psi(x, y, z) \qquad (8)$$

由此可见,场矢量 $\boldsymbol{F}$ 的长度在这里是无关紧要的,因

① 较难的题标有 * 号.

② 在每一个以微分形式来写的微分方程中,这些微分自然必须是齐次的.