

线性代数与空间解析几何 习题指导

XIAN XING DAI SHU YU KONG JIAN
JIE XI JI HE XI TI ZHI DAO

主编 李祝春 王忠英 边伟



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数与空间解析几何 习题指导

XIAN XING DAI SHU YU KONG JIAN
JIE XI JI HE XI TI ZHI DAO

主 编	李祝春	王忠英	边 伟
编委会	王忠英	王春程	边 伟
	李祝春	杨枫林	孟晨辉
	郑宝东	徐 阳	郭 潇
	蒋卫华		



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是关于线性代数与空间解析几何的专用工具书,内容涉及行列式、矩阵、几何向量、 n 维向量、线性方程组、特征值、特征向量与相似矩阵、线性空间与线性变换、二次型与二次曲面。

本书适合大学师生参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何习题指导/李祝春,王忠英,边伟

主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.9

ISBN 978-7-5603-5617-4

I. ①线… II. ①李…②王…③边… III. ①线性代数—
教学参考资料②立体几何—解析几何—教学参考资料
IV. ①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 221112 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘立娟 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨久利印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.5 字数 252 千字

版 次 2015 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5617-4

定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
目
录

习题一	行列式	//1
习题二	矩阵	//19
习题三	几何向量	//42
习题四	n 维向量	//58
习题五	线性方程组	//75
习题六	特征值、特征向量与相似矩阵	//92
习题七	线性空间与线性变换	//103
习题八	二次型与二次曲面	//111
综合练习	100 题	//136
哈尔滨工业大学	2010 级期中试题及答案	//171
哈尔滨工业大学	2011 级期中试题及答案	//175
哈尔滨工业大学	2013 级期中试题及答案	//179
哈尔滨工业大学	2014 级期中试题及答案	//183

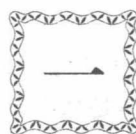
哈尔滨工业大学 2010 级期末试题及答案 //187

哈尔滨工业大学 2011 级期末试题及答案 //193

哈尔滨工业大学 2013 级期末试题及答案 //198

哈尔滨工业大学 2014 级期末试题及答案 //204

行 列 式



班级: _____

学号: _____

姓名: _____

成绩: _____

① 按自然数从小到大的自然次序,求解各题:

(1) 求 1 至 6 的全排列 241356 的逆序数.

解 $t(241356) = 0 + 0 + 2 + 1 + 0 + 0 = 3$.(2) 求 1 至 $2n$ 的全排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的逆序数.解 $t(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)) = 0 + 0 + \cdots + 0 + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$.(3) 选择 i 与 j , 使由 1 至 9 的排列 $91274i56j$ 成偶排列.解 由 $91274i56j$ 是从 1 至 9 的排列, 所以 i, j 只能取 3 或 8.当 $i=8, j=3$ 时

$$t(912748563) = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 3 + 6 = 18$$

是偶排列.

当 $i=3, j=8$ 时

$$t(912743568) = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 = 13$$

是奇排列, 不合题意, 舍去.

(4) 选择 i 与 j , 使由 1 至 9 的排列 $71i25j489$ 成奇排列.解 由 $71i25j489$ 是从 1 至 9 的排列, 所以 i, j 只能取 3 或 6.当 $i=3, j=6$ 时

$$t(713256489) = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 0 + 0 = 9$$

是奇排列.

当 $i=6, j=3$ 时

$$t(716253489) = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 0 + 0 = 12$$

是偶排列, 不合题意, 舍去.

② 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 9a & 18b \\ 26b & 13a \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 32 & 153 & 32 & 053 \\ 75 & 284 & 75 & 184 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}.$$

$$\text{解 } (1) \begin{vmatrix} 9a & 18b \\ 26b & 13a \end{vmatrix} = 9 \times 13 \begin{vmatrix} a & 2b \\ 2b & a \end{vmatrix} = 117(a^2 - 4b^2).$$

$$\begin{aligned} (2) \begin{vmatrix} 32 & 153 & 32 & 053 \\ 75 & 284 & 75 & 184 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 32 & 053 + 100 & 32 & 053 \\ 75 & 184 + 100 & 75 & 184 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 32 & 053 & 32 & 053 \\ 75 & 184 & 75 & 184 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 100 & 32 & 053 \\ 100 & 75 & 184 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 7\,518\,400 - 3\,205\,300 = 4\,313\,100. \end{aligned}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix} = 5 \times 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} &= abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4abcdef.
 \end{aligned}$$

3 已知 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 利用行列式性质求下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{解 } (1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1.
 \end{aligned}$$

4 利用行列式定义计算:

$$(1) \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \\ 5 & & & \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } (1) \quad \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \\ 5 & & & \end{vmatrix} &= \sum (-1)^{t(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5} \\
 &= (-1)^{t(54321)} a_{15} a_{24} a_{33} a_{42} a_{51} \\
 &= (-1)^{10} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix} &= \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \\
 &= (-1)^{t(23 \cdots n1)} a_{12} a_{23} \cdots a_{(n-1)n} a_{n1} \\
 &= (-1)^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \\
 &= (-1)^{n-1} n!.
 \end{aligned}$$

5 利用行列式的定义证明:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad (1) D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{t(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}.
 \end{aligned}$$

假设 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5} \neq 0$, 由已知, p_3, p_4, p_5 必等于 4 或 5, 从而 p_3, p_4, p_5 中至少有两个相等, 这与 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 是 1, 2, 3, 4, 5 的一个全排列矛盾, 故所有项 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5} = 0$, 因此 $D = 0$.

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}.$$

由已知, 只有当 p_1, p_2 取 1 或 2 时

$$a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} \neq 0$$

而 p_1, p_2, p_3, p_4 是 1, 2, 3, 4 的一个全排列, 故 p_3, p_4 取 3 或 4, 于是

$$\begin{aligned}
 D &= (-1)^{t(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} + (-1)^{t(1243)} a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} + \\
 &\quad (-1)^{t(2134)} a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} + (-1)^{t(2143)} a_{12} a_{21} a_{34} a_{43} \\
 &= a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} - a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} - a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} + a_{12} a_{21} a_{34} a_{43}
 \end{aligned}$$

从而

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) \\
 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - \\
 a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\
 = D$$

⑥ 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ -2 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 10 \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad (4) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$(5) D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix};$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}.$$

解 (1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第4行展开}} (-1)^{4+4} d \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{按第3列展开}} (-1)^{3+3} dc \begin{vmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{vmatrix} = abcd.$

$$\begin{aligned}
 (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ -2 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 10 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

心得 体会 拓广 疑问

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{aligned}
 &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9.
 \end{aligned}$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1+r_2 \\ r_1+r_3 \\ \vdots \\ r_1+r_n \end{matrix} \begin{vmatrix} (n-1)a+x & (n-1)a+x & \cdots & (n-1)a+x \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)a+x] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)a+x] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)a+x] (x-a)^{n-1}.$$

$$(4) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ \vdots \\ c_1+c_n \end{matrix} \begin{vmatrix} 1+2+3+\cdots+n & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(5) D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\underline{\text{按第1行展开}} (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} +$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{1+n} (-1)^{n-1+1} a^{n-2}$$

$$= a^n - a^{n-2}.$$

$$(6) \dot{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)^{n-1} = (-1)^{n-1} 2^{n-1}.$$

7 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{c_2 + (-1)c_3}{c_2 + (-1)c_3}]{} \begin{vmatrix} a^2 - ab & ab - b^2 & b^2 \\ 2a - a - b & a + b - 2b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) \\ a-b & a-b \end{vmatrix} \\ &= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \text{等式左端} = \begin{vmatrix} a^2 & a^2 + 2a + 1 & a^2 + 4a + 4 & a^2 + 6a + 9 \\ b^2 & b^2 + 2b + 1 & b^2 + 4b + 4 & b^2 + 6b + 9 \\ c^2 & c^2 + 2c + 1 & c^2 + 4c + 4 & c^2 + 6c + 9 \\ d^2 & d^2 + 2d + 1 & d^2 + 4d + 4 & d^2 + 6d + 9 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[\frac{c_2 + (-1)c_1}{c_3 + (-1)c_1}{\frac{c_4 + (-1)c_1}{c_4 + (-1)c_1}}]{} \begin{vmatrix} a^2 & 2a + 1 & 4a + 4 & 6a + 9 \\ b^2 & 2b + 1 & 4b + 4 & 6b + 9 \\ c^2 & 2c + 1 & 4c + 4 & 6c + 9 \\ d^2 & 2d + 1 & 4d + 4 & 6d + 9 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

心得 体会 拓广 疑问

$$\frac{c_3 + (-2)c_2}{c_4 + (-3)c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + a_1 & x_1^2 + b_1 x_1 + b_2 & x_1^3 + c_1 x_1^2 + c_2 x_1 + c_3 \\ 1 & x_2 + a_1 & x_2^2 + b_1 x_2 + b_2 & x_2^3 + c_1 x_2^2 + c_2 x_2 + c_3 \\ 1 & x_3 + a_1 & x_3^2 + b_1 x_3 + b_2 & x_3^3 + c_1 x_3^2 + c_2 x_3 + c_3 \\ 1 & x_4 + a_1 & x_4^2 + b_1 x_4 + b_2 & x_4^3 + c_1 x_4^2 + c_2 x_4 + c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}.$$

证 等式左端

$$\frac{c_2 + (-a_1)c_1}{c_3 + (-b_2)c_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 + b_1 x_1 & x_1^3 + c_1 x_1^2 + c_2 x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 + b_1 x_2 & x_2^3 + c_1 x_2^2 + c_2 x_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 + b_1 x_3 & x_3^3 + c_1 x_3^2 + c_2 x_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 + b_1 x_4 & x_4^3 + c_1 x_4^2 + c_2 x_4 \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_3 + (-b_1)c_2}{c_4 + (-c_2)c_2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 + c_1 x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 + c_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 + c_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 + c_1 x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_4 + (-c_1)c_3}{c_4 + (-c_1)c_3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \text{等式右端}$$

8 解关于未知数 x 的方程:

$$(1) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

解

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)[x(x-2) - 3]$$

$$= (x-1)[x^2 - 2x - 3]$$

$$= (x-1)(x-3)(x+1) = 0$$

所以 $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -1$.

$$(2) \begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0 (m \neq 0).$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} &= m \begin{vmatrix} a & a & x \\ 1 & 1 & 1 \\ b & x & b \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & x & b \end{vmatrix} \\ &= m(x-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & x \end{vmatrix} = m(x-a)(x-b) = 0 \end{aligned}$$

 因 $m \neq 0$, 所以 $x_1 = a, x_2 = b$.

9 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a$, 求下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix}$;

(3) $\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} \begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix}$, 其中“ $\sum$ ”是对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有

 全排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 取和, $n \geq 2$.

解 (1) 经行的交换得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a \end{aligned}$$

(2) 与(1)类似, 经列的交换得

$$\text{原式} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a$$

(3) 经列的交换得

$$\begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a$$

心得 体会 拓广 疑问

故

$$\text{原式} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

10 计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ k & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

$$\text{解 } (1) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

(2) 将前 4 行依次加到第 5 行, 再按第 5 行展开得

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -a^5 + \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= -a^5 + \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -a^5 + a^4 + \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= -a^5 + a^4 + \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -a^5 + a^4 - a^3 + \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$$

$$(3) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \times 5^4 = 6250.$$

(4) 按最后一行展开得

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ k & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} +$$

年 月 日

$$\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = k + \lambda^5$$

心得 体会 拓广 疑问

11 计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & x+1 \\ 1 & -1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} x_1 - m & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 - m & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 - m & x_3 \\ x_4 & x_4 & x_4 & x_4 - m \end{vmatrix}.$$

解 (1) 依次将第 2, 3, 4, 5 列加到第 1 列得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 1 & -1 & x+1 \\ x+1 & -1 & 1 & x-1 & 1 \\ x+1 & -1 & x+1 & -1 & 1 \\ x+1 & x-1 & 1 & -1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & x+1 \\ 1 & -1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} (x+1)x^4 = x^4(x+1)$$

(2) 依次将第 2, 3, 4 行加到第 1 行得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 x_i - m & \sum_{i=1}^4 x_i - m & \sum_{i=1}^4 x_i - m & \sum_{i=1}^4 x_i - m \\ x_2 & x_2 - m & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 - m & x_3 \\ x_4 & x_4 & x_4 & x_4 - m \end{vmatrix}$$

年 月 日