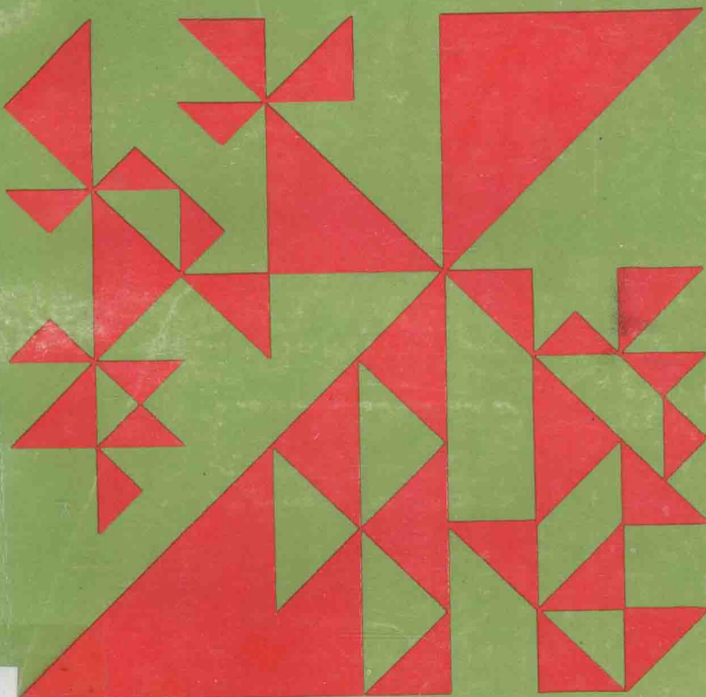
初中数学题型、方法与训练

主编 万庆炎　　副主编 杨裕前



科学普及出版社

初中数学题型、方法与训练

主　编　万庆炎

副主编　杨裕前

科学普及出版社

北　京

（京）新登字026号

初中数学题型、方法与训练

主　编　万庆炎
副主编　杨裕前

科学普及出版社出版
（北京海淀区白石桥路32号　邮政编码：100081）
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
江苏省丹徒县印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：9.875　字数：247千字
1994年10月第1版　　1994年10月第1次印刷
印数1—8000
ISBN 7-110-03315-5/G·1341
定价：5.60元

前 言

“数学重要”，这大概不会有人反对；“数学难学”！这又是许多人发自内心的感叹。

1987年，国家教委在全国范围内组织过一次初中语文、数学两科教学状况的调查，调查结果表明

1．当年的初三学生中，大约有$\frac{3}{5}$的学生数学达到合格水平。

2．如果从小学入学时算起，这一届初三学生，是经历了小学阶段和中学的三年里逐步淘汰后剩下的“幸运者”，他们只占当年进入小学一年级时的总人数的50%。

上述两个统计结果告诉我们，当年一同进入小学的同龄人，经过8～9年时间的学习，最后数学达到初中合格水平的只有$\frac{1}{3}$左右。

调查结果还告诉我们：这些幸运的初中生，平均每周要上300多分钟的数学课（实际可能会更多些），他们当中有一半以上的人感到睡眠不足，结果还有$\frac{2}{3}$以上的同学感到学习数学有些困难甚至很困难！

同学们反映：初中三年，天天要上数学课，课后总要做作业。面对那些大同小异的习题，一遍又一遍地算个不停，一题又一题地永远也做不完，可是最终脑子里仍然是空荡荡的。到了初三复习迎考的时候，书包里揣着6本数学课本，

还有这样那样的练习册和复习资料，那么多的内容，那么多的习题，实感千头万绪，无所适从，于是，睡也不安，食也不香，心焦意烦．进考场就像进战场一样，心里也想着要去勇敢地拼搏一番，但手里却没有“武器”．

眼看着成千上万的初中生，付出了这么多的时间和精力，承受着这样重的作业负担和心理压力，却又得不到理想的成绩，怎不令人焦虑不安？

当然，要改变这种局面，决非一朝一夕之事．这是一项浩大的工程，要靠许多志士仁人从各个方面去努力工作．比如说，要把教学的内容适当删减一些；要求和难度也要相应地降低；知识的结构要调整；教的方法、学的方法以及训练方法都要变革；还涉及到考试制度与方法的改革，等等．我们编写《初中数学题型、方法与训练》，其目的就是想为这项浩大的工程做一点添砖加瓦的工作．

大家知道，数学一向被誉为“科学的皇后”，她的头上有一圈神奇的光环，脸上覆盖着一层轻柔的面纱，隐藏着无穷的奥秘与乐趣．只是当你揭去其面纱时，她才会向你展现她的无与伦比的容颜！全部初中数学，虽然都是数学中那些最简单的、最基本的知识，但它们是组成女皇身躯的原始“细胞”，其中蕴含着丰富的数学思想方法．这些闪耀着生命活力的数学思想方法，才是我们的“科学皇后”的“灵气”之所在．因此，同学们在学习基础知识的同时，更应努力地去掌握一些数学的思想与方法，并把它们与所学的知识融为一体；要学会从思想与方法的高度去领会、理解、掌握有关知识的内在联系，从而运用这些方法和思想去分析问题、解决问题．在我们这本小册子里，虽然也向大家介绍了数学题的“题型”，也讲了一点如何进行解题“训练”的

问题，但所有这些内容都是围绕着数学思想方法这个主题展开的。

逢山要开路，过河要架桥，这似乎是常识问题。同学们可曾想过，数学知识就好比是一座山，那千变万化的数学题就犹如一条河，只有努力地去钻研解决那“开路”、“架桥”的技术，才能在你面前展现出一条坦途。

在这里，我们已经把自己的认识和想法作了介绍。对于我们这些长期搞数学教学的人来说，这是肺腑之言，经验之谈，但对于同学们，则不知效果将会如何？所以，在我们把这本小册子献给大家的同时，恳请广大初中数学老师和同学给予批评指正。并借此机会，向支持我们编写本书的许多同志，特别是苏州大学的陆鼎一、秦涂老师表示衷心的感谢！

编　者

1994年2月

目　　录

一、怎样解数学题

学习数学，离不开解题。怎样才能顺利地解数学题，是中学生既感到棘手又急于解决的问题。对此，前苏联数学家雅诺卡夫娜说："解题就是把题归结为已经解过的题。"这是什么意思呢？让我们先看一个例子。

第五届全国部分省市初中数学通讯赛有这样一道试题：如图1－1，$AC=AD=DE=EA=BD$，$\angle BDC=28^\circ$，$\angle ADB=42^\circ$，则$\angle BEC=$________。

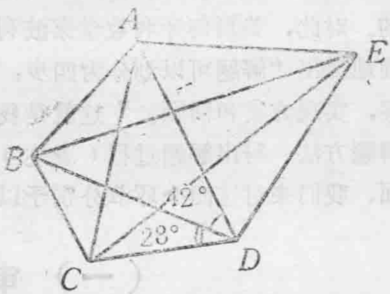


图1－1

这道填充题不算太难，只需利用等腰三角形和等边三角形的一些知识，即可求得$\angle BEC=19^\circ$。但是，由于相关的三角形交织在一起，不那么容易区分。因此一方面有不少学生在一个又一个三角形中绕了许多弯子，最终还是没有求得结果；另一方面，我们也从答卷中发现了一种巧妙的解答：根据已知条件，点C、D、E应在以A为圆心，AD为半径的圆上；点B、A、E在以D为圆心、DA为半径的圆上。这时，如图1－2，$\angle AEB$与$\angle ADB$是对$\overset{\frown}{AB}$的圆周角与圆心角，$\angle CED$与$\angle CAD$是对$\overset{\frown}{CD}$的圆周角

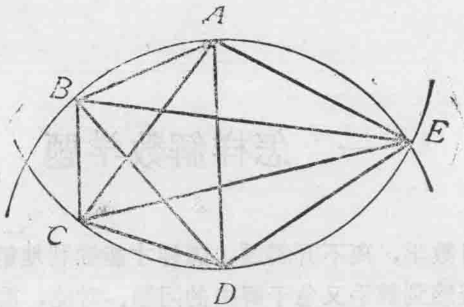


图1－2

与圆心角，关系十分明确。而$\angle AED=60^\circ$，$\angle CAD=180^\circ-2\angle ADC=180^\circ-2(42^\circ+28^\circ)=40^\circ$，问题就比较容易解决。

由此，可以清楚地看到，所谓解题，就是从未知到已知的转化。因此，值得认真研究的是这种转化是如何实现的。对此，美籍匈牙利数学家波利亚曾在《怎样解题》中明确地提出“解题可以划分为四步：即理解题意，建立解题方案，实现方案和回顾。”这就是我们通常所讲的审题、探索解题方法、写出解题过程（表述）和回顾总结四个环节。下面，我们来对这四个环节分别予以阐述。

（一）审题

审题，就是要弄清题意，这是发现解法的前提。俗话说：“问题想得透彻，就意味着问题解决了一半。”讲的就是这个意思。

弄清题意，具体地讲，就是要初步的、然而必须是全面地理解题意，搞清楚题中的已知条件和结论是什么？题中涉及到哪些概念，它们的含义是什么？在此基础之上引入适当的

符号、画出必要的图形（或示意图），把题目的条件与要求的问题（或结论）清楚地表示出来．有时，还要注意发现题目中那些比较隐蔽的条件．

在审题时，发掘题目中的隐蔽条件，是较高的要求，但它确实有助于我们发现解法、并顺利地完成解题任务．例如，上面那道竞赛题，如果在审题过程中能够及时发现，点C、D、E和点B、A、E分别在一个圆上，那么作出解答就不难了．

这项工作，有时也并不困难，但容易忽视，并由此常常造成解题的障碍．如

例1 a为何值时，方程组

$$\begin{cases} 4x^2-2ax+12y^2+1=0 \\ y^2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}a-1\right) \end{cases}$$

没有实数解．

该题在消去y以后，得到

$$4x^2-2ax+2a-3=0,$$

由$\Delta=[(-2a)^2-4\cdot4(2a-3)]=4a^2-32a+48<0$，

解得　$a<2$，或$a>6$．

这里，忽略了$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}a-1\right)=y^2\geqslant0$，即$a\geqslant2$这个隐含的条件．事实上，正确答案应为$a>6$．

（二）探索解题方法

探索解题方法，就是寻求已知与未知联系的途径，从而实现由已知向未知的转化．这是解答数学题的关键，是一件

十分有魅力的工作．正如波利亚所说："解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋，因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动。"当你经历了多次尝试和几番犹豫不决之后，突然闪出了一个"好念头"，终于把问题解决了，那种成功的喜悦，简直就是一种无法比喻的享受．如

例2　设a、b都是实数、且$b=\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$，求$a+b$的值．

处理这类题，常常会从变换已知条件入手，但经过尝试以后容易发现，这条路走不通．既然无法把b的表达式$\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$进行变换，那么能不能先求$a$呢？由此想到利用算术平方根和公式的意义等隐含在题目中的条件，从而找到合理的解题途径．

解　$\because b$为实数，则必有

$$\begin{cases} a^2-1\geqslant 0, \\ 1-a^2\geqslant 0. \end{cases}$$

从而解得$a^2-1=0$，　　即$a=\pm 1$．

又$\because$分母$a+1\neq 0$，　　$\therefore a=1$．

$$\therefore b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}=0,$$

$$\therefore a+b=1+0=1.$$

例3　如图1-3，A是$\odot O$的直径上的一点，OB是和这条直线垂直的半径，BA和$\odot O$相交于另一点C，过点C的切线和OA的延长线相交于D．求证：$DA=DC$．

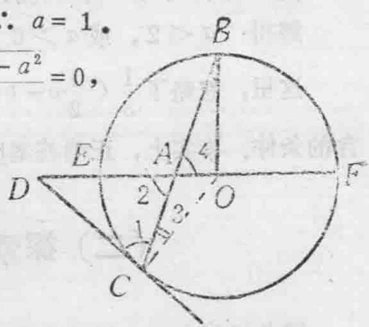


图1-3

这是《几何》课本上的一道题，也是我们用以说明探索解题方法的一道好题．要证$\triangle DAC$的两边相等，很自然地会想到把问题转化为证$\angle 1=\angle 2$．下面，我们从不同的角度出发，对该题作进一步的分析：

（1）由于点C是切点，连结OC，则有$\angle 1=90^\circ-\angle 3$．因此，需要探索$\angle 2$是否也与某一个直角有关．事实上，$\angle 2=\angle 4=90^\circ-\angle B$，剩下的问题就是$\angle 3$是否等于$\angle B$？而这个结论是非常明显的．

（2）由于$\angle 2=\angle 4=90^\circ-\angle B$，因而，如图1－4，可以考虑延长$BO$交$\odot O$于$G$，再连结$CG$，则$\angle B=\angle 5$．这时只需再证明$\angle 1$等于$90^\circ-\angle 5$，因为$BG$是$\odot O$的直径，所以$\angle BCG=90^\circ$，也就是说，确有$\angle 1=90^\circ-\angle 5$，问题也就迎刃而解．

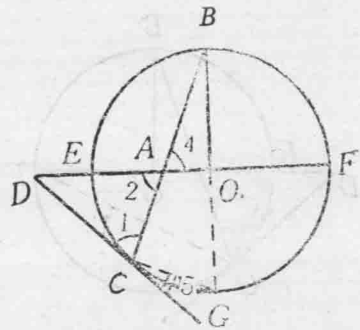


图1－4

（3）由于$\angle 1$是弦切角，它所夹的弧是$\overset{\frown}{CEB}$，即$\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}$。所以想到连结$BF$、$CF$．如图1－5，有$\angle BFC=\angle 1$．那么$\angle BFC$是否等于$\angle 2$呢？容易发现$\angle 2=\angle ACF+\angle AFC$，其中$\angle AFC$正好是$\angle BFC$

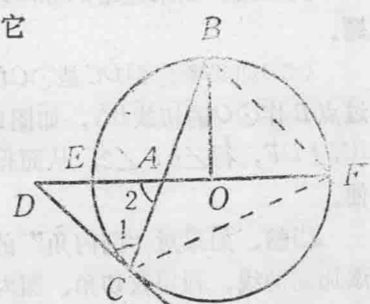


图1－5

的一部分．因此，剩下的问题是只需证明$\angle ACF=\angle AFE$，这由$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BF}$很容易证得．

（4）如果连结CE、CF，如图1－6．$\angle 1$被分成$\angle DCE$、$\angle ECA$两部分，$\angle 2$为$\triangle ACF$的外角，等于$\angle ACF$与$\angle AFC$的和，且显然有$\angle DCE=\angle AFC$，因此，剩下的问题就是$\angle ECA$是否等于$\angle ACF$了．这时，利用$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{BF}$，问题也很容易地解决了．

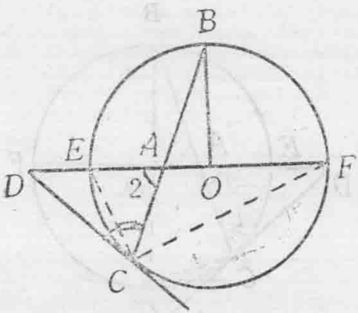


图1－6

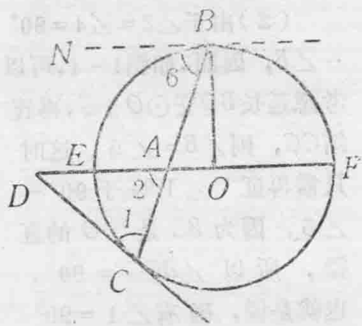


图1－7

类似地，如果连结CE和BE，也可用同样方法解决问题．

（5）如果考虑到DC是$\odot O$的切线，$OB\perp EF$，则还可以过点B作$\odot O$的切线BN，如图1－7，有$\angle 6=\angle 1$，又可由$BN\parallel DF$，得$\angle 6=\angle 2$，从而得到$\angle 1=\angle 2$．解法也较为简便．

当然，如果对“圆内角”的概念有所了解，那么，不必添加辅助线，利用弦切角、圆内角和相应的弧之间的度量关系，直接得到$\angle 1=\angle 2$，这就更方便了．

一道平平常常的数学题，由于我们的着眼点不同，或处

理方法相异，竟可找到这样许多解法，数学题就是这样为我们施展才华、发挥智慧提供机会的。所以，我们可以毫不夸张地说，思考并解决数学问题是一种独立的创造性的活动，其中充满了乐趣。

（三）写出解题的过程

如何表述解题过程？总的要求是简洁明瞭，层次分明，详略适度，严谨规范。要做到“想得正确、合理，说得简洁、明白，写得整齐、规范”。书写的格式，一般可以模仿课本上的例题。

（四）回顾、总结

这里包含着两层意思：一是解题过程中的“回顾”，即对上述各个环节及时地进行审查、核验和深入地探讨，以保证对题目作出正确、合理的解答；二是完成题解以后，还要深入思考，回顾一下问题中涉及到哪些基本概念，它们是如何联系起来的？解题时用了哪些法则、定理和公式，能不能改用别的定理、法则和公式来代替？解题时运用了哪些基本方法，这些方法是怎样想到的，还有没有别的更简捷的解法？这道题与过去解过的问题有什么联系，能不能从中概括出某些带有规律性的东西？有时还可以对题目的条件和结论作一些推敲，或是把问题进一步地推广，或者把条件和结论做适当的变换，研究一下可能得到什么样的新题目？新的问题与原题有什么联系？解法上有什么异同？等等。

例如，1992年上海市的中考数学试题中有这样一道题：

例4 如图1－8，已知在圆内接四边形$ABCD$中，$AD\neq AB$，$\angle DAB=90°$，对角线AC平分$\angle DAB$。

（1）求证：$DC=BC$；

（2）设$AD=a$，$AB=b$，求AC的长。

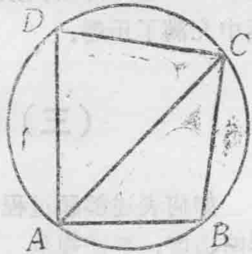


图1－8

该题的结论（1）很容易得到。由$\angle DAC=\angle BAC$，可得$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}$，立即可证得$DC=BC$。结论（2）却有一定的难度：已知$AC$平分$\angle DAB$，但一时又用不上；$AC$是外接圆的一条弦，在通常情况下，可利用弦、弦心距与半径构成的直角三角形来求解，但此路也不通。

研究题目中给出的信息，我们只知道：$\angle DAC=\angle BAC=45°$，$AD=a$，$AB=b$。比较自然的想法是利用余弦定理求解。

方法一 设$AC=x$，则有$DC^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos45°$，即$DC^2=a^2+x^2-\sqrt{2}ax$。

这时，虽然DC的长度未知，但还有一个类似的三角形ABC可供利用。即同理可得

$$BC^2=b^2+x^2-\sqrt{2}bx.$$

根据结论（1），则有$a^2+x^2-\sqrt{2}ax=b^2+x^2-\sqrt{2}bx$，

即 $\sqrt{2}(a-b)x=a^2-b^2$，

$\because\ a\neq b$，$\quad\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$。

方法二 在得到$DC^2=a^2+x^2-\sqrt{2}ax$以后，一定会有

不少同学把注意力集中在“如何求出DC的长”上。DC能否求出？经过一番探索也许不难发现$\angle DAB$是90°的圆周角。于是想到，连结BD，如图1－9。

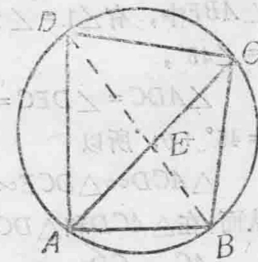


图1－9

$\because \angle DAB=90^\circ$，$\therefore BD$是外接圆的直径，由此可以求得

$$BD=\sqrt{a^2+b^2},\ BC=DC=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

从而

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+x^2-\sqrt{2}ax,$$

即$2x^2-2\sqrt{2}ax+a^2-b^2=0$，解得$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a\pm b)$。

此时，若令四边形$ABCD$的外接圆半径为R，则总有

$$AC>BC=\sqrt{2}R=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2R>\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

所以应舍去$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$，得$AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$。

这里，最后一步有关“取舍”的讨论，首先是容易被忽略，同时也颇费周折。因而，不如第一种证法来得简捷。

方法三 连结BD以后，根据图形的特征，受证明相交弦定理的方法启发，还会使人想到：能否通过相似三角形和比例线段来求AC？

经过尝试，立即可以知道，那种与证明相交弦定理时类似的方法，对于该题行不通，因为那样只能得到“$AE\cdot CE$”（见图1－10）。于是又会产生“分别求出AE、CE的长”的念头。通过进一步分析发现，若令$\angle ADB=\theta$，则$\angle ACB$