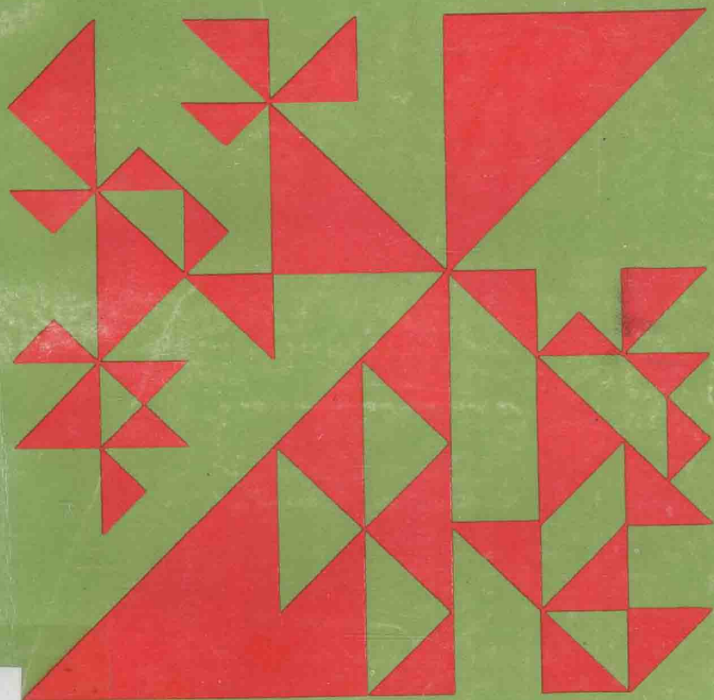


初中数学题型、方法与训练

主编 万庆炎 副主编 杨裕前



科学普及出版社

初中数学题型、方法与训练

主 编 万庆炎

副主编 杨裕前

科学普及出版社

北 京

(京)新登字026号

初中数学题型、方法与训练

主 编 万庆炎

副主编 杨裕前

科学普及出版社出版

(北京海淀区白石桥路32号 邮政编码: 100081)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

江苏省丹徒县印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 9.875 字数: 247千字

1994年10月第1版 1994年10月第1次印刷

印数 1—8000

ISBN 7-110-03315-5/G·1341

定价: 5.60元

前 言

“数学重要”，这大概不会有人反对；“数学难学”！这又是许多人发自内心的感叹。

1987年，国家教委在全国范围内组织过一次初中语文、数学两科教学状况的调查，调查结果表明：

1. 当年的初三学生中，大约有 $\frac{3}{5}$ 的学生数学达到合格水平。

2. 如果从小学入学时算起，这一届初三学生，是经历了小学阶段和中学的三年里逐步淘汰后剩下的“幸运者”，他们只占当年进入小学一年级时的总人数的50%。

上述两个统计结果告诉我们，当年一同进入小学的同龄人，经过8~9年时间的学习，最后数学达到初中合格水平的只有 $\frac{1}{3}$ 左右。

调查结果还告诉我们：这些幸运的初中生，平均每周要上300多分钟的数学课（实际可能会更多些），他们当中有一半以上的人感到睡眠不足，结果还有 $\frac{2}{3}$ 以上的同学感到学习数学有些困难甚至很困难！

同学们反映：初中三年，天天要上数学课，课后总要做作业。面对那些大同小异的习题，一遍又一遍地算个不停，一题又一题地永远也做不完，可是最终脑子里仍然是空荡荡的。到了初三复习迎考的时候，书包里揣着6本数学课本，

还有这样那样的练习册和复习资料，那么多的内容，那么多的习题，实感千头万绪，无所适从，于是，睡也不安，食也不香，心焦意烦。进考场就像进战场一样，心里也想着要去勇敢地拼搏一番，但手里却没有“武器”。

眼看着成千上万的初中生，付出了这么多的时间和精力，承受着这样重的作业负担和心理压力，却又得不到理想的成绩，怎不令人焦虑不安？

当然，要改变这种局面，决非一朝一夕之事。这是一项浩大的工程，要靠许多志士仁人从各个方面去努力工作。比如说，要把教学的内容适当删减一些；要求和难度也要相应地降低；知识的结构要调整；教的方法、学的方法以及训练方法都要变革；还涉及到考试制度与方法的改革，等等。我们编写《初中数学题型、方法与训练》，其目的就是想为这项浩大的工程做一点添砖加瓦的工作。

大家知道，数学一向被誉为“科学的皇后”，她的头上有一圈神奇的光环，脸上覆盖着一层轻柔的面纱，隐藏着无穷的奥秘与乐趣。只是当你揭去其面纱时，她才会向你展现她的无与伦比的容颜！全部初中数学，虽然都是数学中那些最简单的、最基本的知识，但它们是组成女皇身躯的原始“细胞”，其中蕴含着丰富的数学思想方法。这些闪耀着生命活力的数学思想方法，才是我们的“科学皇后”的“灵气”之所在。因此，同学们在学习基础知识的同时，更应努力地去掌握一些数学的思想与方法，并把它们与所学的知识融为一体；要学会从思想与方法的高度去领会、理解、掌握有关知识的内在联系，从而运用这些方法和思想去分析问题、解决问题。在我们这本小册子里，虽然也向大家介绍了数学题的“题型”，也讲了一点如何进行解题“训练”的

问题，但所有这些内容都是围绕着数学思想方法这个主题展开的。

逢山要开路，过河要架桥，这似乎是常识问题。同学们可曾想过，数学知识就好比是一座山，那千变万化的数学题就犹如一条河，只有努力地去钻研解决那“开路”、“架桥”的技术，才能在你面前展现出一条坦途。

在这里，我们已经把自己的认识和想法作了介绍。对于我们这些长期搞数学教学的人来说，这是肺腑之言，经验之谈，但对于同学们，则不知效果将会如何？所以，在我们把这本小册子献给大家的同时，恳请广大初中数学老师和同学给予批评指正。并借此机会，向支持我们编写本书的许多同志，特别是苏州大学的陆鼎一、秦淦老师表示衷心的感谢！

编 者

1994年2月

目 录

一、怎样解数学题	(1)
二、怎样解选择题(一)	(16)
三、怎样解选择题(二)	(29)
四、怎样解选择题(三)	(42)
五、怎样解选择题(四)	(53)
六、填空题及其解法	(64)
七、利用基本图形思考问题	(75)
八、几何证题中的辅助线	(85)
九、用运动变化的观点研究几何问题	(95)
十、数形结合法	(114)
十一、分类法	(12)
十二、图形变换法	(140)
十三、反证法	(149)
十四、待定系数法	(159)
十五、配方法	(172)
十六、面积法	(189)
十七、一题多解	(201)
十八、特殊与一般	(220)
十九、定势与发散	(230)
二十、综合训练(一)	(242)

二十一、综合训练(二)	(249)
二十二、综合训练(三)	(260)
二十三、综合训练(四)	(277)
综合练习题	(295)
综合练习题解答或提示	(300)

(1)	医学物理知识	一
(2)	(一) 医学物理知识	二
(3)	(二) 医学物理知识	三
(4)	(三) 医学物理知识	四
(5)	(四) 医学物理知识	五
(6)	医学物理知识	六
(7)	医学物理知识	七
(8)	医学物理知识	八
(9)	医学物理知识	九
(10)	医学物理知识	十
(11)	医学物理知识	十一
(12)	医学物理知识	十二
(13)	医学物理知识	十三
(14)	医学物理知识	十四
(15)	医学物理知识	十五
(16)	医学物理知识	十六
(17)	医学物理知识	十七
(18)	医学物理知识	十八
(19)	医学物理知识	十九
(20)	医学物理知识	二十
(21)	医学物理知识	二十一
(22)	医学物理知识	二十二
(23)	医学物理知识	二十三
(24)	医学物理知识	二十四
(25)	医学物理知识	二十五
(26)	医学物理知识	二十六
(27)	医学物理知识	二十七
(28)	医学物理知识	二十八
(29)	医学物理知识	二十九
(30)	医学物理知识	三十
(31)	医学物理知识	三十一
(32)	医学物理知识	三十二
(33)	医学物理知识	三十三
(34)	医学物理知识	三十四
(35)	医学物理知识	三十五
(36)	医学物理知识	三十六
(37)	医学物理知识	三十七
(38)	医学物理知识	三十八
(39)	医学物理知识	三十九
(40)	医学物理知识	四十
(41)	医学物理知识	四十一
(42)	医学物理知识	四十二
(43)	医学物理知识	四十三
(44)	医学物理知识	四十四
(45)	医学物理知识	四十五
(46)	医学物理知识	四十六
(47)	医学物理知识	四十七
(48)	医学物理知识	四十八
(49)	医学物理知识	四十九
(50)	医学物理知识	五十
(51)	医学物理知识	五十一
(52)	医学物理知识	五十二
(53)	医学物理知识	五十三
(54)	医学物理知识	五十四
(55)	医学物理知识	五十五
(56)	医学物理知识	五十六
(57)	医学物理知识	五十七
(58)	医学物理知识	五十八
(59)	医学物理知识	五十九
(60)	医学物理知识	六十
(61)	医学物理知识	六十一
(62)	医学物理知识	六十二
(63)	医学物理知识	六十三
(64)	医学物理知识	六十四
(65)	医学物理知识	六十五
(66)	医学物理知识	六十六
(67)	医学物理知识	六十七
(68)	医学物理知识	六十八
(69)	医学物理知识	六十九
(70)	医学物理知识	七十
(71)	医学物理知识	七十一
(72)	医学物理知识	七十二
(73)	医学物理知识	七十三
(74)	医学物理知识	七十四
(75)	医学物理知识	七十五
(76)	医学物理知识	七十六
(77)	医学物理知识	七十七
(78)	医学物理知识	七十八
(79)	医学物理知识	七十九
(80)	医学物理知识	八十
(81)	医学物理知识	八十一
(82)	医学物理知识	八十二
(83)	医学物理知识	八十三
(84)	医学物理知识	八十四
(85)	医学物理知识	八十五
(86)	医学物理知识	八十六
(87)	医学物理知识	八十七
(88)	医学物理知识	八十八
(89)	医学物理知识	八十九
(90)	医学物理知识	九十
(91)	医学物理知识	九十一
(92)	医学物理知识	九十二
(93)	医学物理知识	九十三
(94)	医学物理知识	九十四
(95)	医学物理知识	九十五
(96)	医学物理知识	九十六
(97)	医学物理知识	九十七
(98)	医学物理知识	九十八
(99)	医学物理知识	九十九
(100)	医学物理知识	一百

一、怎样解数学题

学习数学，离不开解题。怎样才能顺利地解数学题，是中学生既感到棘手又急于解决的问题。对此，前苏联数学家雅诺卡夫娜说：“解题就是把题归结为已经解过的题。”这是什么意思呢？让我们先看一个例子。

第五届全国部分省市初中数学通讯赛有这样一道试题：如图 1-1， $AC = AD = DE = EA = BD$ ， $\angle BDC = 28^\circ$ ， $\angle ADB = 42^\circ$ ，则 $\angle BIC =$ _____。

这道填充题不算太难，只需利用等腰三角形和等边三角形的一些知识，即可求得 $\angle BEC = 19^\circ$ 。但是，由于相关的三角形交织在一起，不那么容易区分。因此一方面有不少学生在一个又一个三角形中绕了

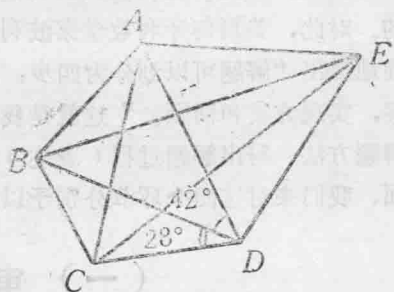


图 1-1

许多弯子，最终还是没有求得结果；另一方面，我们也从答卷中发现了一种巧妙的解答：根据已知条件，点 C、D、E 应在以 A 为圆心，AD 为半径的圆上；点 B、A、E 在以 D 为圆心、DA 为半径的圆上。这时，如图 1-2， $\angle AEB$ 与 $\angle ADB$ 是对 $\widehat{AB}$ 的圆周角与圆心角， $\angle CED$ 与 $\angle CAD$ 是对 $\widehat{CD}$ 的圆周角

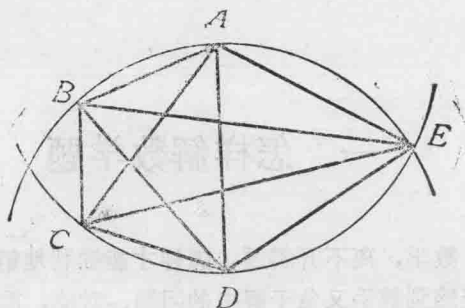


图 1 - 2

与圆心角,关系十分明确。而 $\angle AED = 60^\circ$, $\angle CAD = 180^\circ - 2\angle ADC = 180^\circ - 2(42^\circ + 28^\circ) = 40^\circ$, 问题就比较容易解决。

由此,可以清楚地看到,所谓解题,就是从未知到已知的转化。因此,值得认真研究的是这种转化是如何实现的。对此,美籍匈牙利数学家波利亚曾在《怎样解题》中明确地提出“解题可以划分为四步:即理解题意,建立解题方案,实现方案和回顾。”这就是我们通常所讲的审题、探索解题方法、写出解题过程(表述)和回顾总结四个环节。下面,我们来对这四个环节分别予以阐述。

(一) 审题

审题,就是要弄清题意,这是发现解法的前提。俗话说:“问题想得透彻,就意味着问题解决了一半。”讲的就是这个意思。

弄清题意,具体地讲,就是要初步的、然而必须是全面地理解题意,搞清楚题中的已知条件和结论是什么?题中涉及到哪些概念,它们的含义是什么?在此基础之上引入适当的

符号、画出必要的图形(或示意图),把题目的条件与要求的问题(或结论)清楚地表示出来。有时,还要注意发现题目中那些比较隐蔽的条件。

在审题时,发掘题目中的隐蔽条件,是较高的要求,但它确实有助于我们发现解法、并顺利地完成任务。例如,上面那道竞赛题,如果在审题过程中能够及时发现,点C、D、E和点B、A、E分别在一个圆上,那么作出解答就不难了。

这项工作,有时也并不困难,但容易忽视,并由此常常造成解题的障碍。如

例1 a 为何值时,方程组

$$\begin{cases} 4x^2 - 2ax + 12y^2 + 1 = 0 \\ y^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) \end{cases}$$

没有实数解。

该题在消去 y 以后,得到

$$4x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = [(-2a)^2 - 4 \cdot 4(2a - 3)] = 4a^2 - 32a + 48 < 0,$$

解得 $a < 2$, 或 $a > 6$ 。

这里,忽略了 $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) = y^2 \geq 0$, 即 $a \geq 2$ 这个隐含的条件。事实上,正确答案应为 $a > 6$ 。

(二) 探索解题方法

探索解题方法,就是寻求已知与未知联系的途径,从而实现由已知向未知的转化。这是解答数学题的关键,是一件

十分有魅力的工作。正如波利亚所说：“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋，因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动。”当你经历了多次尝试和几番犹豫不决之后，突然闪出了一个“好念头”，终于把问题解决了，那种成功的喜悦，简直就是一种无法比喻的享受。如

例2 设 a 、 b 都是实数、且 $b = \frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{1 - a^2}}{a + 1}$ ，求 $a + b$ 的值。

处理这类题，常常会从变换已知条件入手，但经过尝试以后容易发现，这条路走不通。既然无法把 b 的表达式 $\frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{1 - a^2}}{a + 1}$ 进行变换，那么能不能先求 a 呢？由此想到利用算术平方根和公式的意义等隐含在题目中的条件，从而找到合理的解题途径。

解 $\because b$ 为实数，则必有

$$\begin{cases} a^2 - 1 \geq 0, \\ 1 - a^2 \geq 0. \end{cases}$$

从而解得 $a^2 - 1 = 0$ ，即 $a = \pm 1$ 。

又 $\because$ 分母 $a + 1 \neq 0$ ， $\therefore a = 1$ 。

$$\therefore b = \frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{1 - a^2}}{a + 1} = 0,$$

$$\therefore a + b = 1 + 0 = 1.$$

例3 如图1-3, A 是 $\odot O$ 的直径上的一点, OB 是和这条直径垂直的半径, BA 和 $\odot O$ 相交于另一点 C , 过点 C 的切线和 OA 的延长线相交于 D . 求证: $DA = DC$.

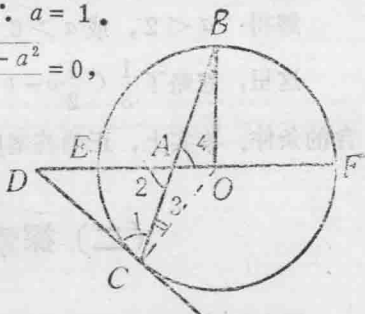


图 1-3

这是《几何》课本上的一道题，也是我们用以说明探索解题方法的一道好题。要证 $\triangle DAC$ 的两边相等，很自然地会想到把问题转化为证 $\angle 1 = \angle 2$ 。下面，我们从不同的角度出发，对该题作进一步的分析：

(1) 由于点 C 是切点，连结 OC ，则有 $\angle 1 = 90^\circ - \angle 3$ 。因此，需要探索 $\angle 2$ 是否也与某一个直角有关。事实上， $\angle 2 = \angle 4 = 90^\circ - \angle B$ ，剩下的问题就是 $\angle 3$ 是否等于 $\angle B$ ？而这个结论是非常明显的。

(2) 由于 $\angle 2 = \angle 4 = 90^\circ - \angle B$ ，因而，如图1-4，可以考虑延长 BO 交 $\odot O$ 于 G ，再连结 CG ，则 $\angle B = \angle 5$ 。这时只需再证明 $\angle 1$ 等于 $90^\circ - \angle 5$ ，因为 BG 是 $\odot O$ 的直径，所以 $\angle BCG = 90^\circ$ ，也就是说，确有 $\angle 1 = 90^\circ - \angle 5$ ，问题也就迎刃而解。

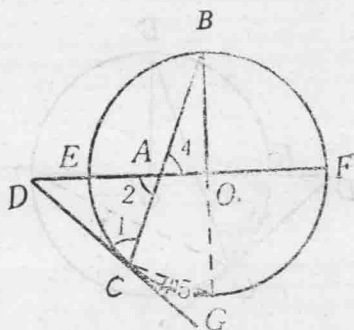


图1-4

(3) 由于 $\angle 1$ 是弦切角，它所夹的弧是 $\widehat{CEB}$ ，即 $\widehat{CE} + \widehat{EB}$ 。所以想到连结 BF 、 CF 。如图1-5，有 $\angle BFC = \angle 1$ 。那么 $\angle BFC$ 是否等于 $\angle 2$ 呢？容易发现 $\angle 2 = \angle ACF + \angle AFC$ ，其中 $\angle AFC$ 正好是 $\angle BFC$

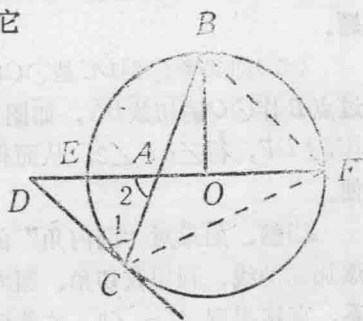


图1-5

的一部分。因此，剩下的问题是只需证明 $\angle ACF = \angle AFE$ ，这由 $\widehat{BE} = \widehat{BF}$ 很容易证得。

(4) 如果连结 CE 、 CF ，如图1-6。 $\angle 1$ 被分成 $\angle DCE$ 、 $\angle ECA$ 两部分， $\angle 2$ 为 $\triangle ACF$ 的外角，等于 $\angle ACF$ 与 $\angle AFC$ 的和，且显然有 $\angle DCE = \angle AFC$ ，因此，剩下的问题就是 $\angle ECA$ 是否等于 $\angle ACF$ 了。这时，利用 $\widehat{EB} = \widehat{BF}$ ，问题也很容易地解决了。

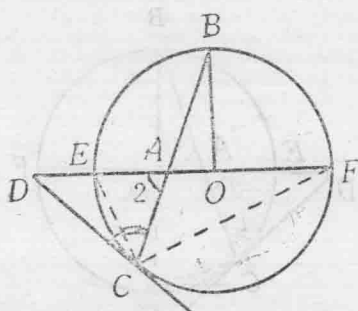


图1-6

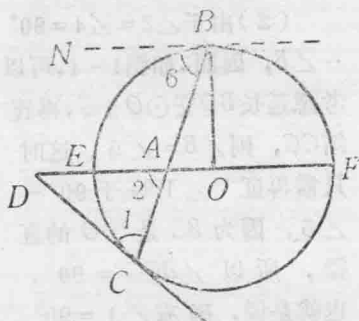


图1-7

类似地，如果连结 CE 和 BE ，也可用同样方法解决问题。

(5) 如果考虑到 DC 是 $\odot O$ 的切线， $OB \perp EF$ ，则还可以过点 B 作 $\odot O$ 的切线 BN ，如图1-7，有 $\angle 6 = \angle 1$ ，又可由 $BN \parallel DF$ ，得 $\angle 6 = \angle 2$ ，从而得到 $\angle 1 = \angle 2$ 。解法也较为简便。

当然，如果对“圆内角”的概念有所了解，那么，不必添加辅助线，利用弦切角、圆内角和相应的弧之间的度量关系，直接得到 $\angle 1 = \angle 2$ ，这就更方便了。

一道平平常常的数学题，由于我们的着眼点不同，或处

理方法相异，竟可找到这样许多解法，数学题就是这样为我们施展才华、发挥智慧提供机会的。所以，我们可以毫不夸张地说，思考并解决数学问题是一种独立的创造性的活动，其中充满了乐趣。

（三）写出解题的过程

如何表述解题过程？总的要求是简洁明瞭，层次分明，详略适度，严谨规范。要做到“想得正确、合理，说得简洁、明白，写得整齐、规范”。书写的格式，一般可以模仿课本上的例题。

（四）回顾、总结

这里包含着两层意思：一是解题过程中的“回顾”，即对上述各个环节及时地进行审查、核验和深入地探讨，以保证对题目作出正确、合理的解答；二是完成题解以后，还要深入思考，回顾一下问题中涉及到哪些基本概念，它们是如何联系起来的？解题时用了哪些法则、定理和公式，能不能改用别的定理、法则和公式来代替？解题时运用了哪些基本方法，这些方法是怎样想到的，还有没有别的更简捷的解法？这道题与过去解过的问题有什么联系，能不能从中概括出某些带有规律性的东西？有时还可以对题目的条件和结论作一些推敲，或是把问题进一步地推广，或者把条件和结论做适当的变换，研究一下可能得到什么样的新题目？新的问题与原题有什么联系？解法上有什么异同？等等。

例如，1992年上海市的中考数学试题中有这样一道题：

例4 如图1-8, 已知在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AD \neq AB$, $\angle DAB = 90^\circ$, 对角线 AC 平分 $\angle DAB$.

(1) 求证: $DC = BC$;

(2) 设 $AD = a$, $AB = b$, 求 AC 的长.

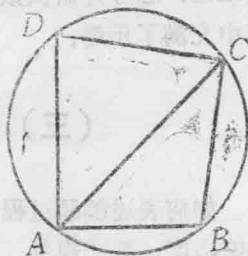


图 1-8

该题的结论(1)很容易得到. 由 $\angle DAC = \angle BAC$,

可得 $\widehat{DC} = \widehat{BC}$, 立即可证得 $DC = BC$. 结论(2)却有一

定的难度: 已知 AC 平分 $\angle DAB$, 但一时又用不上;

AC 是外接圆的一条弦, 在通常情况下, 可利用弦、弦心距与半径构成的直角三角形来求解, 但此路也不通.

研究题目中给出的信息, 我们只知道: $\angle DAC = \angle BAC = 45^\circ$, $AD = a$, $AB = b$. 比较自然的想法是利用余弦定理求解.

方法一 设 $AC = x$, 则有 $DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos 45^\circ$, 即 $DC^2 = a^2 + x^2 - \sqrt{2}ax$.

这时, 虽然 DC 的长度未知, 但还有一个类似的三角形 ABC 可供利用. 即同理可得

$$BC^2 = b^2 + x^2 - \sqrt{2}bx.$$

根据结论(1), 则有 $a^2 + x^2 - \sqrt{2}ax = b^2 + x^2 - \sqrt{2}bx$,

$$\text{即 } \sqrt{2}(a-b)x = a^2 - b^2,$$

$$\because a \neq b, \quad \therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

方法二 在得到 $DC^2 = a^2 + x^2 - \sqrt{2}ax$ 以后, 一定会有

不少同学把注意力集中在“如何求出 DC 的长”上。 DC 能否求出？经过一番探索也许不难发现 $\angle DAB$ 是 90° 的圆周角。于是想到，连结 BD ，如图 1-9。

$\because \angle DAB = 90^\circ$, $\therefore BD$ 是外接圆的直径，由此可以求得

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad BC = DC \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} BD = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2},$$

从而

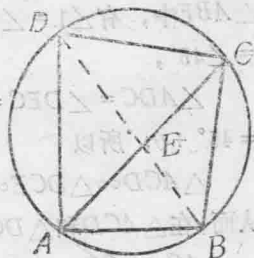


图 1-9

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 = a^2 + x^2 - \sqrt{2} ax,$$

$$\text{即 } 2x^2 - 2\sqrt{2} ax + a^2 - b^2 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a \pm b).$$

此时，若令四边形 $ABCD$ 的外接圆半径为 R ，则总有

$$AC > BC = \sqrt{2} R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2R > \frac{\sqrt{2}}{2} a,$$

$$\text{所以应舍去 } \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b), \text{ 得 } AC = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

这里，最后一步有关“取舍”的讨论，首先是容易被忽略，同时也颇费周折。因而，不如第一种证法来得简捷。

方法三 连结 BD 以后，根据图形的特征，受证明相交弦定理的方法启发，还会使人想到：能否通过相似三角形和比例线段来求 AC ？

经过尝试，立即可以知道，那种与证明相交弦定理时类似的方法，对于该题行不通，因为那样只能得到“ $AE \cdot CE$ ”（见图 1-10）。于是又会产生“分别求出 AE 、 CE 的长”的念头。通过进一步分析发现，若令 $\angle ADB = \theta$ ，则 $\angle ACB$