

初中代数 类型题解法大全

赵云田 主编



东北朝鲜民族教育出版社

初中各科类型题解法大全

初中代数类型题解法大全

主 编 赵云田
编 委 徐玉海 佟庆革

东北朝鲜民族教育出版社

(吉) 新登字 09 号

《初中各科类型题解法大全》编委会

主 任：刘贵富

委 员：毛正文 马忠学

赵云田 钟忻和

张 燕 王俊波

初中各科类型题解法大全

(初中代数类型题解法大全)

赵云田 主编

责任编辑：梁春光

封面设计：张沐沉

东北朝鲜民族教育出版社出版
(延吉市友谊路 11 号)

吉林省新华书店发行
吉林省科技印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32

1997 年 11 月第 1 版

总 印 张：130.5 总 字 数：2931 千字

1997 年 11 月第 1 次印刷

本册印张：14.0 本册字数：314 千字

印数：1—8000 册

ISBN 7-5437-3031-6/G · 2758

总 定 价：151.20 元

本册定价：16.80 元

如发现印装质量有问题，请与印厂联系调换。

前 言

本书是一套全新体系的实用工具书，分《初中代数类型题解法大全》、《初中物理类型题解法大全》、《初中化学类型题解法大全》、《平面几何辅助线引法大全》、《初中语文基础知识大全》、《初中语文阅读分析大全》、《初中英语阅读理解大全》、《初中历史类型题解法大全》九册出版。它是第一线优秀教师多年教学经验的总结，是教师、家长、学生皆喜欢的优秀参考书。它依据国家教委新教学大纲的要求，密切配合现行《九年义务教育三年制初级中学教科书》的内容和教学顺序，将每学科的基础知识通过类型题的解法变得具体化和系统化，使抽象的理论知识变成具体的灵活的实际应用能力。

本书所选择的例题具有典型性和趣味性，解题思路具有广阔性和灵活性，解题方法具有规范性和独特性，每一章节都注重了题型的归类与解法的归纳总结，且例题、习题的选编做到由浅入深，层次清楚，同时还注意将学习方法渗透到对知识的理解与消化之中，对学生所学知识进行层层引导，适时点拨，以达到开发思路，拓宽思维，激发兴趣，提高能力，增强素质的目的。

《初中各科类型题解法大全》编委会

目 录

CONTENTS

上 编 同步类型题解法大全

第一章	代数初步知识	(1)
第二章	有理数	(11)
第三章	整式的加减	(23)
第四章	一元一次方程	(31)
第五章	二元一次方程组	(60)
第六章	一元一次不等式和一元一次不等式组...	(78)
第七章	整式的乘除	(91)
第八章	因式分解	(104)
第九章	分 式	(124)
第十章	数的开方	(160)
第十一章	二次根式	(170)
第十二章	一元二次方程	(205)
第十三章	函数及其图象	(295)
第十四章	统计初步	(345)

下 编 综合类型题解法大全

综合类型题详解	(357)
附：各章类型题精练答案或提示	(415)

上 编

同步类型题解法大全

第一章 代数初步知识

【类型题解法概述】

掌握好代数式的读与写是学好本章内容的关键。同时也是以后学习有理数、整式、分式、方程、函数等知识的基础。为此，要注意以下几点。

一、掌握代数式的正确读法

代数式的读法虽然不是唯一，但一定要反映出数量与数量之间的某种相互关系。一般的是将数量之间的运算结果读出来。

例 1 读出下列代数式

(1) $2(m+n)$; (2) $m+2n$; (3) $2a-(5b)^2$; (4) $(2a-5b)^2$

解：(1) 应读作“ m 与 n 的和的 2 倍”。而不能读成“ m 加上 n 的 2 倍”，这样会误以为是 $m+2n$ ；

(2) 应读作“ m 与 n 的 2 倍的和”；

(3) 应读作“ a 的 2 倍与 b 的 5 倍的平方的差”。而不能读成“ a 的 2 倍减去 b 的 5 倍的平方”。这样会误以为是 $(2a-5b)^2$ ；

(4) 应读作“ a 的 2 倍与 b 的 5 倍的差的平方”。

掌握了代数式的准确读法就可以将数量之间的关系用代数式来表示.

二、列代数式的规则

代数式就是用基本的运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子. 单独的一个数或一个字母也是代数式. 列代数式是把用文字语言表述的数量或数量关系用数学式子表示出来. 列代数式时应做到:

1. 首先弄清关键的词语的含义, 正确地选择运算符号
在列代数式时要弄清和、差、积、商、幂、大、小、多、少、倍、分、相反数、倒数、绝对值等词语的含义, 并把它们化为相应的运算. 如“ a 的 3 倍与 b 的 2 倍的和”这里的两个关键词语“倍”、“和”应分别转化为运算“ $\times$ ”、“ $+$ ”. 这句话列成代数式为 $3a + 2b$.

这里还要注意大、小的关系. 谁比谁大、大多少, 谁比谁小、小多少. 不能见着有大就加; 见着小就减.

例 2 用代数式表示下列各数

①比 x 大 3 的数; ② x 比一个数大 3, 这个数是多少.

解: ①比 x 大 3 的数是 $x + 3$;

② x 比一个数大 3, 这个数是 $x - 3$.

2. 注意分清层次, 逐层列式

在某些数量关系的表达式中, 常常会出现许多“的”字, 在列代数式时, 要抓住每个“的”字, 把它分成几个层次, 逐层来列代数式.

例 3 用代数式表示

比 a 与 b 的差的一半小 1 的数

分析 语句中含有三个“的”字, 这样将整个语句分为三个层次. 逐层列出代数式: ① a 与 b 的差: $a - b$; ② a 与 b

的差的一半: $\frac{1}{2}(a-b)$; ③比 a 与 b 的差的一半小 1 的数:
 $\frac{1}{2}(a-b) - 1$.

解: 比 a 与 b 的差的一半小 1 的数用代数式表示为 $\frac{1}{2}(a-b) - 1$.

3. 分清运算顺序, 正确使用括号

在语言叙述的数量关系中, 一般是先读的先写. 当不同级运算出现在同一问题中, 而又要先做低级运算时, 应用括号把较低的运算括起来.

例 4 用代数式表示下列各数

① a 与 b 的 2 倍的差的一半;

② a 的 2 倍与 b 的 3 倍的差的平方.

解: ① $\frac{1}{2}(a-2b)$;

② $(2a-3b)^2$.

4. 注意书写格式

在列代数式时, 要求书写格式规范化, 并做到

①在同一问题中, 不同的对象或不同的数量, 必须用不同的字母来表示. 如: 三角形的面积等于底乘以高的一半, 底边用 a 表示, 高用 h 表示, 则 $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot h$

②字母与字母相乘时省略乘号. 数字与字母相乘时也省略乘号, 并把数字写在前面.

如: $m \times n$ 写成 mn .

$a \times 3$ 写成 $3a$, 但不能写成 $a3$.

③带分数与字母相乘时, 通常把带分数化成假分数.

如: $1\frac{3}{4} \times m$ 写成 $\frac{7}{4}m$.

④相除关系一般写成分数的形式.

如: x 与 y 的和与它们的积的商, 表示式 $\frac{x+y}{xy}$, 而不写成 $(x+y) \div xy$, 百分数也应写成分数形式.

如 $80\%x$ 写成 $\frac{80}{100}x$.

⑤列代数式一般不写单位, 如遇应用题等需要注明单位时, 若结果是乘除关系的, 单位名称写在式子后面; 若所列代数式是和差形式的, 应用括号将代数式括起来, 再写上单位名称.

如: $6v$ 千米/时 $(a+b)$ 米.

以上诸项在列代数式时要十分注意.

【类型题详解】

例 1 用代数式表示

- (1) x 的立方与 y 的和除以 a ;
- (2) -2 的绝对值加上 x 的 3 倍;
- (3) x 与 y 的和的相反数乘以 a 与 b 之和的积;
- (4) a 与 b 的和的平方除以 a 与 b 的平方差所得的商.

分析 (1)、(2) 叙述的是数量之间的运算顺序, 因此可按叙述的顺序用代数式表示; (3)、(4) 叙述的是运算的结果, 即 (3) 所表示的最终形式应是乘积的形式, (4) 所表示的最终形式应是商的形式. (3) 中有三个“的”将代数式分为四段: 第一段“ x 与 y 的和”表示为 $x+y$; 第二段“和的相反数”表示为 $-(x+y)$; 第三段“ a 与 b 之和”表示为 $a+b$; 第四段“乘以……和的积”即把前面的“和的相反数”乘以“ a 与 b 之和”, 用乘积形式表示并注意运用括号. (4) 中也可将代数式分为: 第一段“ a 与 b 之和”; 第二段“和的平方”; 第三段“ a 与 b 的平方差”; 第四段前面的“和”除以后

面的“差”用商表示.

解: (1) 可用代数式表示为: $\frac{x^3+y}{a}$;

(2) 可用代数式表示为: $|-2|+3x$;

(3) 可用代数式表示为: $-(x+y) \cdot (a+b)$;

(4) 可用代数式表示为: $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$.

例 2 有两个半径和为 5 厘米的两个圆, 其中一个圆的半径为 r 厘米, 用代数式表示这两个圆的周长之差; 面积之和.

分析 本题是圆的周长、面积公式的应用. 首先要用代数式分别表示这两个圆的半径, 之后利用圆周长公式 $C=2\pi R$ 和面积公式 $S=\pi R^2$ 分别表示之.

解: 因为两个圆半径之和为 5 厘米, 其中一个圆的半径为 r 厘米, 则另一个圆的半径为 $(5-r)$ 厘米.

由圆周长公式, 得两个圆周长之差为

$$2\pi(5-r) - 2\pi r; \text{ 或 } 2\pi r - 2\pi(5-r)$$

由圆面积公式, 得两圆面积之和为

$$\pi r^2 + \pi(5-r)^2$$

例 3 要制造 a 个零件, 原计划每天制造 b 个; 如果每天制造的零件数增加 5 个, 可以提前几天完成. 用代数式表示.

分析 本题是工作量问题, 此类问题首先要掌握如下等量关系:

$$\text{工作量} = \text{工作效率} \times \text{工作时间}$$

以此可得:

$$\text{工作时间} = \frac{\text{工作量}}{\text{工作效率}}$$

本题需先用代数式表示原计划需要几天完成; 工作效率提高后又需几天完成. 然后才可以表示出提前几天完成.

解：∵原计划完成 a 个零件所需时间为 $\frac{a}{b}$ (天)，

提高工作效率后完成 a 个零件所需时间为 $\frac{a}{b+5}$ (天)。

∴提前完成任务的时间为 $(\frac{a}{b} - \frac{a}{b+5})$ (天)。

例4 甲、乙两车分别从相距 360 千米的两地相向而行。甲车的速度是 50 千米/时，经过 4 小时后，两车相遇，求乙车的速度？

分析 本题是行程问题，这类问题的等量关系是路程 = 速度 × 时间，另外，相遇问题中，甲、乙所用的时间相同。依据这些等量关系可列出方程求解。

解：设乙车的速度为 x 千米/时

依题意，得

$$4(50+x) = 360$$

两边都除以 4，得

$$50+x=90$$

两边都减去 50，得

$$x=40$$

答：乙车的速度是 40 千米/时。

例5 一件工程甲单独做要 4 天完成，乙单独做要 6 天完成。现在甲、乙合作 1 天，余下的由乙单独做，还需几天完成？

分析 本题是工程问题，这类问题的等量关系式为：

工作量 = 工作效率 × 工作时间

若设总工作量为 1，那么甲的工作效率为 $\frac{1}{4}$ ，乙的工作效率为 $\frac{1}{6}$ ，这样甲、乙合作 1 天的工作量是 $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

解：设余下的由乙单独做，还需 x 天完成。

依题意，得

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{x}{6} = 1$$

$$\text{即 } \frac{5}{12} + \frac{x}{6} = 1$$

两边同时减去 $\frac{5}{12}$ 得

$$\frac{x}{6} = \frac{7}{12}$$

两边同时乘以 6，得

$$x = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ (天)}$$

答：余下的由乙单独做，还需 3.5 天。

例 6 已知一个梯形的上底长为 3cm，下底长为 7cm，面积为 15cm^2 ，求这个梯形的高。

分析 本题是梯形面积公式的应用题，梯形面积 $= \frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}$ ，于是可利用公式列出方程来。

解：设梯形的高为 $x\text{cm}$

由梯形面积公式，得

$$\frac{1}{2} (3+7) \cdot x = 15$$

$$\text{即 } 5x = 15$$

两边同时除以 5，得

$$x = 3$$

答：梯形的高为 3cm。

例 7 已知乙数是 40，如果乙数的 $\frac{7}{10}$ 比甲数的 $\frac{2}{5}$ 少 20，求甲数。

分析 本题首先要搞清乙数的 $\frac{7}{10}$ 怎样表示,若设甲数为 x ,那么甲数的 $\frac{2}{5}$ 又怎样表示;最后根据“乙数的 $\frac{7}{10}$ 比甲数的 $\frac{2}{5}$ 少20”列出方程.

解: 设甲数为 x

依题意, 得

$$\frac{2}{5}x = 40 \times \frac{7}{10} + 20$$

$$\text{即 } \frac{2}{5}x = 48$$

两边除以 $\frac{2}{5}$, 得

$$x = 48 \times \frac{5}{2} = 120$$

答: 甲数为120.

例8 把140袋洗衣粉分别装入5个大小相同的纸箱中,除一箱还差10袋装满外,其余4箱已装满,问每个纸箱可以装多少袋洗衣粉?

分析 4个纸箱已装满,只有一个纸箱还差10袋,若设每箱可装 x 袋,装满5箱洗衣粉一共是 $5x$ 袋,这比原有140袋多了10袋.若用 $5x-10$,就应等于原有140袋.于是可列出方程求解.

解: 设每个纸箱可以装 x 袋洗衣粉

依题意, 得

$$5x - 10 = 140$$

两边都加上10, 得

$$5x = 150$$

两边都除以5, 得

$$x=30$$

答：每个纸箱可以装 30 袋洗衣粉。

【类型题精练】

〔A 组〕

一、用代数式表示

1. 比 x 的相反数大 5 的数.
2. 设甲数为 x ，乙数为 y ，那么甲数的 3 倍与乙数的和的平方怎样表示.
3. 一个矩形的周长等于 40 厘米，若矩形的长为 a ，那么矩形的面积怎样表示.
4. 三个连续奇数，最大的数是 $2n+1$ (n 为自然数)，这三个连续奇数分别表示，其和怎样表示.
5. 公路全长 S 千米，骑自行车 t 小时可以走完全程，为了提前半小时走完全程，自行车每小时速度应该是多少千米.
6. a 是三位数， b 是一位数，如果把 b 置于 a 的左边，那么所成的四位数怎样表示.

二、求值

1. $a=4$ ， $b=1$ ， $c=\frac{1}{4}$ ，求代数式 $a^2 - \frac{b^2}{ac} - 3$ 的值；
2. 当 $a=\frac{2}{5}$ ， $b=\frac{1}{2}$ 时，求代数式 $a^2 - ab + b^2$ 的值.

〔B 组〕

一、用代数式表示

1. 两个数的立方和与这两个数立方差的乘积.
2. 三个连续整数的平方和.
3. 比某数的平方的百分之三十小 15 的数.
4. 一个两位数的十位数字是 a ，个位数字是 b ，如果把把这个两位数的十位数字与个位数字颠倒所得到新的两位数与

16 的差.

二、解答下列各题

1. 一项工程, 甲单独做需 a 天完成, 乙单独做需 b 天, 现在甲、乙合作几天完成任务.

2. 某工厂去年生产 x 台拖拉机, 今年比去年增产 $m\%$, 这个厂今年生产多少台拖拉机.

3. A、B 两边相距 120 千米, 甲以 30 千米/时的速度, 乙以 20 千米/时的速度分别从 A、B 出发相向而行, 问经过几小时两车相遇.

4. 一桶油, 连桶共重 50 千克, 倒出 $\frac{1}{3}$ 的油后, 称得重量为 35 千克, 问这桶油重量是多少?

5. 如果代数式 $a+2b-7$ 的值等于 2, 求代数式 $3a+6b-21$ 的值是多少?

6. 如果代数式 $6m-3n+5$ 的值等于 8, 试求代数式 $2m-n$ 的值是多少?

第二章 有理数

【类型题解法概述】

一、巧用加法运算律，使运算简捷，迅速

1. 把正数、负数分开进行加法运算

例1 计算 $(-3.78) + (-4.05) + (+6.17) + (-5.43) + (+2.14)$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= [(+6.17) + (+2.14)] + [(-3.78) \\ &\quad + (-4.05) + (-5.43)] \\ &= (+8.31) + (-13.26) \\ &= -4.95\end{aligned}$$

2. 把相加后能得到整数的加数相加在一起.

例2 计算 $(+32) + (-17) + (-1.57) + (-2.43) + (+68)$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= [(+32) + (+68)] + [(-1.57 + \\ &\quad (-2.43))] + (-17)] \\ &= (+100) + (-4) + (-17) \\ &= (+100) + [(-4) + (-17)] \\ &= (+100) + (-21) \\ &= +79\end{aligned}$$

3. 把分母相同或易于通分的数相加在一起

例3 计算 $\frac{3}{7} - \frac{5}{14} - \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{2}{25} - \frac{9}{14}$

$$\text{解：原式} = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{5}{14} - \frac{9}{14}\right) + \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{25}\right)$$

$$= 1 - 1 - \frac{8}{25}$$

$$= -\frac{8}{25}$$

4. 把整数、分数、小数分开相加

例4 计算 $6\frac{3}{5} + 24 + 4\frac{2}{5} - 16 - 6.8 - 3.2$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= (24 - 16) + (6\frac{3}{5} + 4\frac{2}{5}) + (-6.8 - 3.2) \\ &= 8 + 11 - 10 \\ &= 9\end{aligned}$$

5. 把带分数拆开相加

例5 计算 $-5\frac{1}{3} - 4\frac{3}{4} + 7\frac{5}{6} + 2\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= -5 - \frac{1}{3} - 4 - \frac{3}{4} + 7 + \frac{5}{6} + 2 + \frac{1}{4} \\ &= (-5 - 4 + 7 + 2) + (-\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4}) \\ &= (-9 + 9) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

二、巧用乘法运算律使计算简捷准确

1. 巧用乘法交换律和结合律

例6 计算 $(+8) \times (+136) \times (+\frac{1}{8}) \times (-\frac{1}{68})$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= -(8 \times \frac{1}{8}) \times (136 \times \frac{1}{68}) \\ &= -1 \times 2 \\ &= -2\end{aligned}$$

2. 巧用乘法分配律