中等师范学校课外活动用书

小学数学教材教法专题讲座选编

主编：杨钧洪　牛志英
编委：高　荆　肖鉴铿　黄世立
　　　周全英　何仕光　张德勤
审定：梁楚材

地质出版社

中等师范学校课外活动用书

小学数学教材教法专题讲座选编

主　编：杨钧洪　牛志英

编　委：高　荆　肖鉴铿　黄世立

周全英　何仕光　张德勤

审　定：梁楚材

地质出版社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

小学数学教材教法专题讲座选编/杨钧洪，牛志英主编. -北京：地质出版社，1997.1
ISBN 7-116-02316-X

Ⅰ.小… Ⅱ.①杨…②牛… Ⅲ.数学课-教学法-小学
Ⅳ.G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 00272 号

地质出版社出版发行
（100083 北京海淀区学院路 29 号）
责任编辑：杨友爱 王明超
*
北京市京东印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销
开本：787×1092 1/32 印张：6.125 字数：140000
1997 年 1 月北京第一版 · 1997 年 1 月北京第一次印刷
印数：1—10500 册 定价：4.80 元

ISBN 7-116-02316-X
G · 204

序

“课外活动是中等师范学校教学活动的有机组成部分.”几年来,各师范学校在落实“教学方案”,建立课内课程、实习课程与课外课程有机结合的课程体系,在突出必修课主体地位的同时,有计划、有目的、有组织的开展课外活动和教育实习活动中,取得了可喜的经验.但由于各地经济发展不平衡,教育的发展存在差异,因此课外活动与教育实习也有待进一步研究.

中师工委课外活动指导委员会为了交流各校开展课外活动和教育实习的成功经验,将各校实际教学中讲过的,受到学生欢迎的,有利于拓宽学生知识面和扩大科技眼界的教学专题讲座,以及有利于培养学生的教师素质和小学数学教学能力的小学数学教材教法专题讲座,经过精心优选后,编写了《中等师范学校数学专题讲座选编》和《小学数学教材教法专题讲座选编》,供各校开展数学课外活动和指导小学数学教育实习活动时选用.这是一项有益的举措.

必修课和课外活动是教学形式不同的课程,我们不仅要有必修课教材,选修课教材,也应有一定的活动课教材,进一步优化课程结构,全面提高中师教育教学质量.

这套《选编》集思广益,发挥了群体优势,希望它的出版和试用,将给中师课外活动和教育实习带来新的活力,推向新的水平.

方明一

1996 年 9 月

前　言

根据“中师教学方案”的精神，《三年制中等师范学校数学教学大纲(试行)》中明确规定：“数学课外活动和教育实践活动是数学教学活动的有机组成部分，各校要有目的、有计划、有组织地进行.”中师工委课外活动指导委员会为了落实《大纲》要求，交流各校开展课外活动和教育实践活动的成功经验，将各校实际教学中讲过的，受到学生欢迎的，有利于拓宽学生知识面和扩大科技眼界的数学专题讲座，以及有利于培养学生的教师素质和小学数学教学能力的小学数学教材教法专题讲座，经过精心优选后，编写了《中等师范学校数学专题讲座选编》和《小学数学教材教法专题讲座选编》，供各校开展数学课外活动和指导小学数学教育实习活动时选用.

编写这套《选编》，我们坚持“实际讲过的”、“受到学生欢迎的”十二字方针，力求将“科学性”、“知识性”、“智能性”和“可读性”融为一体，注重突出师范特性，加强对学生进行数学素质和数学教学能力的培养. 它是课堂教学的自然延伸.

《中等师范学校数学专题讲座选编》从策略性数学思想方法、新颖的数学变换技巧、重要的几何解题技能、生活科技中的数学应用、有趣的数学问题、浅谈数学名题、古今数学史拾掇和透视数学焦点等八个方面共30讲，展示数学课的活动成果.

《小学数学教材教法专题讲座选编》从研究小学数学教材、探讨小学数学教法、揭示概念教学规律、提高应用题教学

能力、优化课堂教学整体结构和学写教学论文等六个方面共17讲展示小学数学教育实习活动的成果.

这套《选编》集思广益，集中了全体编辑人员和广大作者的智慧和心血.但由于水平有限，会有缺点、疏漏，甚至错误，敬请读者不吝赐教，以便再版时修订和补充.

全国高师数学教育研究会
中师工作委员会课外活动指导委员会
1996年9月

目　录

提高应用题教学能力

优化课堂教学整体结构

学写教学论文

研究小学数学教材

第一讲　整数的性质

黄　锦

（内蒙古伊克昭盟师范学校　邮编：017000）

研究整数的性质的数学分支叫数论．它有着悠久的历史，从古至今，数论中的许多问题吸引了众多数学家的兴趣．至今尚未解决的哥德巴赫猜想就是数论中的一个问题．我国一些数学家的工作大大推进了这一问题的研究．数论至今有着强大的生命力，有人曾这样说过："用以发现数学天才，在初等数学中再也没有比数论更好的课程了．任何学生，如能把当今一本数论教材中的习题作出，就应受到鼓励，劝他将来去从事数学方面的工作"．所以在国内外各级各类数学竞赛中，有关整数性质的试题屡见不鲜．下面我们分几个方面初步讨论一下整数的性质和应用．

一、整数的乘方

整数的乘方有很多有趣的性质，灵活地应用这些性质，往往可以解决一些看上去很难的数学题目．

1．奇数和偶数的平方

整数可分为奇数和偶数两大类，偶数可表示为 $2k$ 的形

式，奇数可表示为 $2k+1$ 的形式，这里 k 是整数.

由于 $(2k)^2=4k^2$，可见任何偶数的平方都是 4 的倍数，能够被 4 整除.

由于 $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$，这里 k 与 $k+1$ 是相邻的两个整数，故其中必有一个是偶数，所以 $4k(k+1)$ 是 8 的倍数，能被 8 整除. 这就是说，奇数的平方被 8 除之余 1.

例 1 求证：11，111，1111，…，中没有一个是完全平方数.

证明：因为偶数的平方仍是偶数，所以 11，111，1111，…，各数不是偶数的平方.

又上面各数均可表示为 $k\times100+11$ 的形式，这里 k 是适当的整数，当 $k=0$ 时为第一个数 11；$k=1$ 时为第二个数 111；$k=11$ 时为第三个数 1111；….

由于 $k\times100+11=k\times25\times4+2\times4+3$，

可知 $k\times100+11$ 被 4 除之余 3，从而被 8 除之余 3 或 7，不能余 1. 但任何奇数的平方被 8 除之余 1，所以上面各数也不是奇数的平方，故它们都不是完全平方数.

2. 整数乘方的末位数字变化的规律

正整数 a 的 n 次幂 a^n 的末位数字随着 n 的增大作周期性的变化：

当 a 的末位数字是 0，1，5，6 时，周期是 1；

当 a 的末位数字是 4，9 时，周期是 2；

当 a 的末位数字是 2，3，7，8 时，周期是 4.

例 2 问 1989^{1989} 的末位数字是几？

解：因为 1989 的个位数字是 9，它的幂的末位数字变化周期是 2.

而 $1989=994\times2+1$，所以 1989^{1989} 与 1989 的末位数字相同，即为 9.

3. 完全平方数的性质

(1)一个完全平方数的末位数字只可能是 0,1,4,5,6,9；

(2)一个非完全平方数的因数个数必为偶数；

(3)一个完全平方数的因数的个数必为奇数.

例 3 试证：一个奇数的平方的十位数字是偶数.

证明：(1)如果奇数是一位数时，其平方的十位数字显然是偶数(若平方也是一位数时，这时十位数可视为 0,0 是偶数).

(2)如果这个奇数是多位数，设个位数字为 b，则这个奇数可表示为：$10a+b$ 的形式，其中 a 是正整数，b 是奇数.

因为 $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$

而 b^2 的十位数字是偶数，$20ab$ 的十位数字也是偶数.

故 $(10a+b)^2$ 的十位数字是偶数，即任何奇数的平方的十位数字都是偶数.

利用本题的结论，不难证明例 1，不妨一试.

例 4 在一间屋子里，有一百盏电灯排成一行，依从左到右的顺序编上号码 1,2,3,…,99,100. 每盏电灯上都有一个拉线开关. 开始的时候，全部灯都是关着的，有 100 个同学在门外排着队，第一个人走进屋来，把编号是 1 的倍数的所有的电灯的开关拉一下(即把所有的电灯都打开)；接着第二个人走进屋来，把编号是 2 的倍数的所有的电灯的开关拉一下(即把第 2,4,6,…,98,100 号电灯又关上了)；第三个人进来，再把编号是 3 的倍数的所有的电灯的开关拉一下；…；最后第一百个人走进屋来仅把第 100 号电灯上的开关拉一下. 这样做完后，问哪些电灯还是亮着的？

解：因被拉了偶数次的开关的电灯是不亮的，被拉了奇数次开关的电灯才是亮着的，而每一盏电灯被拉了多少次开关，取决于这盏电灯的编号的数字有多少个不同的正因数，

所以最后亮的电灯，它们的编号有奇数个不同的正因数.

又因为只有完全平方数才有奇数个正因数，

所以亮着的电灯的编号为 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100.

二、数的整除性

例 5 在 568 后面补上三个数字，组成一个六位数，使它能分别被 3、4、5 整除，且使这个数值尽可能的小.

解：设所求的六位数为$\overline{568abc}$（a、b、c 分别表示百位、十位、个位上的数字）.

因为$\overline{568abc}$能被 5 整除，所以 c 只能是 0 或 5.

因为$\overline{568abc}$能被 4 整除，所以$\overline{bc}$是 4 的倍数，于是 c 只能取 0.

由于$\overline{568abc}$能被 3 整除，

所以 $5+6+8+a+b+c=19+a+b$ 能被 3 整除，满足条件的 $a+b$ 的最小值是 2，所以$\overline{568abc}=568020$.

例 6 一位小学生不懂指数，把 2^x9^y 误写成一个四位数$\overline{2x9y}$，结果恰好有 $2^x9^y=\overline{2x9y}$，求 x^y.

解：由 $2^x9^y=\overline{2x9y}$可知，$\overline{2x9y}$是 2 的倍数，因而 y 是偶数，又可知$\overline{2x9y}$是 9 的倍数，因此 $2+x+9+y=11+x+y$ 也是 9 的倍数.

又因为 $9^4=6561>\overline{2x9y}$，所以 $y<4$，显然 y 不能为 0，故可知 $y=2$.

于是 $11+x+y=13+x$ 是 9 的倍数，由 $0\leqslant x\leqslant 9$ 可知 13

$+x=18$，$x=5$，经检验确有 $2^5\cdot 9^2=2592$.

所以 $x^y=5^2=25$.

三、奇数与偶数

例 7　谁都知道，人们见面或者分别时，经常喜欢用握手来表示友好和礼貌. 请你证明：不论什么时候，世界上凡握过奇数次手的人数，一定是偶数.

证明：不妨设总人数为 m，设每个人握过手的次数分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$（没有握过手算零次，零是偶数），这样，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$ 可以分为两大类：一类是偶数，一类是奇数. 不妨设偶数的那些数为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$；奇数的那些数为：$a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_m$.

因为握手是彼此的，每个人握一次手必有另一个人也与他握一次手，所以所有人握手的总数 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m$ 一定是偶数.

又因为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$ 都是偶数，所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k$ 也是偶数. 由此推出：

$$a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\cdots+a_m$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k)$$
$$=\text{偶数}-\text{偶数}=\text{偶数}.$$

但 $a_{k+1},a_{k+2},a_{k+3},\cdots,a_m$ 都是奇数，所以 $a_{k+1},a_{k+2},a_{k+3},\cdots,a_m$ 的个数必是偶数. 这就证明了我们的结论.

例 8　游艺室里的座位是 7 行 7 列，坐满了学生，现在做一项游戏. 当铃声响时，每个同学都要与自己前后或左右相邻的某个同学交换位子一次，问这项游戏能实现吗？

解：首先假定游艺室的座位波黑白相间地涂上了颜色，且前、后、左、右相邻座位不同色. 座位共 $7\times7=49$ 个. 我们不妨

假定其中 24 个座位涂上白色,25 个座位涂上黑色.

考虑坐在黑色座位上的 25 人,如果他们每个人都按规定交换了一次座位,那么他们必定坐入 25 个白色座位上,但是只有 24 个白色座位可坐,因此,这项游戏按此规定是无法实现的.

例 9 证明不存在整数 m、n,使 $m^2=n^2+1990$.

证明:假设存在整数 m、n,满足 $m^2=n^2+1990$.

那么 $m^2-n^2=1990$.

所以 $(m+n)(m-n)=1990$

如果 m、n 同为奇数,或同为偶数,则 $m+n$ 与 $m-n$ 均为偶数,于是 $(m+n)(m-n)$ 必为 4 的倍数. 然而 1990 不能被 4 整除.

如果 m、n 中有一个是奇数,另一个是偶数,则 $m+n$ 与 $m-n$ 都是奇数,于是可知 $(m+n)(m-n)$ 也必为奇数,而这不可能与偶数相等.

综上所述,满足 $m^2=n^2+1990$ 的整数 m 和 n 是不存在的.

四、分解因数

算术基本定理:任何一个大于 1 的自然数 N,可以分解为质因数的积,即写成 $N=p_1p_2p_3\cdots p_s$ 的形式,其中 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_s$ 是质数,且满足 $1<p_1\leqslant p_2\leqslant p_3\leqslant\cdots\leqslant p_s$. 如果不考虑因数的顺序,这种分解是唯一的.

例 10 请你把 1 到 9 这九个数字填入下列算式的九个方框内,使等式成立.

$\square\square\square\times\square\square=\square\square\times\square\square=5568$

解:由于 $5568=2^6\times3\times29$.

将 5568 写成两个因数乘积的形式，可以有

$5568=16\times348=32\times174=64\times87=29\times288=12\times464$
$=24\times232=48\times116=96\times58=\cdots$.

其它不是两位数和三位数的因数就不必列举了. 观察上述情况可知，是两个两位数乘积的只有 64×87, 96×58. 这就容易判断符合题意的应是

$$174\times32=96\times58=5568.$$

例 11 在乘积 $1000\times999\times998\times\cdots\times3\times2\times1$ 中，末尾有多少个零?

解：设 $N=1000\times999\times998\times\cdots\times3\times2\times1$

显然 $2\times5=10$，产生一个末尾的零，末尾的零也只能由乘积 N 中的一个质因数 2 与另一个质因数 5 相乘得到. 下面求 N 中有多少个质因数 2 和质因数 5.

因为，在 $1,2,3,\cdots,999,1000$ 中有 200 个 5 的倍数，有 40 个能被 $25=5^2$ 整除，又有 8 个能被 $125=5^3$ 整除，有一个能被 $625=5^4$ 整除.

所以 N 中质因数 5 的个数等于

$$200+40+8+1=249$$

而 N 中的质因数 2 的个数远远大于 249(因能被 2 整除的数就有 500 个).

所以乘积 N 中的末尾有 249 个零.

例 12 一个整数，它的$\frac{1}{2}$是一个整数的平方，它的$\frac{1}{3}$是一个整数的立方，它的$\frac{1}{5}$是一个整数的 5 次方. 那么，这个整数最小等于多少?

解：设这个数是：

$$\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{m\text{ 个 }2}\times\underbrace{3\times3\times\cdots\times3}_{n\text{ 个 }3}\times\underbrace{5\times5\times\cdots\times5}_{p\text{ 个 }5}$$

即 $N=2^m\times3^n\times5^p$

它除以 2 后变成 $2^{m-1}\times3^n\times5^p$

这是一个整数的平方，所以$(m-1)$是偶数，即 m 是奇数.

又 N 除以 3 得 $2^m\times3^{n-1}\times5^p$

这个数是一个整数的立方，所以 m 是 3 的倍数.

同理可知 m 是 5 的倍数.

由上述可知，m 的最小值是 15.

用同样的方法可求出 n 和 p 的最小值分别是 10 和 6.

所以，所求的整数的最小值是 $2^{15}\times3^{10}\times5^6$.

五、带余除法

例 13 两个代表团从甲地乘车到乙地，每辆车可乘 35 人. 两代表团各坐满若干辆车后，第一代表团剩下的 15 人与第二代表团剩下的人正好又坐满一辆车. 会后，第一代表团的每个成员都分别与第二代表团的每个成员合拍一张照片留念. 如果每个胶卷可拍 35 张照片，那么，拍完最后一张照片后，机中的胶卷还可拍几张照片？

解：由题可知，所拍照片的张数等于两个代表团人数的积，把这个问题"数学化"就是：

甲数被 35 除的余数是 15，乙数被 35 除的余数是 20. 那么，甲数与乙数的积被 35 除的余数是几？

由上面的性质可知：所求的余数等于 $15\times20=300$ 被 35 除的余数，即等于 20.

所以，最后机中的胶卷还可拍 20 张照片.

例 14 有 16 把椅子摆成一个圆圈，按顺时针方向依次

编上从 1 到 16 的号码. 现在有一人从 1 号椅子出发顺时针前进 328 个，再逆时针前进 485 个，又顺时针前进 328 个，再逆时针前进 485 个，又顺时针前进 136 个，这时他在几号椅子上？

解：顺时针共前进了：

328＋328＋136＝792(个)

逆时针共前进了：

485＋485＝970(个)

又由于　970－792＝178

178÷16＝11 余 2

所以最后结果相当于从 1 号椅子出发，逆时针前进 2 个，应到 15 号椅子.

例 15　把 1 至 1001 各数按以下格式排列成表. 像表所示那样，用一个正方形框住九个数，要使这九个数的和等于 (1)1986；(2)2529；(3)1989，是否办得到？如果办不到，简单说明理由；如果办得到，写出正方形框里的最大数与最小数.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
	……	……	……			

解：设最小数为 X，则正方形框里的九个数为：

X	$X+1$	$X+2$
$X+7$	$X+8$	$X+9$
$X+14$	$X+15$	$X+16$

它们的和为：$9X+72$

(1)如果 $9X+72=1986$，则有 $9X=1914$，因为 1914 不是