高等学校经济管理类专业
应用型本科系列规划教材

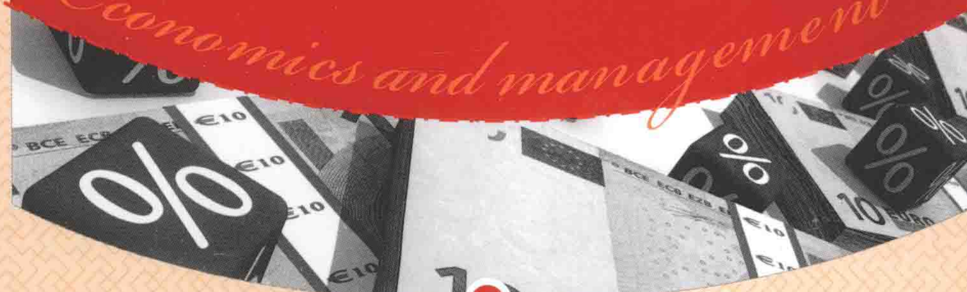
GAODENG XUEXIAO JINGJI GUANLILEI ZHUANYE
YINGYONGXING BENKE XILIE GUIHUA JIAOCAI

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　艾艺红　殷　羽
副主编　唐建民　丁德志　李文学　吴海洋

Economics and management



重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等学校经济管理类专业
应用型本科系列规划教材

GAODENG XUEXIAO JINGJI GUANLILEI ZHUANYE
YINGYONGXING BENKE XILIE GUIHUA JIAOCAI

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编　艾艺红　殷　羽

副主编　唐建民　丁德志　李文学　吴海洋

Economics and management

重庆大学出版社

内容提要

本书内容符合国家教育部关于“高等教育要面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的基本要求，是编者总结多年的教学实践经验，依据经济类、管理类各专业对线性代数课程的教学要求，吸收国内外同类教材的优点，结合我国初等教育和高等教育发展趋势的基础上编写的经济应用数学(二)线性代数课程教材。本书包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和二次型等五章内容。主要介绍线性代数的基础知识。

本书可作为高等学校经济管理类或其他非数学类专业的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/艾艺红,殷羽主编.—重庆:重庆大学出版社,2015.8

高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-5624-9189-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①艾…②殷… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第169843号

线性代数

主 编 艾艺红 殷 羽

副主编 唐建民 丁德志

李文学 吴海洋

策划编辑 顾丽萍

责任编辑:文 鹏 版式设计:顾丽萍

责任校对:关德强 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

自贡兴华印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:8.25 字数:176千

2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 978-7-5624-9189-7 定价:21.00元

前　言

本书内容符合国家教育部关于“高等教育要面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的基本要求，是编者总结多年的教学实践经验，依据经济类、管理类各专业对线性代数课程的教学要求，吸收国内外同类教材的优点，结合我国初等教育和高等教育发展趋势的基础上编写的经济应用数学(二)线性代数课程教材。本书包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和二次型等五章内容。主要介绍线性代数的基础知识。

本书在编写过程中力求突出以下几个方面的特点：

(1)突出线性代数的基本思想和基本方法。帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高学习效果。在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会线性代数的本质和线性代数的价值。

(2)将一些实际应用有机地渗透到数学概念的学习中，将实用性和适用性体现在教材的例题和习题中。

(3)选择的语言力求通俗易懂，精炼准确，尽可能做到简明扼要，深入浅出，易于学生阅读。略去教材中一些非重点内容的定理证明，而以例题进行说明。

(4)力求例题、习题合理配置，形式多样，难易适度。教材每章后的习题均分为(A)(B)两组，其中(A)组习题反映了经济管理类专业数学基础课的基本要求，(B)组习题由填空和选择题两部分组成，可作为复习和总结使用。习题答案附书后。

本书是面向高等院校经济管理类专业的教材，建议授课时数为48~60。不同专业在使用时，可根据自身的特点和需要加以取舍。

参加本书编写的有艾艺红、殷羽、丁德志、徐畅凯、徐文华、唐建民、吴海洋、李文学、葛杨和田秀霞等。

由于编者水平所限，书中如有不足之处敬请使用本书的师生与读者批评指正，以便修订时改进。如读者在使用本书的过程中有其他意见或建议，恳请向编者提出宝贵意见。

编　者

2015年4月7日

Contents

目录

第5章　二次型

习题参考答案

参考文献

第 1 章

行列式

行列式是一个新的运算符,其概念来源于解线性方程组的问题,是线性代数的一个重要研究对象和最基本的常用工具之一,被广泛应用于数学、物理、工程技术、经济管理等领域中.

本章主要在实数范围内讨论 n 阶行列式的概念、性质、计算及其在线性方程组中的应用.

1.1 排列与逆序

在中学阶段,我们曾学习过排列的基本知识,即把 n 个不同的元素排成一列称为这 n 个元素的一个排列,n 个元素共有 $n!$ 个排列,下面给出自然数上的一种排列的定义,以及在此基础上给出逆序的定义.

定义 1.1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **元排列**.

由定义可知,本章给出 n 元排列其实是指定了排列数字的排列.

例如,3 元排列是指由数字 1,2,3 组成的排列,有 123,132,213,231,312,321,共 $3!$ 个排列;4 元排列,是指由数字 1,2,3,4 组成的排列,有 $4!$ 个排列. 一般由数字 $1,2,\cdots,n$ 可组成 $n!$ 个 n 元排列.

定义 1.2 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若排在前面的数 i_t 大于排在后面的数 i_s,即 $i_t>i_s$,则称这一对数 i_ti_s 为该排列的一个**逆序**. 该排列中所有逆序的总数,称为排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$;若排列中无逆序,即逆序数为零,则该排列必然是各个数按照从小到大的自然顺序排列的,称这一排列为**自然序排列**,否则称为**逆序排列**.

由定义,显然,在 n 元排列中,自然序排列是唯一的,只有一个排列即 $123\cdots n$,该排列中无逆序,逆序数为零. 非自然序排列的排列都是逆序排列,其个数为 $n!-1$.

例如,在 4 元排列中,仅 1234 为自然序排列,$\tau(1234)=0$,其他为逆序排列.

【例 1.1】 找出排列 51432 中的所有逆序,并求逆序数.

解 在排列 51432 中构成逆序的有 51,54,53,52,43,42,32,因此 $\tau(51432)=7$. 实际上,逆序数的计算方法有很多,下面介绍两种简单易行的计算方法:

方法(1) $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=$(i_1 右边比其小的数的总数)+(i_2 右边比其小的数的总数)$+\cdots+$(i_{n-1}右边比其小的数的总数);

方法(2) $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=$(i_2 左边比其大的数的总数)+(i_3 左边比其大的数的总

数) + ⋯ + (i_n 左边比其大的数的总数).

这两种方法难易程度一样,方法不同,结果相同,读者可随意选择一种方法掌握,如无特别说明,本章涉及计算逆序数都使用方法(1)进行计算.

【例 1.2】 计算下列排列的逆序数:

(1)613254 (2)7612543 (3)$12\cdots(n-1)n$ (4)$n(n-1)\cdots21$

解 (1) $\tau(613254)=5+0+1+0+1=7$;

(2) $\tau(7612543)=6+5+0+0+2+1=14$;

(3) $\tau(12\cdots(n-1)n)=0+0+\cdots+0=0$;

(4) $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n+2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.3 如果排列的逆序数为偶数,则称其为**偶排列**;如果排列的逆序数为奇数,则称其为**奇排列**.

另外,逆序数为零的排列(如例 1.2(3)),我们规定其为偶排列.

【例 1.3】 写出三元排列中的所有偶排列和奇排列.

解 数字 1,2,3 组成的三元排列有 123,132,213,231,312,321. 其中 123,231,312 是偶排列,132,213,321 是奇排列.

定义 1.4 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,如果互换其中某两个数 i_t 和 i_s 的位置,其余各数位置不变,得到另一个排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$,这种变换称为一次**对换**.

【例 1.4】 写出排列 123 经一次对换后得到的所有排列.

解 123 经一次对换后可变为 132,213,321.

定理 1.1 任意一个排列经一次对换后,其奇偶性发生改变.

证明略.

从例 1.4 中,我们发现其正好验证了定理 1.1. 三元排列 123 为偶排列,经一次对换后得到的排列 132,213,321 全为奇排列. 一般地,一个 n 元奇(偶)排列,经一次对换可得到所有 C_n^2 个 n 元偶(奇)排列.

利用定理 1.1 可以进一步证明:在所有 n 元排列中,奇排列和偶排列的个数相同,都为$\dfrac{n!}{2}$.

1.2 行列式的概念

1.2.1 行列的定义

行列式是一个新的数学符号,同时也是一个新的运算符,其构造的运算成为研究线性代数的有力工具,同时其形式也在其他学科中得到了广泛的应用. 本节将详细介绍行列式的形式及其构造的运算方法.

定义 1.5 用符号"| |"将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

并规定其等于 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的形式称为 n **阶行列式**，记为 $|a_{ij}|_n$ 或 $\det(a_{ij})$，也可用大写英文字母表示，如 A、B、C 等. 其中“| |”为行列式的符号，符号中间由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots,n)$ 排成的方形阵列称为行列式的**数据**. 数据阵列中，横排称为**行**，纵排称为**列**，a_{ij} 表示行列式第 i 行第 j 列位置的**元素**. 其中，i 称为元素的**行标**，j 称为元素的**列标**，数值 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的形式称为行列式的**展开式**，$j_1j_2\cdots j_n$ 为某个 n 元排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 n 元排列求和.

由定义 1.5 知，行列式表示一个数，且任意一个行列式都和一个数相对应. 因此，某种意义上，行列式可以看成一个特殊的函数 $y=|X|$，而自变量 X 并不全是普通意义上的一个数，而是一个 n 行 n 列的数据方形阵列（简称方阵），并且，行列式的符号“| |”也绝不同于绝对值的符号，两者是两个完全不同的运算符.

另外，从行列式的展开式中，可以看出：**n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和**，每项的构成形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，总项数为 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的个数，即 $n!$ 项，每项符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

下面根据行列式的定义，给出一阶、二阶及三阶行列式展开式的具体形式.

1）一阶行列式

由定义 1.5 知，一阶行列式的数据是 1 行 1 列的数据阵列，其形式应为 $|a_{11}|$，且

$$|a_{11}| = \sum_{j_1}(-1)^{\tau(j_1)}a_{1j_1} = a_{11}.$$

2）二阶行列式

由定义 1.5 知，二阶行列式的数据是 2 行 2 列的数据阵列，其形式应为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 且

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2} \\ &= (-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.\end{aligned}$$

3）三阶行列式

由定义 1.5 知，三阶行列式的数据是 3 行 3 列的数据阵列，其形式应为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，且

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \\ &= (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + \\ &\quad (-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

类似地，根据定义可以写出更高阶行列式的具体展开形式. 在行列式中，一般称阶数 $n \geqslant 4$ 的行列式为高阶行列式. 对于四阶行列式，读者可以按照定义尝试一下，其项数为 $4! = 24$ 项. 随着行列式阶数的增加，其展开式会越来越复杂，例如 5 阶行列式的展开式有 $5! = 120$ 项. 因此在行列式的计算中，一般只会用到一阶、二阶和三阶行列式的展开形式，对于更高阶的行列式的计算一般不直接用定义的展开式，而用后面将要介绍的其他更有效的方法. 通常，我们称利用行列式的定义来计算行列式的方法为**定义法或公式法**.

二阶行列式和三阶行列式的展开可借助下列对角线图示辅助记忆.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

【例 1.5】 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 直接利用行列式的定义展开式可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 3\times4\times8 - 1\times8\times6 - 2\times4\times9 - 3\times5\times7 = 0$$

【例 1.6】 判断下列元素的乘积是否是四阶行列式 $|a_{ij}|_4$ 展开式中的项. 若是，则该项的符号是什么？

(1) $a_{11}a_{23}a_{34}$　　(2) $a_{11}a_{23}a_{32}a_{41}$　　(3) $a_{41}a_{23}a_{44}a_{32}$　　(4) $a_{32}a_{11}a_{23}a_{44}$

解 (1) 不是，因四阶行列式的展开式每项是 4 个元素的乘积.

(2) 不是，因元素 a_{11} 与 a_{41} 同列，四阶行列式的展开式每项是不同行不同列元素的乘积.

(3) 不是，因元素 a_{41} 与 a_{44} 同行，四阶行列式的展开式每项是不同行不同列元素的乘积.

(4) 是，由 $a_{32}a_{11}a_{23}a_{44} = a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，知 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 为项的标准形式，又由 $(-1)^{\tau(1324)} = -1$ 知，该项的符号为负号.

【**例 1.7**】 求函数

$$f(x)=\begin{vmatrix}5 & 1 & 0 & 1\\ 2 & x & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & x & 4\end{vmatrix}$$

中的 x^2 系数.

解 由行列式的定义知,展开式中,每项由 4 个不同行不同列的元素相乘,要得到含 x^2 的项有两种情况,即 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 和 $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$,故该项为

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}+(-1)^{\tau(4213)}a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}=-5\cdot x\cdot 2\cdot x+(-1)^4 1\cdot x\cdot 3\cdot x=-7x^2$$

故 x^2 的系数为 -7.

定理 1.2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的展开式可以写成

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n,j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.2}$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$,$j_1j_2\cdots j_n$ 表示两个 n 级排列,$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n,j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对两个 n 级排列求和.

证明略.

特别地,当式(1.2)中,所有项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的列标按自然序排列时,则式(1.2)为

$$\begin{aligned}D&=\sum_{i_1i_2\cdots i_n,j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\&=\sum_{i_1i_2\cdots i_n,12\cdots n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\\&=\sum_{i_1i_2\cdots i_n,12\cdots n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{j_nn}.\end{aligned}$$

由此得到下面的推论:

推论 1.1 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的展开式可写成

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.3}$$

1.2.2 特殊形式行列式

当行列式中很多元素为零时,由定义 1.5 知,行列式的展开式中必然有很多项为零. 当行列式的展开式中只有少数项不为零时,可用定义找出其不为零的项的具体形式,下面介绍几个特殊的 n 阶行列式的展开式.

定义 1.6 在 n 阶行列式中,连接 a_{11} 到 a_{nn} 位置的线段称为行列式的**主对角线**(下面行列式中的实线),连接 a_{1n} 到 a_{n1} 位置的线段称为行列式的**次对角线**(下面行列式中的虚线).

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

1)主对角行列式

行列式中主对角线以外的元素全为零的行列式称为**主对角行列式**.

由定义，易证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2) **主上三角行列式**

行列式中主对角线以下的元素全为零的行列式称为**主上三角行列式**. 由定义，易证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3) **主下三角行列式**

行列式中主对角线以上的元素全为零的行列式称为**主下三角行列式**. 由定义，易证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4) **次对角行列式**

行列式中次对角线以外的元素全为零的行列式称为**次对角行列式**. 由定义，易证

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

5) **次上三角行列式**

行列式中次对角线以下的元素全为零的行列式称为**次上三角行列式**. 由定义，易证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

6)次下三角行列式

行列式中次对角线以上的元素全为零的行列式称为**次下三角行列式**.

由定义,易证

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

上述特殊行列式按照定义展开都只有一项,并且,主对角行列式、主上三角行列式和主下三角行列式的展开形式相同.次对角行列式、次上三角行列式和次下三角行列式的展开形式相同,因此,以后对于这类行列式的计算,可按照其展开式的特点直接计算,尤其对于主上三角行列式,读者应特别掌握,因在后续介绍一般行列式的计算中会经常用到该形式.

1.3 行列式的性质

在1.2节中,我们看到用行列式定义的展开式来计算一般的 $n\geqslant 4$ 阶的行列式是非常烦琐的,因此有必要进一步探讨行列式的性质,以找到更加简便有效的方法计算一般高阶行列式,并且这些性质在理论上也有重要的意义.

性质1.1 (**可转性**)将行列式的行、列互换,行列式的值不变.即设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D^T$.行列式 D^T 称为行列式 D 的**转置行列式**.

证 设行列式 D^T 中位于第 i 行第 j 列的元素为 b_{ij},显然有 $b_{ji}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$.根据 n 阶行列式的定义有

$$D^T = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

由推论1.1,得 $D=D^T$.

性质1.1说明行列式的行和列的地位是相同的.也就是说,对于行成立的性质,对于列也成立.

【**例1.8**】 已知行列式

$$A=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}.$$

写出行列式 A^T,并计算 A^T 的值.

解 $A^T=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$,由三阶行列的展开式可得

$$A^T=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}=1\times5\times9+4\times8\times3+7\times2\times6-1\times6\times8-4\times2\times9-7\times5\times3=0.$$

比较例 1.5 和例 1.8,发现 A^T 和 A 展开式中的项完全一样,正好验证了 $A^T=A$.

性质 1.2(半可交换性) 互换行列式的两行(列),行列式的值反号. 即

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=-D_2.$$

证 显然,乘积 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$ 在行列式 D_1 和 D_2 中都是取自不同行不同列的 n 个数的乘积. 在 D_1 和 D_2 中,这一项的符号分别由

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}\text{和}(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$$

决定,而排列 $1\cdots i\cdots s\cdots n$ 和 $1\cdots s\cdots i\cdots n$ 的奇偶性相反,因此 D_1 和 D_2 的展开式中每项符号恰好相反,所以 $D_1=-D_2$.

推论 1.2 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式的值为零.

性质 1.3(可乘性) 行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k,等于数 k 乘此行列式. 即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=kD_1.$$

证 根据行列式的定义,有

$$\begin{aligned}D&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\&=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\&=kD_1.\end{aligned}$$

推论 1.3(可提性) 行列式一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

推论 1.4 如果行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式的值为零.

推论 1.5 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值为零.

性质 1.4(可加性) 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和.这两个行列式的这一行(列)分别是第一组数和第二组数,其余各行(列)与原行列式相同.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 令上式中的三个行列式从左到右依次为 D, D_1, D_2,根据行列式的定义有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= D_1 + D_2. \end{aligned}$$

【例 1.9】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 203 \\ 4 & 5 & 506 \\ 7 & 8 & 809 \end{vmatrix}.$$

解 利用性质 1.4 和推论 1.5,有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 200+3 \\ 4 & 5 & 500+6 \\ 7 & 8 & 800+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 200 \\ 4 & 5 & 500 \\ 7 & 8 & 800 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

性质 1.5(倍加性) 把行列式的某一行(列)所有元素的 k 倍加到另一行(列)相应的元素上,行列式的值不变.例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{sn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 1.4 及推论 1.5 可直接得证.

前面介绍过特殊形式的行列式,其展开式只有一项,计算简便.通常,我们可以利用行列式的性质将一般形式行列式化成特殊形式的行列式进行计算.在计算中,经常利用行列式的性质将其化成主上三角形式进行计算,通常称此方法为**三角化法**.

行列式的计算过程非常灵活,为了使读者了解计算过程,我们引入下列记号:

①$r_i \leftrightarrow r_j$($c_i \leftrightarrow c_j$):交换 i,j 两行(列).

②kr_i(kc_i):第 i 行(列)元素都乘 k.

③$r_i + kr_j(c_i + kc_j)$:第 j 行(列)元素都乘 k 加到第 i 行(列)对应的元素上.

【例 1.10】 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的性质将其化为主上三角行列式进行计算,有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 7r_1]{r_2 - 4r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

【例 1.11】 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 + r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + 2r_1}} - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 3r_2]{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - \frac{7}{5}r_3} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{vmatrix} = -1 \times (-1) \times 5 \times \frac{9}{5} = 9.$$

【例 1.12】 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 该行列式有个特点,即每行的所有数加起来都为 10,可以用这一特点将第 2,3,4 列都加到第 1 列,有

$$D \xlongequal[c_1 + c_4]{\substack{c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3}} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 1 \\ 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-10\begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&-1&0&3\\0&0&0&3\\0&0&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}10\begin{vmatrix}1&2&3&1\\0&-1&0&3\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=10\times1\times(-1)\times1\times3=-30.$$

【例 1.13】 计算下列行列式:

$$(1)D=\begin{vmatrix}x&y&z\\x&x+y&x+y+z\\x&2x+y&3x+3y+z\end{vmatrix}$$

$$(2)D=\begin{vmatrix}x+a&a&a&\cdots&a\\a&x+a&a&\cdots&a\\a&a&x+a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x+a\end{vmatrix}.$$

解(1)该行列式中元素都是代数式,虽然三阶行列式可直接用定义计算,但仍然比较烦琐,可利用行列式的性质化简,得

$$D\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}x&y&z\\0&x&x+y\\0&2x&3x+3y\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}x&y&z\\0&x&x+y\\0&0&x+y\end{vmatrix}=x^2(x+y).$$

(2)注意到该行列式各行各列元素的和都为 $na+x$,可利用这一特点把行列式第二列及之后的每列都加到第一列上,得

$$D=\begin{vmatrix}na+x&a&a&\cdots&a\\na+x&x+a&a&\cdots&a\\na+x&a&x+a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\na+x&a&a&\cdots&x+a\end{vmatrix}=(na+x)\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x+a&a&\cdots&a\\1&a&x+a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a&a&\cdots&x+a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i-r_1(i=2,3,\cdots,n)}(na+x)\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&x&0&\cdots&0\\0&0&x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x\end{vmatrix}=(na+x)x^{n-1}.$$

1.4 行列式的展开

根据三阶行列式的展开式,容易验证:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$