数学高考纵横谈

浙江教育出版社

数学高考纵横谈

唐盛昌　胡炯涛　唐清成

浙江教育出版社

数学高考纵横谈

唐盛昌　胡炯涛　唐清成

浙江教育出版社出版　　浙江萧山印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092　1/32　印张8　字数183000　印数00001—20300
1987年3月第1版　1987年3月第1次印刷
统一书号：7346·491　定价：1.20元

说　明

本书围绕着数学学习和高考这个主要内容，从学习(复习)方法、数学题型、思维能力、考试常见错误、高考命题趋势、高考中的心理失误等方面问题展开了讨论，为打破单从知识角度进行阐述的传统格局，该书力求把着眼点放在切实提高读者的数学素质和应考能力上面。

在编写时，我们特别重视内容的实用性。在总结多年教学实践经验的基础上，向读者介绍已被证明是行之有效的学习(复习)方法；在归纳历届高考试卷典型错误的前提下，阐述了学习和复习时应注意防止的主要错误；在研究了近几年考试命题标准化的经验以后，对当前流行的数学题型和命题趋势作了探讨；在应用教育学心理学原理分析几年来考生试场表现的情况下，对考生的应考心理作了探讨。一句话，该书注意从教学和考试的实际出发，尽力使本书能适应广大读者学好数学和在高考中充分发挥水平的现实需要。

本书内容限制在中学数学教学大纲范围内。在收集和整理资料时，重视观点的提炼和规律的揭示；在选择例题时，注重问题的典型性和新颖性；在叙述内容时，注意行文的可接受性，力求提纲挈领，深入浅出，发人深省。

本书可供学习高中数学的读者、准备参加普通或成人高考的考生使用，也可供高中数学教师参考。

编　者

一九八六年九月

目　录

第一章　学习(复习)漫谈

数学是一门研究数与形的科学，它渊源流长，它与社会的生存、发展休戚与共，它深入到生活与科学的一切领域。

数学——探索与发明的摇篮；

数学——科学领主的皇冠；

数学——人类思维的体操。

在这群芳斗妍的数学百花园中，曾使许多探索者流连忘返；可它又以其巧思云集的繁花，使无数仰慕者脑汁绞尽，驻足兴叹。

数学是有趣的。

数学是困难的。

一位有五十年教龄的日本老校长曾作经验之谈："孩子们不怕数学就不怕读书！"

是的，一个中学生的数学水平，往往可以反映出他的思维能力和智力水平。

于是，千千万万人关注着一个共同的问题：中学生怎样才能学好数学呢？

下面我们就这个问题向大家谈谈数学学习的四个境界。

一、"双基"入门

(一) 基本概念的学习

"双基"(即基础知识和基本技能)已强调了多年，但不

少学生仍然认为“数学概念有什么可学习的？还不就那么几个定义，几个公式？”不错，就是那么几个定义、几个公式，却以其深刻、严谨的思想内涵，筑起了一群群数学大厦．对尚未入门的数学“门外汉”来说，通病之一就是对概念缺乏透彻的理解．全面、深入地理解和运用概念是数学学习的一项主要任务．

理解概念的第一步是在一单元学习后把知识系统化，具体做法是把一单元的知识归纳成一个“纲”．如“排列与组合”单元的主要内容就包含在如下的表格里：

	排　　　　列	组　　　　合
定义	从m个不同的元素里，任意取出n个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做m个元素中每次取出n个元素的一个排列．	从m个不同元素中，任意取出n个元素（$1\leqslant n\leqslant m$），不管顺序如何合并成一组，叫做从m个不同元素中每次取出n个元素的一个组合．
公式	$P_m^n=m(m-1)\cdots(m-n+1)$ $=\dfrac{m!}{(m-n)!}$	$C_m^n=\dfrac{P_m^n}{P_n^n}=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ $C_m^n=C_m^{m-n}\quad C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}$
特点	与顺序有关	与顺序无关
两者关系	排列＝组合＋全排列	组合是排列的第一步骤

又如立体几何在“多面体与旋转体”单元中（这单元相当于立体几何教材内容的一半），基本公式可以用两个公式加以概括：

$$S=\frac{1}{2}lc,\ V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$$

对式中的字母赋以不同的意义，即可推出全部侧面积和体积公式，“多”就这样变成了“少”．

每一单元学习完以后，若能很快地列出纲要来，就说明深化概念的工作完成了第一步(注意，仅仅是第一步)。

为对概念作进一步地理解，还需要经过正面辨析和反面比较的训练. 以“角”的概念为例，中学阶段出现过不少种“角”，诸如直线的倾角、线面的夹角、复数的幅角主值等，它们从各自的定义出发都有着一个确切的取值范围.

问：直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾角是 $-\frac{\pi}{6}$ 吗？

答：不对，倾角应是“直线向上方向与 x 轴正向所夹的最小正角”. 在 $[0,\pi)$ 内取值，所求倾角应该是 $\frac{5}{6}\pi$.

问：直线 l 与平面 α 交成 120° 角可能吗？

答：不可能. 线面交角是指“直线在平面内的射影和直线交成的锐角”，所以 l 与 α 所成角为 60°.

问：复数 $z=1-\cos\alpha-i\sin\alpha$ $(3\pi<\alpha<4\pi)$ 的幅角主值是什么？

答：先化 $z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$，$\because$ $\sin\frac{\alpha}{2}<0$，$\therefore$ $z=-2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$，再化成标准形式：$z=-2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$. 这时也许有人会得出：“幅角主值是 $\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}$”的结论. 事实上 $2\pi<\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}<\frac{5}{2}\pi$，超过了幅角主值的范围 $[0,2\pi)$，故所求的结果应该减去 2π 而得到 $\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}\pi$.

对上述概念的每一个模糊认识，都会直接导致计算上的错

误．不仅如此，学习时对有些概念和公式的辨析简直需要“咬文嚼字”．例如：“数列中从第二项起，每一项与前一项之差都等于常数，则此数列称为等差数列”．这个定义粗看似乎没问题，仔细一想就不对了，应该改为“都等于一个相同的常数”．否则“3，5，6，9，…”不也成等差数列了吗？因为它们的差为2，1，3，…都是常数．

对概念和公式的理解产生偏颇的常见病是“忘记特例”和“忽视条件”．下面分析一组与“0”有关的特例，看看要注意些什么．

“任何数的0次幂都是1”这句话不对，因为0^0是无意义的．

“在极坐标平面上的每一点都有一个确定的数对与之相对应”．这句话不对，因为极点的极角是不确定的．

“方程$ax^2+bx+c=0$有实根的条件是$b^2-4ac\geqslant 0$”．这个结论太粗糙，$\Delta\geqslant 0$是实系数一元二次方程有实根的充要条件，即必须要$a,b,c\in R$，及$a\neq 0$．当$a=0$时，方程变为$bx=-c$，它也可以有实根，但需满足条件$b\neq 0$；若$b=0$，则当且仅当$c=0$时，方程有实根，且有无数多个实根．

“由$|a|=a$，即知a是正数”．此话不对，因为$a=0$也符合条件$|a|=a$．

有时忽视条件就会曲解题意，答非所问．

例如，由$t=\arcsin x$推得$x=\sin t$，$\cos t=\sqrt{1-x^2}$，即$\arccos\sqrt{1-x^2}=t$，于是得出“$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$”的结论，可这是个错误的结论！原因是对反三角函数的定义域与值域的认识模糊．事实上当$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$时确有$t=\arccos\sqrt{1-x^2}$；但当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant 0$，即

$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 0$ 时，由 $\cos t=\sqrt{1-x^2}$ 推得 $t=-\arccos\sqrt{1-x^2}$，

则 $\arcsin x=-\arccos\sqrt{1-x^2}$.

数学中许多公式和运算律的成立需要有一定的条件，不注意条件就会出错.

例如，求 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{4}{x}}$ $(x=\csc 10°-\sqrt{3}\sec 10°)$，下面的解法对吗？

原式 $=\left[\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4\right]^{\frac{1}{x}}=\left[(-i)^4\right]^{\frac{1}{x}}=1^{\frac{1}{x}}=1.$

不对，因为运算律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 当 m、n 为分数时，仅当 $a\in R^+$ 时才成立，而这里 $x=\frac{1}{\sin 10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$，即 $\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$，原式 $=(-i)^{\frac{1}{4}\times 4}=-i$，可见原来的运算先是忽视了运算律条件，接着又忘了 $1^{\frac{1}{4}}$ 在复数范围内代表四个实数解.

忽视取值范围的变化亦会使结果面目全非.

例如：设 $x, y>0$，当 $3x^2+2y^2=6x$ 时，问 x 取何值才能使 x^2+y^2 达到最大值，并求最大值.

解：设 $2S=2x^2+2y^2=2x^2+(6x-3x^2)=9-(3-x)^2$，

所以当 $x=3$ 时，$S=x^2+y^2$ 达到最大值，

$S_{\max}=\frac{1}{2}(9-0)=\frac{9}{2}$.

请看，解法有漏洞吗？不对了，问题出在 $x=3$ 不属于 x 取值范围，这是由 $2y^2=3(2x-x^2)\geqslant 0$ 所决定，解此不等式可得 $0\leqslant x\leqslant 2$，因此只有当 $x=2$ 时，有 $S_{\max}=\frac{1}{2}(9-1)=4$.

上述“细节”问题反映了“双基”掌握的熟练程度，当然也直接影响着学习的成效，应引起重视.

（二）概念以及定义在解题中的作用

一种偏见认为：解题就靠公式与技巧，与概念无关. 此话的前半句有点道理，后半句就有失偏颇了，下面以圆锥曲线为例介绍一下概念和定义是如何在解题中直接起作用的.

例 1 动点 $P(x,y)$ 到定点 $F(4,0)$ 的距离，比它到直线 $x+5=0$ 的距离少 1，求 P 点的轨迹方程.

解：该题可以用距离公式直接求解，但若利用定义则更为简捷. 因为该题可理解为：求到点 $F(4,0)$ 和直线 $x+4=0$ 的距离相等的点的轨迹方程，而由抛物线定义可知，该轨迹为顶点在原点的抛物线，焦点为 $F(4,0)$，则轨迹方程为 $y^2=16x$.

例 2 求经过点 $F(0,3)$ 且和直线 $y+3=0$ 相切的圆的圆心轨迹方程.

解：轨迹上的动点满足条件：到点$(0,3)$和直线 $y=-3$ 的距离相等. 由抛物线定义知该轨迹方程为 $x^2=12y$.

例 3 已知定圆 C_1：$x^2+y^2=4$，C_2：$x^2+y^2-12x-64=0$，求与 C_1 外切且与 C_2 内切的动圆 C 的圆心轨迹方程.

解：如图 1，由 $|CC_1|+|CC_2|=(R+2)+(10-R)=12$（$R$为圆 C 的半径）. 说明点 C 的轨迹是以 C_1 和 C_2 为焦点的椭圆，其长轴等于12，中心为点$(3,0)$，则由 $a=6$，$c=3$，得 $b=3\sqrt{3}$，直接导出轨迹方程为 $\dfrac{(x-3)^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$.

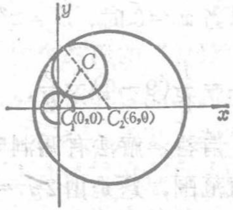

图 1

一般地，动圆和两定圆相切时，其圆心的轨迹是椭圆或双曲线。

例 4　已知椭圆的中心在原点，离心率$e=\frac{1}{3}$，一条准线的方程为 $x=11$，椭圆上一点 M_1 的横坐标为-1，求点 M_1 到此准线同侧的焦点 F_1 的距离。

解：据椭圆定义可知 e 的意义，即$\frac{|M_1F_1|}{12}=e=\frac{1}{3}$，立即可以得到$|M_1F_1|=4$。

例 5　已知线段 AB 的长为 4，点P到两端点的距离之和是 6，求点P到 AB 中点M的距离之极值。

解：若从距离入手用余弦定理可以得解，但运算较繁，按椭圆的定义，即知点P在以 A、B 为焦点，M为中心，长轴长为 6 的椭圆上，建立如图 2 所示的直角坐标系，则点P的轨迹方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$。

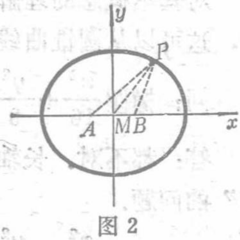

图 2

$\therefore\ |PM|_{max}=$长半轴之长$=3$

$|PM|_{min}=$短半轴之长$=\sqrt{5}$

（三）基本运算的训练

“双基”的第二个内容是基本技能，它包括正确、迅速、合理的运算能力和对基本图形的空间想象能力。

哪些运算是基本运算呢？那些与基本概念、基本性质关系最密切、最直接，而且在数学解题中经常出现的运算就是基本运算。例如算术根与绝对值的运算、解各种类型的不等式、求函数的定义域与值域、函数增减性的判断，任意角三角函数的

求值、角的范围的确定、反三角函数求值；求异面直线夹角，求线段长度、求几何体体积；求各种类型的直线方程、圆锥曲线方程、解析法证明平面几何题等等.

有些看来“一目了然”的运算却常产生诸如下面的错误：

1．解不等式$\dfrac{5x+1}{3x^2-2x+1}>1$．交叉相乘得：$5x+1>3x^2-2x+1$，而这恰恰是解不等式最忌讳的.

2．误认 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$ 或 $\lg a\lg b=\lg a+\lg b$

3．误认$\sqrt{1-\sin 40^\circ}=\sin 20^\circ-\cos 20^\circ$

4．随意“约去”因子.

如由 $(x-1)(x^2+2x-3)=(x-1)$ 推出 $x^2+2x-3=1$

5．误认 $6+3i>2+i$

对基本概念的理解的正确与否直接影响着基本运算的正确性，这可以从圆锥曲线方程中一些参数的确定为例进行分析.

问：椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$的长轴长是16吗？是4对吗？

答：都不对．长轴长应该是8，这里有一个“平方”及“两倍”的问题.

问：椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的焦距等于多少？4对吗？

答：错了．$\because\ c=4\ \ \therefore$ 焦距为 $2c=8$.

问：椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$的焦点坐标为$(4,0)$，$(-4,0)$，对吗？

答：$\because$该椭圆的焦点在 y 轴上，$\therefore$焦点坐标为$(0,4)$，$(0,-4)$.

问：抛物线 $y=10x^2$ 中，$p=5$ 对吗？

答：不对．此处不要与二次函数图象混为一谈，应该先将方程改写为 $x^2=\frac{y}{10}$，然后有 $p=\frac{1}{20}$，这里的 p 代表焦点到准线的距离．

上面失误原因在于概念不清，判断无据以及计算技能较差（即所谓“粗心”），而基本运算的主要障碍是对概念的理解和运用缺少灵活性，由于有些基本运算蕴含在题目中比较巧妙，或是经过几步运算复合而成，常常使思维能力较弱的学生瞠目结舌，不知所措．

例 6 问：x 取什么范围的值时，函数 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-5x+6}$ 为增函数．

解：函数 y 是由指数函数和二次函数复合而成，必须先考虑 $y'=x^2-5x+6$ 的增减性，$y'=x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，当 $x\leqslant\frac{5}{2}$ 时 y' 为减函数，这时，由于 $0<\frac{3}{4}<1$，所以 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{y'}$ 为增函数．可以这样理解：当 $x\leqslant\frac{5}{2}$ 时，x 越大，y' 越小；而 y' 越小，y 越大，即 x 越大 y 越大，函数为增函数．

例 7 已知方程 $f(x)=0$ 有四个不相等的实数根，且满足 $f(2-x)=f(2+x)$，试求这四根之和．

解：初看此题似乎要用到高次方程中韦达定理的推广，其实不然．从方程与函数的基本概念入手，设方程有一个实根 $\alpha_1=2-x_1$，则由 $f(2-x_1)=0$ 得 $f(2+x_1)=0$，所以 $\alpha_2=2+x_1$ 也是方程的一个实根，同样 $\beta_1=2-x_2$ 与 $\beta_2=2+x_2$ 也都是方程之实根，所以四根之和为 8．这里用到了“根满足方程”这样一个简单的事实，但这一事实与“对称性”糅合在一

起就不容易识别了.

为了巩固基础知识，熟练掌握基本技能，在学习中无疑要进行一定量的练习，基本练习应贯穿于学习的始终，成为数学学习的“基本功”．基本练习题的选择并非多多益善，而应该选择有典型意义且覆盖面较广的组合题作为例题，并附以相应的巩固练习，以求“以少胜多”的目的．下面给出一些习题供学习时参考．

1．实数m取何值时，方程$2(m-2)x^2+(3m+6)x-(3m-2)=0$分别具备如下性质：

（1）一根为0；（2）有两个不相等的实根；

（3）有两个正根；（4）有两个负根；

（5）两根异号；（6）两根绝对值相等，符号相反．

这道组合题可以同时学习如下知识：字母系数二次方程的讨论、一次不等式与二次不等式的求解、不等式组求解、解分式不等式等．

二次函数的基础知识基本上可用下题概括．

2．k取何值时，二次函数$y=x^2-2kx+2k+3$满足如下条件之一？

（1）该函数的图象与x轴相交、相切．

（2）y为完全平方式．

（3）极值为0．

（4）$x>5$时函数上升；$x<5$时函数下降．

（5）该函数的图象与x轴交于点$(2, 0)$，并求另一交点．

（6）该函数的图象与直线$y=2x-14$相切．

（7）该函数的图象与直线$y=2kx+1$相切．

（8）该函数的图象与$y=kx^2-8x+11$相切．

（9）该二次方程的两根平方和最小．

（10）函数极小值最大．

（11）图象与$y=x^2-3kx+4k+3$图象的一个交点在x轴上．

立体几何中的重点是证明线面的位置关系，归纳起来就是线面间平行与垂直的六种位置关系的证明，它可以通过下面这个习题来覆盖.

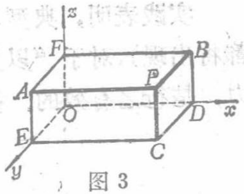

图 3

3．如图3,已知过直三面角$O—xyz$内一点P作三个面的垂线PA、PB、PC，其垂足为A、B、C．D、E、F是分别过PB、PC，过PA、PC及过PA、PB所作平面与Ox、Oy、Oz的交点,求证：

(1) $CP \parallel Oz$.

(2) $Oz \parallel$平面$CPBD$.

(3) 平面$PBFA \parallel$平面$CDOE$.

(4) $PC \perp$平面$PBFA$.

(5) $PBFA$为矩形.

(6) $P—ABC$的各个二面角都是直角.

典型的组合题亦可由一个题目变换条件而得,在学习几何体的面积、体积计算的有关知识时，可以由下面这个习题串起来：

4．边长为a的正三角形的两个顶点在直线l上,以l为轴将三角形旋转一周，求旋转体的表面积和体积.

试把条件改变一下再求结果.

(1) 把“边长为a的正三角形的两个顶点在直线l上”，换成“边长为a的正三角形的一个顶点在l上，其对边与l平行”.

(2) 把上述条件换成“边长为a的正三角形的一个顶点在l上，其一邻边与l相垂直”.

(3) 若把条件换成“两边长分别为b、c，夹角为α的三角形的夹角顶点在l上，且b、c与l成等角”.

(4) 若把条件换成“两边长分别是b、c，夹角为α的三角形，夹角顶点距离l为m，而b、c与l成等角”.

从上面的计算中，我们可以归结出如下结论：旋转体的表面积与体积的计算，常常要化成柱、锥、台体进行计算.