高教版
2016

全国硕士研究生招生考试

数学考试分析

（2016年版）

教育部考试中心

高等教育出版社

高教版
2016

全国硕士研究生招生考试
数学考试分析
（2016年版）

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG ZHAOSHENG KAOSHI
SHUXUE KAOSHI FENXI (2016 NIAN BAN)

教育部考试中心

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生招生考试数学考试分析：2016年版/教育部考试中心编.--北京：高等教育出版社，2015.9
ISBN 978-7-04-043637-2

Ⅰ.①全… Ⅱ.①教… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第196357号

策划编辑 杨挺扬　　责任编辑 雷旭波　　封面设计 王 洋　　版式设计 范晓红
责任校对 陈 杨　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12	版　　次	2015年9月第1版
字　　数	290千字	印　　次	2015年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.00元

物 料 号 43637-00

目　　录

第一部分 数学科考试说明

一、考试性质

全国硕士研究生招生考试数学科考试(以下简称数学考试)是为招收工学、经济学、管理学硕士研究生而设置的具有常模参照性的水平考试.

一方面,从数学考试成绩的使用功能上看,它是常模参照性的考试.所谓常模参照考试是指依据考生的成绩在全体考生成绩量表中的位置来评价考生成绩的优劣,离开考生群体解释考生的成绩意义不大.我国硕士研究生招生初试是从高分到低分择优确定参加复试人选,这种优胜劣汰的方式是常模参照考试的主要特征.数学考试成绩对于工学、经济学和管理学各专业的考生是否被录取起着至关重要的作用.从这个意义上讲,数学考试具有明显的选拔功能,是常模参照考试.

另一方面,从数学考试的测量功能上看,数学考试又是水平考试.水平考试是用来测量考生是否达到一定的水平,从而决定是否适应将来的某项任务的考试,其主要特征是命题不以《教学基本要求》或某一指定的教材为依据,而是以《考试大纲》为依据.《考试大纲》规定考试内容和考试要求,与《教学基本要求》没有直接的关系.数学考试是测量工学、经济学、管理学各专业的考生是否具备为完成相应专业研究生阶段的学习任务以及胜任工作后的研究任务所必需的数学知识和能力.数学《考试大纲》规定的考试内容和考试要求与《教学基本要求》不完全相同,《教学基本要求》中规定的有些教学内容《考试大纲》不要求考查,而《考试大纲》中的有些考试要求要略高于《教学基本要求》.可见,数学考试也符合上述水平考试的特征,因而也是水平考试.

为了体现工学、经济学、管理学不同学科专业对硕士研究生入学应具备的数学知识和能力的不同要求,从 2009 年开始,数学考试分为三个卷种,即数学(一)、数学(二)和数学(三),对不同卷种的考试内容有不同的要求.这种对不同学科、不同专业的考生提出不同考试要求的特征也是水平考试的重要标志.

二、指导思想

根据数学考试的性质和目的,数学科考试的命题工作一直坚持两个“有利于”的指导思想:既有利于国家对高层次人才的选拔,又有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高.在这两个“有利于”中,重点是有利于国家对高层次人才的选拔.

有利于国家对高层次人才的选拔,就是要求这项考试具有较高的信度和效度,能对考生群体进行有效的测量和甄别,从而区分出考生成绩的优劣,并将数学基础好、有发展潜力并具有一定创新能力的考生选拔出来,进入更高层次的教育阶段学习和深造.

有利于高等学校各类数学课程教学质量的提高，就是要求数学考试试题的编制能结合高等学校的教学实际，试题水平既能反映教学的实际水平，也能考查考生应当具备的知识和能力，同时，利用考试这根“指挥棒”正确引导高等学校的数学教学向培养学生应用数学能力的方向发展，使得学生学而有用，学而会用，从而对数学教学质量的提高起到积极的促进作用.

三、基本原则

（1）严格按照《2016年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》（简称《考试大纲》）规定的考试内容和考试要求进行命题.

《考试大纲》主要包括以下内容：考试性质、考查目标、试卷分类及使用专业、考试形式和试卷结构、考试内容和考试要求、题型示例及参考答案等，它是法规性文件，是命题工作和考生复习的唯一依据.

按照《考试大纲》命题是指考查的内容不超过大纲的规定，各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致，试卷的难易度与题型示例的难易度基本一致，试卷中不出现超纲题、偏题和怪题.

（2）试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查.

（3）试题编制要符合各种题型编制原则.

（4）保持历年试题难度的稳定.

（5）试题编制应科学、公正、规范.

四、参考答案及评分参考的制订说明

制订参考答案及评分参考是命题工作的一个重要组成部分，它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度，是考试公平性的重要保证.

数学填空题要求答案是确定的和唯一的，参考答案只给出应填的结果，不给出推导计算过程.一般每题4分，答对4分，答错0分.对于四选一的选择题有A、B、C、D四个备选项，其中三个是干扰项，一个是正确选项，参考答案只给出正确选项前的字母，不给出推导过程.选对得满分，选错得0分，不倒扣分，鼓励考生在不会作答时猜测选项.对于计算题、证明题以及其他解答题，一般提供一至两种参考解答或证明方法，有些试题有更多的解法甚至包括初等解法，但所提供的参考解答必须是与《考试大纲》规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法.参考答案的文字表述必须规范，推理过程必须表述清楚，避免因参考答案表述不清而造成评分误差.每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关.一般地说，综合性较强的试题、推理过程较多的试题和应用性的试题赋分的权重较大，分值较高；基本计算题、常规性试题和简单应用题的分值较低.各题的分值设定之后，就需要确定评分参考，即运算过程中关键步骤的赋分权重.计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的，比如，完成一道分值为10分的计算题需要三个关键步骤，完成到第一个步骤给3分，完成到第二个步骤给6分，三个步骤全部完成给10分.对于文科试题常常是按照要点单独赋分.为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢？这是考虑到对于数学计算或证明题，只有做对了前面的步骤，才能完成后面的步

骤这一特点.对于有多个解法的试题,一般到达同一结果即给相同的分数,每一步骤分值的给定不是随意的,如同确定每题的分值一样,需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度,关键的步骤分值较高,反之较低.

参考答案与评分参考是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前要组织专家依照参考答案与评分参考对部分考卷进行试评,对评分参考做进一步的细化,制定评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分参考的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分使其平均分较高,反之亦然.因此,评分参考制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

五、试题、试卷和考试质量的评价指标

根据全国硕士研究生招生数学考试的性质,它是常模参照性的水平考试.对于常模参照考试,通常用难度和区分度评价试题的质量;用平均分和标准差反映考生成绩的分布情况,同时也作为评价试卷质量的重要指标;用信度和效度评价考试的质量.

1. 试题的评价指标

试题难度是反映试题难易程度的指标,它是考生在该题上的得分率,即考生在该题上的平均得分与该题满分之比,通常以小写的 p 表示,取值范围在 0 与 1 之间.由于不同的考生群体水平是有差异的,他们在同一题上的平均得分也不同,因此,同一题目相对于不同的考生群体,其难度值是不同的,也就是说题目难度依赖于考生样本.

但对于全国统一考试而言,由于参加考试的考生群体的水平是相对稳定的,可以把每年的考生群体视作基本不变的(实际上每年考生水平是存在一定差异的),这样试题的统计难度值或估计值就可以用于比较和控制试卷质量.

对于数学考试而言,难度值在 0.3 以下的为难题,难度值在 0.3~0.8 的视为中等难度的试题,难度值在 0.8 以上的视为易题.试卷难度一般控制在 0.5 左右,一份试卷中难、中、易试题要有一个合适的比例.

在命题过程中,为了保证试题的质量,需要估计题目难度.根据难度的定义,估计难度不仅要考虑题目自身的内容难度,而且要考虑考生群体的水平以及该题的评分参考的设计.

试题区分度是指题目对不同水平的考生加以区分的程度或鉴别的能力.区分度通常表示某一群体的全体考生在该题上的得分与他们的试卷总分之间的相关系数,用 D 表示,一般 $-1<D<1$.对于主观性试题,一般用积矩相关系数;对于客观性试题,如填空题和选择题,一般用双列相关计算公式.该公式比较复杂,可参考有关教育测量书籍,在此不做介绍.

一种近似的、适合于主观性试题区分度的计算方法是先将考生群体分出一个高分组和一个低分组,然后分别计算出高分组、低分组的得分率 $p(H)$、$p(L)$, $D=p(H)-p(L)$.高分组一般是考生群体中成绩在前面的 27%的考生,低分组一般是考生群体中成绩在后面的 27%的考生.这种方法适合较小规模的考试,不适用于大规模的考试.

一般认为区分度在 0.3 以上的试题为合格,0.2~0.3 的试题应予以修正,0.2 以下的试题为不合格,应予以淘汰.

区分度与难度有一定的关系,难度较大或难度较小的试题其区分度通常较小,难度中等的试

题区分度通常较大.为了综合难度和区分度这两项指标对试题进行评价,我们通常将试题分为六类,如下表所示.

试题的六大类型分类表

类型＼特征	p	D	试题特征
Ⅰ	(0,0.3)	(0,0.3)	难度大且区分能力差
Ⅱ	[0.3,0.8]	(0,0.3)	难度适中但区分能力差
Ⅲ	(0.8,1)	(0,0.3)	难度小且区分能力差
Ⅳ	(0,0.3)	(0.3,1.0)	难度大但区分能力强
Ⅴ	[0.3,0.8]	(0.3,1.0)	难度适中且区分能力强
Ⅵ	(0.8,1)	(0.3,1.0)	难度小但区分能力强

在上述分类中,我们没有考虑区分度小于零的情况,因为这种试题一般不会出现.我们认为,第Ⅴ类试题是测量效果较好的试题,在试卷中应占较大比例(达80%以上).第Ⅰ类试题属于"题太难谁都不会做",第Ⅲ类试题属于"题太易谁都会做",它们在试卷中仅起到降低或提高平均分、降低标准差的作用,因此,命题中我们严格控制出现这两类试题.同时,我们也不要求出现太多的第Ⅱ类和第Ⅵ类试题.第Ⅳ类试题在选拔性的研究生招生数学考试中具有非常重要的作用,它对区分中、高水平的考生十分有效,通过多年对试题的分析,这类试题往往是考查考生综合应用能力的试题.

2. 试卷的评价指标

若将一份试卷看作一个题目,则像计算题目难度一样,也有一个试卷难度指标,即全体考生的平均分与试卷满分之比.在某项考试的满分逐年保持不变的情况下,全体考生的平均分成为衡量试卷难易程度的重要指标,试卷的平均分反映全体考生的平均得分.试卷的标准差是反映考生成绩离散程度的指标,标准差愈大,说明考生成绩分布得愈广,该考试将不同水平的考生区分开来的效果愈强;标准差愈小,说明考生成绩都集中在平均分附近,没有把不同水平的考生拉开.

试卷平均分和标准差是反映试题难易度是否稳定的非常重要的指标.因为不同年份的同一科试卷是否稳定主要看考后考生成绩的分布是否稳定,在大规模考试中,一般情况下考生的成绩近似服从正态分布,而正态分布由均值和标准差决定,试卷的平均分和标准差是考生成绩总体均值和标准差的良好估计.因此,控制试卷难易度的稳定性,关键是控制试卷的平均分和标准差.

试卷的平均分与构成试卷的试题的难度有一种确定的关系式,即试卷的平均分等于每题的题分乘以该题的难度值后的相加值,在命题过程中可以通过有经验的命题教师对试题难度进行估计,就可以利用上述关系式估计出试卷的平均分,从而达到控制试卷难度的目的.试题的区分度与试卷的标准差虽然没有确定的关系,但一般来说,试题的区分度愈大,该题对试卷标准差的贡献值就愈大.特别地,中等难度、区分度较大的第Ⅴ类试题对标准差的贡献最大.因此,在命题中应尽量使第Ⅴ类试题在试卷中占分比例较大.

试卷的及格率是指获得满分的60%以上成绩的考生占考生总人数的比例,若满分为150分,试卷的及格率是考生成绩分布曲线下大于90分的面积,此面积与成绩分布的均值和标准差有

关,在命题中难以单独控制,把它作为评价考试情况的一个粗略的指标是可以的,但一般情况下,不把它作为试卷质量的评价指标.

3. 考试质量的评价指标

教育测量学认为考试的信度和效度是评价考试质量的重要指标.信度是反映考试可靠性的指标,可形象地解释为:只要测量对象本身没有变化,用同样的“尺子”去测量总可以得到相同的结果.常用的信度类型主要有再测信度、复本信度、分半信度和内部一致性信度.由主观性试题构成的考试的内部一致性系数又称为 α 系数.目前我们采用的是分半信度和 α 系数.效度反映一个考试是否测量了想要测量的东西.常用的效度类型主要有内容效度、效标关联效度和构想效度.关于信度和效度的计算公式可参照有关教育测量书籍.

在后面的试卷分析和试题分析部分将应用上述关于试题和试卷的评价指标.

第二部分
2015 年数学考试分析

一、总体评价

2015 年全国硕士研究生招生考试的数学(一)、数学(二)和数学(三)试卷符合教育部颁布的《2015 年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的要求,没有超纲问题.三套试卷没有偏题、怪题,没有科学性问题.试卷考查的均是高等数学、线性代数和概率统计课程中的基本概念、基本理论和基本方法,考查的是通性通法.此外,试卷还考查了考生的运算能力、逻辑推理能力、应用数学知识分析问题和解决问题的能力.各类试题命制科学、规范,符合命题的基本原则,题目叙述简洁、清晰,考查目标合理、明确.参考答案给出的都是常规解法,解题过程逻辑严谨、书写完整,评分标准赋分合理,具有很好的可操作性,体现了命题的目的,对阅卷工作有很强的指导作用.

2015 年的三套数学试卷对相关课程内容进行全面考查的同时,特别注意了对重点内容的考查.三套试卷难度适中,保持了标准差大、区分度好的特点,符合选拔性考试的要求,选拔功能突出.

1. 考查全面,重点突出

试卷考查的都是高等数学、线性代数和概率统计三门课程中的主干知识和重点内容.

在高等数学课程中,考查的内容主要有:

(1) 极限与连续.如数学(一)的第 9 题、第 15 题,数学(二)的第 2 题.

(2) 导数与微分的概念、运算及应用.如数学(一)的第 1 题、第 16 题和第 18 题,数学(二)的第 3 题、第 9 题、第 10 题、第 20 题和第 21 题,数学(三)的第 17 题.

(3) 一元函数积分学.如数学(一)的第 10 题,数学(二)的第 11 题、第 16 题和第 19 题.

(4) 多元函数微分学.如数学(一)的第 11 题、第 17 题,数学(二)的第 5 题和第 13 题.

(5) 重积分与曲线积分、曲面积分.如数学(一)的第 4 题和数学(二)的第 18 题是二重积分计算问题,数学(一)的第 12 题和第 19 题分别是三重积分和曲线积分的计算问题.

(6) 无穷级数.如数学(一)的第 3 题,数学(三)的第 4 题.

(7) 微分方程.如数学(一)的第 2 题、第 16 题,数学(二)的第 12 题、第 20 题.

线性代数部分,主要考查了行列式的计算,如数学(一)的第 13 题、数学(二)的第 14 题;矩阵运算,如数学(一)的第 21 题、数学(二)的第 22 题;向量组,如数学(一)的第 20 题;线性方程组解的存在性,如数学(一)的第 5 题;矩阵的相似,如数学(一)的第 21 题;正交变换,如数学(一)的第 6 题.

概率统计部分,主要考查了随机事件概率的计算,如数学(一)的第 7 题;随机变量的数字特征,如数学(一)的第 8 题、第 22 题;随机变量的概率分布,如数学(一)的第 14 题、第 22 题;矩估计与最大似然估计,如数学(一)的第 23 题.

2. 考查能力,突出应用

试卷在考查基本问题和基本方法的同时,注重对概念和性质的考查,考查考生的逻辑判断能力和应用数学知识分析问题、解决问题的能力.

数学(一)的第 3 题考查的是幂级数收敛半径的概念,第 7 题考查了随机事件概率的概念和性质,第 10 题考查的是定积分的性质,第 17 题考查的是梯度向量的几何意义;数学(二)的第 3 题考查了函数连续的概念.

数学(一)的第 1 题和第 16 题、数学(二)的第 21 题、数学(三)的第 17 题都考查了导数的应用,数学(二)的第 16 题考查了定积分的应用,数学(一)的第 16 题、数学(二)的第 20 题考查了微分方程的应用.

3. 难度适中,区分合理

与往年一样,2015 年的三套试卷在考查内容与试题难度上都做了整体设计.高等数学、线性代数和概率统计三门课程的分值及各类题型的数目都符合大纲的要求.试卷在对概念、思想、方法进行综合考查的同时,也考查了简单的计算和应用问题.试卷中的简单题、中等难度题、难题的数量分布合理.

通过对考试内容的选择和对题目的设计,使得 2015 年的三套试卷难度适中、区分度较好,能区分不同水平的考生,有利于培养单位招生.

二、统计数据分析

1. 难度分析

2015 年数学各卷种的抽样统计数据如表 1 所示.由表 1 可以看出,三份试卷难度适中,数学(一)(二)(三)的难度均在 0.52 左右,比 2014 年难度有所降低.各卷种难度符合选拔性考试的要求,有利于不同类型的学校选拔不同层次的考生.在每种试卷中,绝大多数客观题和主观题都是中等难度及其以下的基本问题.即使是要求较高的题目,在设问上也做了处理,采取分步设问的方法,为考生答题铺设了台阶.如数学(一)的第 18 题、第 21 题、第 22 题与第 23 题,数学(二)的第 22 题与第 23 题,数学(三)的第 19 题、第 22 题与第 23 题,这些题目的第一问都很基本,有利于考生入手,并逐步深入,发挥出自身的水平.

从表 2 各卷种在三种题型上的平均难度值可以看出,各卷种三种题型的平均难度值均在中等难度范围内,为了体现不同题型不同的考查功能,选择题、填空题较解答题容易.选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解并能进行简单的推理、判定、计算和比较;填空题主要考查"三基"及数学的重要性质,一般不考计算量大的题,以中、低难度的试题为主;解答题在考查基本运算的基础上,主要考查考生的逻辑推理和综合运用能力.试题排列有一定的坡度,因而能力要求逐渐增高,试题难度逐步增大.

表 1　2015 年数学各卷种抽样统计数据

卷种	样本量	平均分	难度	标准差	α 信度
数学(一)	26 160	78.82	0.525	30.24	0.874 3
数学(二)	23 963	77.43	0.516	34.30	0.886 1
数学(三)	24 417	77.09	0.514	35.47	0.899 2

表 2　2015 年数学各卷种在三种题型上的难度值

题型	数学(一)	数学(二)	数学(三)
选择题	0.695	0.596	0.570
填空题	0.504	0.557	0.624
解答题	0.473	0.479	0.466

2. 区分度分析

从下面的表 3 可以看出,数学(一)、数学(二)、数学(三)区分度在 0.2 以下的试题只有 1 道,其余试题的区分度均在 0.2 以上,数学(一)有 92%、数学(二)有 94.6%、数学(三)有 92%的试题均达到了 0.3 以上的合格水平.从图 1 至图 3 的考生分数分布直方图可以看出,数学(一)(二)(三)都呈正态分布.而根据表 1 的数据显示,各卷种的标准差均在 30 左右,说明数学各卷种对考生的区分良好,有利于高等院校和科研机构选拔新生.

表 3　2015 年数学各卷种区分度分布表

区分度区间	数学(一)	数学(二)	数学(三)
0.2 以下	0%	2.7%	0%
0.2~0.3	8%	2.7%	8%
0.3 以上	92%	94.6%	92%

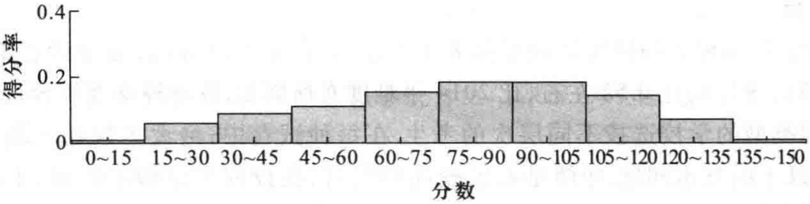


图 1　数学(一)考生分数分布直方图

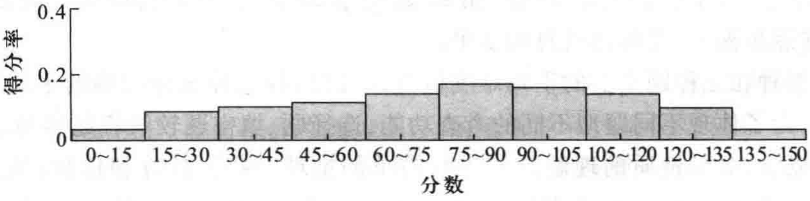


图 2　数学(二)考生分数分布直方图

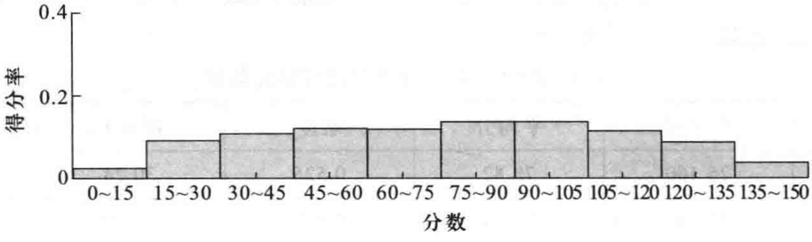


图 3　数学(三)考生分数分布直方图

三、思考与建议

1. 注重基础,全面复习

从考生作答情况看,2015 年的试题难度适中,但仍有部分考生答题情况不理想,这可能与该群体考生的水平有关.从试题得分来看,常见的试题类型和知识点得分情况较好,而对大纲中要求的,但在以前考试中出现频率较低的试题和内容,其得分情况就不好,说明考生知识掌握得不够全面,有应试倾向,不利于对知识的全面掌握和能力的全面发展.

2. 加强计算能力训练

在数学试卷中,需要经过计算解答的试题占有一定的比例,计算能力是一项非常重要的基本能力.计算能力的培养一方面是掌握基本的算理、算法,更重要的是运算的合理性和准确度.运算的合理性表现在要符合算理,运算的准确度是对运算能力的基本要求,要求考生根据算理和题目的运算要求,有理有据地一步步实施运算,在考试中体现在:运算过程中使用的概念要准确无误,使用的公式要准确无误,计算过程要认真耐心.因此,考生在复习过程中要克服仅满足于知晓运算过程、眼高手低的毛病,要真正动手计算,在实践操作中提高运算能力,最终才能保证运算结果的准确无误.

四、数学(一)试题分析

1. 选择题

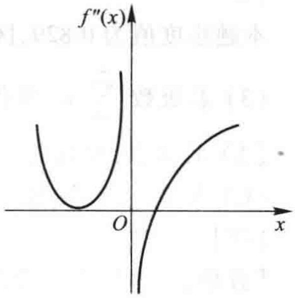
(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【答】 应选(C).

【分析】 本题主要考查了 2 阶导数的正负号与函数凹凸性的关系,考查了拐点的概念和拐点的判别法,是一道基本题.

【解】 因为函数在拐点两侧的凹凸性不同,所以当 2 阶导数存在时,一个点为拐点的充分必要条件是 2 阶导数在该点两侧异号.从图上可以看出,记 $f''(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 x_0,$f''(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=x_0$ $(x_0>0)$ 两侧的正负号不同,经过其他任何点时其正负号都没有发生改变,所以曲线 $y=f(x)$ 有且仅有 2 个拐点.



(第(1)题图)

本题难度值为 0.589,区分度为 0.235.

(2) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解,则

(A) $a=-3,b=2,c=-1$.　　(B) $a=3,b=2,c=-1$.

(C) $a=-3,b=2,c=1$.　　(D) $a=3,b=2,c=1$.

【答】 应选(A).

【分析】 本题主要考查了二阶常系数非齐次线性微分方程的解的结构,考查了二阶常系数齐次线性微分方程的特征根解法,是一道考查概念和性质的基本题.

【解法 1】 由题设可知，$\lambda=2$ 和 $\lambda=1$ 是齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个特征根，所以其特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，故 $a=-3,b=2$.

由题设还知，$y=xe^x$ 是非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的解，所以

$$ce^x=(2+x)e^x-3(1+x)e^x+2xe^x=-e^x,$$

即 $c=-1$.

【解法 2】 由 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$，得

$$y'=e^{2x}+\left(x+\frac{2}{3}\right)e^x,\quad y''=2e^{2x}+\left(x+\frac{5}{3}\right)e^x,$$

$$\begin{aligned}y''+ay'+by&=\left[2e^{2x}+\left(x+\frac{5}{3}\right)e^x\right]+a\left[e^{2x}+\left(x+\frac{2}{3}\right)e^x\right]+b\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x\right]\\&=\left(2+a+\frac{b}{2}\right)e^{2x}+\left[(1+a+b)x+\frac{1}{3}(5+2a-b)\right]e^x.\end{aligned}$$

由题设可知

$$\left(2+a+\frac{b}{2}\right)e^{2x}+\left[(1+a+b)x+\frac{1}{3}(5+2a-b)\right]e^x=ce^x,$$

所以 $\begin{cases}2+a+\dfrac{b}{2}=0,\\1+a+b=0,\\\dfrac{1}{3}(5+2a-b)=c,\end{cases}$ 解得 $a=-3,b=2,c=-1$.

本题难度值为 0.829，区分度为 0.404.

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的

(A) 收敛点，收敛点.　　(B) 收敛点，发散点.

(C) 发散点，收敛点.　　(D) 发散点，发散点.

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查了幂级数收敛区间的概念，考查了幂级数的逐项求导性质，是一道考查概念和性质的基本题.

【解】 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛可知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛区间为 $(0,2)$，故幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛区间也为 $(0,2)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 在 $x=\sqrt{3}$ 处收敛，在 $x=3$ 处发散.

本题难度值为 0.767，区分度为 0.295.

(4) 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr.$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr.$

【答】 应选(B).

【分析】 本题主要考查了在极坐标系下将二重积分化为二次积分的方法,考查了简单曲线的极坐标方程,是一道基本题.

【解】 在第一象限中,直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 的极坐标方程分别为 $\theta=\frac{\pi}{4}, \theta=\frac{\pi}{3}$,曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 的极坐标方程分别为 $r=\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r=\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$,所以

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right\},$$

从而
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

本题难度值为 0.846,区分度为 0.366.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$.

(B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$.

(C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$.

(D) $a\in\Omega, d\in\Omega$.

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查了非齐次线性方程组存在无穷多解的充分必要条件,考查了矩阵的初等变换,是一道基本题.

【解】 对线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施以初等行变换,得

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&3&a^2-1&d^2-1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$ 的充分必要条件是:$a=1$ 或 $a=2$,且 $d=1$ 或 $d=2$.

由上可知,线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解,即 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$ 的充分必要条件为 $a\in\Omega$ 且 $d\in\Omega$.

本题难度值为 0.755,区分度为 0.481.

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

【答】 应选(A).

【分析】 本题主要考查了二次型标准形的概念和初等矩阵的性质，考查了矩阵的乘法，是一道基本题.

【解】 因为

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_3\\-y_2\end{pmatrix}.$$

又因为$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，所以$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

$$2y_1^2+y_3^2-(-y_2)^2=2y_1^2-y_2^2+y_3^2.$$

本题难度值为 0.353，区分度为 0.338.

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C) $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　　(D) $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

【答】 应选(C).

【分析】 本题考查了随机事件概率的概念和性质，是一道基本题.

【解法 1】 由于 $AB\subset A,AB\subset B$，故 $P(AB)\leqslant P(A),P(AB)\leqslant P(B)$，从而

$$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}.$$

【解法 2】 本题也可通过举反例看出(A)，(B)，(D)都是不正确的.比如考虑事件A,B，若这两个事件满足 $P(A)>0,P(B)>0$，且 $P(AB)=0$，则(B)和(D)不成立；再考虑事件 A,B，若这两个事件满足 $A\supset B,0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则(A)不成立.

【常见问题】 本题得不出正确答案的主要原因是对事件概率的概念和性质不熟悉.

本题难度值为 0.611，区分度为 0.251.

(8) 设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$

(A) -3.　　(B) 3.　　(C) -5.　　(D) 5.

【答】 应选(D).

【分析】 本题考查随机变量的期望的性质及计算、方差的概念和计算，考查两个随机变量的相关性的概念及协方差的计算，是一道概念性较强的题.

【解法 1】 由题设知

$$E(X^2)=DX+(EX)^2=7,\ E(XY)=EX\cdot EY=2,$$

所以

$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=E(X^2+XY-2X)\\&=E(X^2)+E(XY)-2EX=5.\end{aligned}$$

【解法 2】 由协方差的计算公式可得

$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=\mathrm{Cov}(X,X+Y-2)+EX\cdot E(X+Y-2)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y-2)+EX\cdot(EX+EY-2)\\&=DX+EX\cdot(EX+EY-2)=5.\end{aligned}$$

【常见问题】 这道题要求考生对期望、方差、协方差的性质以及计算要熟悉.考生得不出正确答案的原因可能是不熟悉有关概念或不能灵活运用有关公式.比如,由题设"随机变量 X,Y 不相关"得不出"$E(XY)=EX\cdot EY$",由 EX,DX 得不出 $E(X^2)$.

本题难度值为 0.810,区分度为 0.453.

2. 填空题

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.

【答】 应填 $-\dfrac{1}{2}$.

【分析】 本题主要考查了利用洛必达法则求极限的方法,考查了重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,是一道基本计算题.

【解法 1】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=-\dfrac{1}{2}.$

【解法 2】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}.$

【常见问题】 $\dfrac{1}{2}$是常见的错误答案.

本题难度值为 0.864,区分度为 0.414.

(10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ________.

【答】 应填 $\dfrac{\pi^2}{4}$.

【分析】 本题主要考查了奇(偶)函数定积分的性质,考查了简单定积分的计算,是一道基本计算题.

【解法 1】 因为 $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 是奇函数,$|x|$ 是偶函数,所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=0,\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\ \mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4},$$