高等学校财经类专业核心课程教材

GAODENG XUEXIAO CAIJINGLEI ZHUANYE HEXIN KECHENG JIAOCAI

（第五版）

5

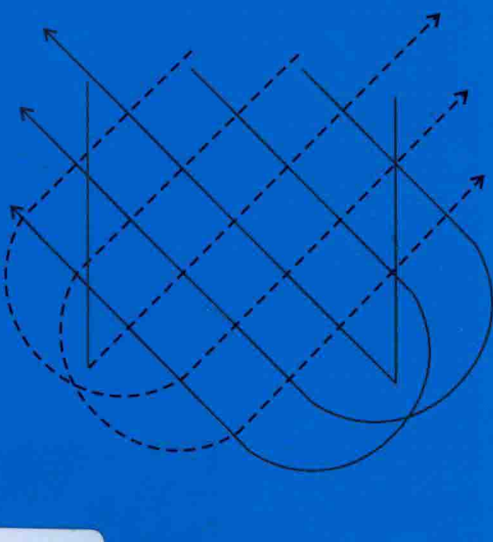
经济数学基础

第二分册：线性代数

主　编　龚德恩

副主编　范培华　胡显佑

编写者　胡显佑　靳云汇



- 名校专家编著
- 市场长期检验
- 多次修订再版

人民出版社

高等学校财经类专业核心课程教材
GAODENG XUEXIAO CAIJINGLEI ZHUANYE HEXIN KECHENG JIAOCAI

（第五版）
5

经济数学基础

第二分册：线性代数

主　编　龚德恩
副主编　范培华 胡显佑
编写者　胡显佑 靳云汇

四川人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础. 第2分册，线性代数 / 龚德恩主编. —5版.，
成都：四川人民出版社，2016.1
高等学校财经类专业核心课程教材
ISBN 978－7－220－09639－6

Ⅰ. 经… Ⅱ. 龚… Ⅲ. ①经济数学－高等学校－
教材②线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①F224.0②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第214188号

·高等学校财经类专业核心课程教材·

JINGJI SHUXUE JICHU
经济数学基础（第二分册：线性代数）（第五版）
主　编　龚德恩
副主编　范培华　胡显佑
编写者　胡显佑　靳云汇

策划组稿	王　茴
责任编辑	王　茴
封面设计	解建华
技术设计	戴雨虹
责任校对	蓝　海
责任印制	王　俊　许　茜
出版发行	四川人民出版社（成都槐树街2号）
网　　址	http://www.scpph.com
E-mail	scrmcbs@sina.com
新浪微博	@四川人民出版社
发行部业务电话	(028) 86259624　86259453
防盗版举报电话	(028) 86259624
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	四川福润印务有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	16
插　　页	2
字　　数	280千
版　　次	1992年8月第1版 1995年6月第2版 2000年1月第3版 2005年7月第4版 2016年1月第5版
印　　次	2016年1月第20次
印　　数	147001—151000册
书　　号	ISBN 978－7－220－09639－6
定　　价	26.00元

第五版说明

我社编辑出版的高等学校财经类专业核心课程教材之《经济数学基础》一套三册，即《微积分》《线性代数》和《概率统计》，面市 20 多年，一路走来风雨兼程．其间已做过三次修订再版和无数次加印，各分册累计印数都达几十万册．为了更加符合教与学的需要，我们第四次约请原书作者对教材进行了全面修订，拟出版修订“第五版”．具体与第四版的区别如下：

1．此次修订主要是依照《2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中“数学三”的规定内容来进行，因此，对此大纲中未作要求的内容大都予以删除（因重要性或经济应用的需要，有关部分内容仍保留，但加注“*”号），故难度有所减轻．

2．对原书部分内容作了重写，增加了一些“注释”性质的东西，调整了部分例题．

3．对在教学中发现的原书里的一些写作错误或排版错误均作了更正．

4．排版上更加规范，以便于浏览，从而可以提高阅读效率．

如此，修订第五版更加适应市场的要求，质量较以前的版本也有较大的提升．

出版者

2015 年 11 月

第四版说明

这套统编教材是按照国家教委高等教育司1989年10月审定的“高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲”的要求编写的．作者均系北京大学、中国人民大学等著名高校的专家、学者．该套教材分三册：《微积分》《线性代数》《概率统计》．面市十多年来历经市场考验，表现出顽强的生命力，数次再版，多次增印，每个分册的累计印数均达到数十万册，有着广泛的社会需求和较大的市场份额，业已成为四川人民出版社的品牌读物．

目前市场上有关此类书籍品种繁多，良莠不齐．为了更好地适应市场的变化，也为了更好地打造品牌，我们在编辑方面做了以下工作：第一，版面由32开增大到16开，让繁多的数学公式和符号表示或排列更加合理；第二，文字、符号加大一些，行距也增大一点，读者阅读和学习起来更赏心悦目；第三，纠正了若干编排错误，使全书质量更上一层楼；第四，封面改变以往的老面孔，从而更符合时代潮流；第五，封面的前勒口上增加了每册习题解答的书名，便于使用者更加全面地了解该套教材及教辅的情况．

尽管我们为出版这第四版教材已作出了最大的努力，但也难免百密一疏，恳请广大新老读者不吝赐教，以使该套教材更加趋于完美．

四川人民出版社

2005年5月

第三版说明

此书初版于 1992 年，再版于 1995 年，经过多年来全国高等院校的广泛使用，反映良好．为使该教材更趋完善、规范和权威，我们特约请作者再次修订，并将该书(第一、二、三分册)的习题全部解答，汇编成册，单独出版，以配合广大师生教学使用．

出版者

1999 年 12 月

再版说明

本书系高等学校财经类专业核心课程教材之一，初版于1992年．该书出版后，各方反映较好．由于初版成书时时间紧迫，匆忙之中难免有错误疏漏之处．今特约请作者详细修订后重新照排，从而更具正确性和合理性，便于广大师生阅读使用．

出版者
1995年3月

出版说明

1990 年，财经类专业 10 门核心课程的教学大纲通过了审定并正式出版，当年暑期，国家教委根据教学大纲组织了全国性的师资培训工作，在此基础上，为了进一步加强财经类专业的核心课程建设，国家教委决定委托教学大纲的主编根据教学大纲的要求编写教材，并争取在今、明两年内使这 10 本教材出版，供普通高等学校财经类本科专业使用.

在着手组织编写教材时，我们确定的指导思想是：教材编写应以马克思主义为指导，坚持四项基本原则，贯彻理论联系实际的原则，反映和体现中国特色；注重本学科基本理论、基本知识的介绍以及基本技能的训练，注意吸收本学科新的、比较成熟的研究成果；教材内容应观点正确、鲜明，取材准确，起点、分量适中，在介绍外国经济理论时，应根据我国与外国在国情和意识形态上的差异，本着思想性与科学性统一的原则，作必要的评论和批判.

这套教材是基本按照教学大纲编写的，除包括本课程基本内容外，选学内容比较广泛，在使用时，各专业在保证基本内容讲授的前提下，可以根据各自的要求对教学内容作必要的调整和增删. 教学大纲出版后，许多同志对教学大纲的修订提供了重要而中肯的意见，主编对这些意见进行了认真的研究，并在教材编写中予以相应采纳. 因此，教材的体系和内容在教学大纲的基础上有了一些改进和调整.

编写教学大纲和教材是财经类专业核心课程建设的一项重要基础工作，有利于逐步深化教学改革，提高我国高等财经教育的教学质量. 我们希望全国高等财经类专业的广大教师继续关心和支持这项工作，及时将使用这套教材中遇到的问题和改进意见向我司和作者反映，以供修订教学大纲和教材时参考.

这套《经济数学基础》教材由中国人民大学龚德恩教授主编，北京大学

范培华教授和中国人民大学胡显佑教授副主编．编写组成员有张学贞、靳云汇、袁荫棠．参加本教材审稿讨论的有：南开大学周概容教授，上海财经大学朱幼文教授，江西财经学院刘序球副教授，（以下按姓氏笔划为序）内蒙古自治区财经学院马华副教授，山东经济学院王好民副教授，中国金融学院王新民教授，陕西财经学院叶玉琴副教授，东北财经大学刘文龙教授，天津财经学院张源教授，北京经济学院张广梵副教授，广东商学院郑万伏副教授，中央财政金融学院单立波副教授，湖南财经学院周江雄副教授，浙江财经学院周继高副教授，北京商学院顾瑾副教授，西南财经大学倪训芳副教授，中南财经大学彭勇行教授，西北师范大学熊烈副教授．

国家教委社会科学
研究与艺术教育司
1992 年 1 月

编著者说明

受国家教委委托，中国人民大学和北京大学共同承担了编写核心课程《经济数学基础》教材的任务．这套教材是按照国家教委高等教育司1989年10月审定的“高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲”的要求编写的．全套教材分为《微积分》《线性代数》和《概率统计》三个分册．《微积分》分册由张学贞(一、二、三、四、七章)和龚德恩(五、六、八、九、十章)编写，龚德恩统纂；《线性代数》分册由胡显佑(一、二、三章)和靳云汇(四、五、六章)编写，胡显佑统纂；《概率统计》分册由袁荫棠(一、二、三章)和范培华(四、五、六、七章)编写，范培华统纂．

在编写教材时，既要考虑到教学大纲对内容和学分的要求(学分减少而内容有所增加)，又要考虑到数学学科的特点和目前国内财经类专业的实际教学情况．因此，要编写一套适合实际教学需要的高质量教材，其难度是很大的．为此，我们在编写教材时着重考虑了以下几个问题：

1. 在符合教学大纲规定的内容和学分要求的前提下，希望能尽可能多地介绍一些财经类专业所必需的数学知识，为此，教材对内容取舍、结构安排、程度要求和某些具体内容的处理等问题进行了认真的分析和研究，与现有教材相比较有所变化．另外，教材中有些内容注有“ * ”号，是否讲授这些内容，各校可根据专业特点和实际教学情况决定．

2. 《经济数学基础》作为财经类专业的一门基础课，编写教材时既要考虑到财经类专业对数学知识的直接或间接需要，又要考虑到学习数学对培养学生逻辑思维能力的重要性．因此，为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，除一些超出大纲要求或过于繁琐的定理(法则)的证明外，教材对大多数定理(法则)都给出了严格的证明，而且尽量采用文科学生易于

接受的证明方法．希望这样处理既能保持数学学科本身的系统性、逻辑严密性和科学性，又有利于培养学生的逻辑思维能力．

3．目前国内已出版了不少《经济数学基础》教材，这些教材都是各兄弟院校数学教师在总结实际教学经验的基础上编写而成的，我们编写这套教材时，希望能将各兄弟院校编写《经济数学基础》教材的先进经验反映出来．为此，在编写教材过程中，我们听取了部分兄弟院校数学教师对编写教材的意见，也参考了不少兄弟院校编写的有关教材．

4．为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，教材中选编了相当数量的典型例题．为了提高读者运用数学知识分析和处理实际经济问题的能力，教材中介绍了一定数量的经济应用例题．为了使读者有较多的练习机会，教材中选配了大量的习题，书后附有习题参考答案．授课教师可根据实际数学情况，布置习题中的一部分给学生练习，其余部分留给学有余力的学生自行练习．

1991 年 7 月 28 日至 8 月 2 日，国家教委聘请有关专家对这套教材的初稿进行了评审，评审组的各位专家以高度负责的精神，对教材初稿进行了严肃认真的审核，认为教材初稿基本体现了数学大纲的要求，并提出了很多具体的宝贵修改意见，这些修改意见对保证和提高教材的质量，无疑是非常有益的，在此向参加评审会的各位专家表示衷心的感谢．

1991 年 7 月中下旬，在国家教委委托中国人民大学举办的《经济数学基础》暑期师资研讨班上，各兄弟院校的老师也对教材初稿提出过很多宝贵的修改意见．在此向提出过修改意见的各校老师表示衷心的感谢．

西北师范大学熊烈副教授对《微积分》的编写曾提出过书面意见，中国人民大学莫颂清副教授曾仔细审阅过《微积分》初稿，南开大学周概容教授曾仔细审阅和修改过《概率统计》修改稿．在此向他们表示衷心的感谢．

虽然我们尽了很大的努力，希望能写出一套质量较高、适合实际教学需要的教材，但由于水平有限和时间仓促，教材中一定还会存在这样或那样的缺点和问题，敬请读者不吝指正，我们将万分感谢．

龚德恩　范培华　胡显佑
1992 年 1 月 10 日于北京

目　　录

第一章　行列式

行列式的概念来源于解线性方程组的问题．在中学代数中，我们已讨论了用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组．在一定的条件下，这一方法可以推广到解 n 元线性方程组．同时，行列式也是研究线性代数的一个重要工具，本书的各章都要用到行列式的概念和性质．在这一章，我们将介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法以及解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1　n 阶行列式

一、 二阶、三阶行列式

考虑含有两个未知量 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为了求得方程组(1.1)的解，可以利用加减消元法得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

并称它为二阶行列式．二阶行列式的计算也可根据图 1 － 1 来记忆．

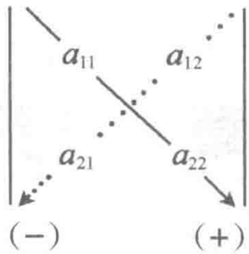


图 1 － 1

利用二阶行列式的概念，(1.2) 中的分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

因此，对于方程组(1.1)，在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组的解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

例 1. 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 = -5. \end{cases}$$

解　方程组中未知量的系数所构成的二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-3) \times 4 = 15 \neq 0.$$

所以方程组有唯一解．由(1.3)，还需计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -30, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 15.$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-30}{15} = -2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{15}{15} = 1.$$

对于含有三个未知量 x_1, x_2, x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

可以进行类似的讨论. 为此,引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1.5}$$

并称它为三阶行列式. 行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列. 数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为它的元素. 三阶行列式所表示的代数和可以利用图1－2来记忆. 图中,沿各实线相连的三个数的积取正号;沿各虚线相连的三个数的积取负号. 它们的代数和就是(1.5)所表示的三阶行列式.

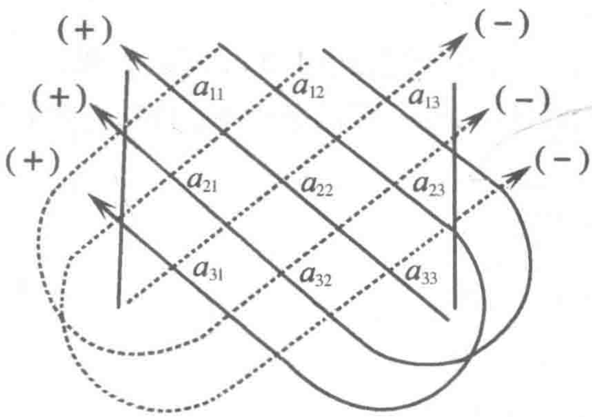


图1－2

例2. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 $D = 2\times1\times3 + (-3)\times(-2)\times5 + 1\times4\times1 - 1\times1\times5 - (-3)\times4\times3 - 2\times(-2)\times1 = 75.$

利用加减消元法,不难求出方程组(1.4)的解,其结果可以用三阶行列式表示:当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1.4)有唯一解．如果记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则方程组(1.4)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.6}$$

不难看出，(1.6)中各式的分母D就是方程组(1.4)中各未知量的系数按原来顺序排列所构成的三阶行列式．一般称D为方程组(1.4)的系数行列式．而D_1则是把D的第一列换成常数项b_1,b_2,b_3，同时其余各列不变时所构成的三阶行列式．D_2,D_3也有类似的特点．

对照求解二元线性方程组的公式(1.3)，可以发现公式(1.3)与(1.6)有类似的特点．以后我们将证明，在一定的条件下，具有更多未知量的线性方程组也有类似的求解公式．

例3. 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=26, \\ 2x_1-4x_2-x_3=9, \\ x_1+2x_2+x_3=16. \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0.$$

所以方程组有唯一解．再计算

$$D_1=\begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}=55,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}=20,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix}=-15.$$