高等学校教材

# 高等数学

## 化、地、生类专业

**第二版 下册**

主　编 姜作廉
副主编 胡龙桥 姜　山

高等教育出版社

高等学校教材

# 高等数学

Gaodeng Shuxue

**化、地、生类专业**

第二版

下　　册

主　编　姜作廉
副主编　胡龙桥　姜　山

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是根据作者多年讲授该课程的经验和体会，在 2008 年出版的教材《高等数学（化、地、生类专业）（下册）》的基础上修订而成。

本次再版在第一版的基础上做了必要的修订和部分章节的改动；1. 在许多章节增加了应用例题；2. 习题配备上，将每章的习题分为 A 类与 B 类；3. 分章上作了适当的处理，第一版的第 7 章（定积分的应用）归并在第 6 章的最后，第 8 章（向量代数）归并在原来的第 9 章（空间解析几何）中。

本书概念清楚、表达准确、例题典型、循序渐进、难易适当、富有系统性。在强化基本概念、基本理论、基本方法和基本运算的同时，注重数学在化学、生物科学等学科领域中的应用。每章都精选一定数量的习题，并附有部分习题参考答案与提示。

下册内容主要包括：空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程。

本书可作为综合性大学和高等师范院校的化学、生物科学、环境工程与环境科学、地理科学、医学、药学、心理学等专业本科生的高等数学教材，也可作为工科院校相关专业的高等数学教材。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学:化、地、生类专业. 下册/姜作廉主编. --2 版. --北京:高等教育出版社,2015.7
ISBN 978-7-04-043049-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①姜… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 139642 号

策划编辑 贾翠萍　责任编辑 贾翠萍　封面设计 张申申　版式设计 余　杨
插图绘制 郝　林　责任校对 胡美萍　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 煤炭工业出版社印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 18.25
字　　数 330 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　　次 2008 年 1 月第 1 版
2015 年 7 月第 2 版
印　　次 2015 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 29.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有　侵权必究

物 料 号 43049-00

# 目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

# 第7章

# 空间解析几何与向量代数

平面解析几何是用代数方法研究平面上的几何图形，与此类似，空间解析几何是用代数方法研究空间中的几何图形的代数表示和几何性质. 由于空间解析几何可以为二元函数提供直观的几何解释，特别是可以为多元积分的计算提供有力支持，因而在讨论多元函数的微积分学之前，我们先介绍空间解析几何的一些基础知识.

本章首先建立空间直角坐标系，其次介绍向量代数，并以此为工具讨论空间的平面和直线的代数表示，以及它们的性质与关系，然后介绍一些常用的曲面的代数表示和几何特征.

## 7.1 空间直角坐标系

### 1. 空间点的直角坐标

空间解析几何是用代数方法来研究空间的几何问题，为此，首先就要解决如何用实数来确定空间一点的位置. 显然，确定直线上一点的位置，只要用一个数就可以了；确定平面上一点的位置，需要用两个有序数，例如在平面上建立了直角坐标系 $Oxy$，平面上任一点的位置就可以用两个有序数 $x$ 和 $y$ 来确定，记作 $M(x,y)$；这样，很自然地会想到，要确定空间中一点的位置，就需要用三个有序数. 于是我们引入空间直角坐标系的概念.

在空间选一点 $O$，以 $O$ 为公共原点作两条互相垂直的数轴 $Ox$ 与 $Oy$，由 $Ox$ 与 $Oy$ 所构成的平面记为 $xOy$，仍以 $O$ 为原点作一条与 $xOy$ 平面垂直的数轴 $Oz$，这样就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$（见图7.1）. 数轴 $Ox$、$Oy$、$Oz$ 称为**坐标轴**，简称为 $x$ 轴，$y$ 轴、$z$ 轴；它们的公共原点 $O$ 称为**坐标原点**；每两条坐标轴所构成的平面，即 $xOy$ 平面，$yOz$ 平面、$zOx$ 平面称为**坐标平面**.

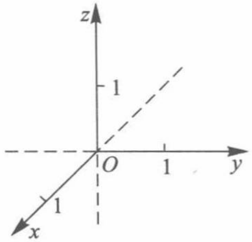


图 7.1

空间直角坐标系分为右手系与左手系两类. 所谓右手系，就是其坐标轴的方向符合右手法则，即把右手的拇指、食指、中指伸开，作成互相垂直的形状，如果

食指指向 $x$ 轴正方向，中指指向 $y$ 轴正方向，那么拇指就指向 $z$ 轴正方向，如图 7.1. 否则就是左手系. 本书以后都采用右手系.

习惯上，把 $x$ 轴与 $y$ 轴取在水平面上（见图 7.1），$x$ 轴叫做**横轴**，$y$ 轴叫做**纵轴**，$z$ 轴是铅垂线，叫做**竖轴**.

建立了空间直角坐标系，空间的点就可用三个有序数来表示：设 $P$ 为空间任一点，过 $P$ 作垂直于 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的三个平面，它们与三个坐标轴分别相交于 $A$、$B$、$C$ 三个点（见图 7.2）. 如果这三个点在三个轴上的坐标依次是 $x$、$y$、$z$，那么这三个有序数 $(x,y,z)$ 就称为 $P$ 点的**坐标**，记为 $P(x,y,z)$，其中第一个数 $x$ 称为 $P$ 点的**横坐标**，第二个数 $y$ 称为**纵坐标**，第三个数 $z$ 称为**竖坐标**. 反过来，如果任意给定三个有序数 $(x,y,z)$，我们依次过 $Ox$、$Oy$、$Oz$ 轴上的点 $x$、$y$、$z$ 作分别与 $Ox$、$Oy$、$Oz$ 轴垂直的平面，这三个平面的公共点 $P$ 的坐标就是 $(x,y,z)$，因而任意给定三个有序数 $(x,y,z)$，就可以唯一地确定空间一点 $P$，它以 $(x,y,z)$ 为坐标. 这样，空间的点 $P$ 就和三个有序数 $(x,y,z)$ 之间建立了一一对应的关系.

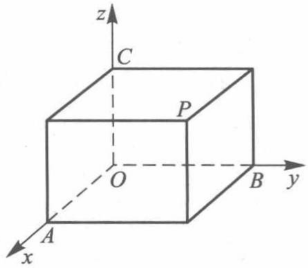

图 7.2

显然，原点的坐标为 $(0,0,0)$；在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上点的坐标依次是 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；在坐标面 $xOy$、$yOz$、$zOx$ 上的点的坐标分别是 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

三个坐标平面把整个空间划分成八个部分，每个部分称为**卦限**. 八个卦限的顺序规定如下：

$x>0,y>0,z>0$ 是第Ⅰ卦限；

$x<0,y>0,z>0$ 是第Ⅱ卦限；

$x<0,y<0,z>0$ 是第Ⅲ卦限；

$x>0,y<0,z>0$ 是第Ⅳ卦限；

$x>0,y>0,z<0$ 是第Ⅴ卦限；

$x<0,y>0,z<0$ 是第Ⅵ卦限；

$x<0,y<0,z<0$ 是第Ⅶ卦限；

$x>0,y<0,z<0$ 是第Ⅷ卦限.

第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 $xOy$ 平面之上，其顺序与 $Oxy$ 坐标系平面上各象限的顺序相同；而第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限则在 $xOy$ 平面之下，依次排在第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限的下面.

**2. 空间两点间的距离**

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意两点（见图 7.3），为了求它们之

间的距离,我们过 $P_1$、$P_2$ 各作三个平面分别垂直于三个坐标轴,这六个平面构成一个长方体. 线段 $P_1P_2$ 是长方体的一条对角线. 根据勾股定理有

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2,$$

即长方体对角线的长的平方等于该长方体三条棱长的平方和. 这三条棱长 $|P_1A|$、$|AB|$、$|BP_2|$ 显然是 $|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$,代入上式就得到**空间任意两点间的距离公式**

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

它是平面上两点间距离公式的推广.

由这个公式可以得到任意一点 $P(x,y,z)$ 和原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

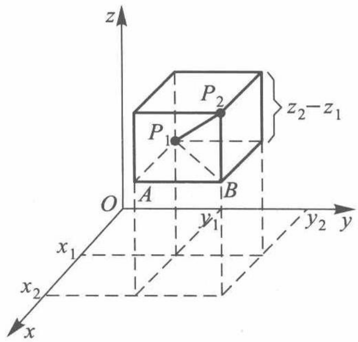

图 7.3

**例 1** 在 $x$ 轴上求一点 $P$,使其到点 $A(0,2,-1)$ 与 $B(-1,1,3)$ 的距离相等.

**解** 由于点 $P$ 在 $x$ 轴上,因而设其坐标为 $(x,0,0)$. 由题意有

$$|PA|=|PB|,$$

即

$$\sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(0-1)^2+(0-3)^2}.$$

解此方程可知 $x=-3$. 因此所求的点为 $P(-3,0,0)$.

**3. 曲面方程**

在解析几何学中,曲面可看作满足某种条件的点的几何轨迹. 如果曲面 $S$ 上任一点的坐标 $(x,y,z)$ 都满足三元方程 $F(x,y,z)=0$;反之,任何满足三元方程 $F(x,y,z)=0$ 的 $(x,y,z)$ 必定是曲面 $S$ 上某个点所对应的坐标,那么三元方程 $F(x,y,z)=0$ 就称为这个**曲面 $S$ 的方程**,曲面 $S$ 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 所对应的曲面. 由此看来,曲面与方程 $F(x,y,z)=0$ 之间的关系,就像平面直角坐标系中的曲线与 $x,y$ 的二元方程 $f(x,y)=0$ 之间的关系一样.

**例 2** 已知一平面平分两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 间的线段且和它垂直,求该平面的方程.

**解** 由题意可知所求的平面就是与 $A$ 和 $B$ 等距离的点的几何轨迹. 设该平面上任一点为 $P(x,y,z)$,则有关系 $|AP|=|BP|$,因而

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}.$$

平方等式的两边,然后化简有

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求的平面方程.

**例 3**　设球面的中心在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且半径等于 $R$. 求它的方程.

**解**　设 $P(x,y,z)$ 为球面上的任一点，由球面的定义可知所有点 $P$ 均满足 $|PP_0|=R$. 由此得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{2}$$

这就是所求的**球面方程**.

当球心在原点，则 $x_0=y_0=z_0=0$，于是球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

**4. 空间曲线方程**

一般地说，空间曲线可看作两个曲面的交线. 设

$$F_1(x,y,z)=0 \text{ 和 } F_2(x,y,z)=0$$

是两个曲面的方程，它们的交线是曲线 $\Gamma$. 由于曲线 $\Gamma$ 上的任何点都同时在这两个曲面上，因而 $\Gamma$ 上的所有点的坐标都满足这两曲面的方程. 反之，坐标同时满足这两曲面方程的点一定在它们的交线 $\Gamma$ 上. 因此两曲面方程联立起来的方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0\end{cases} \tag{3}$$

称为**空间曲线 $\Gamma$ 的一般方程**.

例如，球面与 $xOy$ 坐标平面的交线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\z=0\end{cases} \tag{4}$$

是一单位圆. 由于通过曲线 $\Gamma$ 的曲面有无限多个，因而曲线 $\Gamma$ 的一般方程的表示不是唯一的，有时，我们可以选取与方程组(3)等价的两个简单的方程来表示曲线 $\Gamma$，以便更容易地了解曲线的特征. 比如，方程组(4)的一个等价方程组为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=0.\end{cases} \tag{5}$$

由此可见，曲线是 $xOy$ 平面上的单位圆(圆心位于原点).

空间曲线方程的一种常见形式是参数方程. 如同平面曲线的参数方程那样，可以引出空间曲线的参数方程的概念. 一般来说，如果空间曲线 $\Gamma$ 上的点的坐标 $x,y,z$ 可以表示为变数 $t$ 的函数

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\\z=\omega(t)\end{cases}\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \tag{6}$$

使得点$(x,y,z)$随着变数$t$在$[\alpha,\beta]$内变化而描出曲线$\Gamma$,且只描出$\Gamma$,那么方程(6)称为**空间曲线$\Gamma$的参数方程**,变数$t$称为**参数**.

例如,在方程组(5)中,令$x=\cos t,y=\sin t$,则该曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=0\end{cases}\qquad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

## 7.2　向量的加减法与数乘

### 1. 向量的概念

在物理学中,常见的物理量有两种:一种量完全可以用数值来决定,例如温度、时间、质量、密度等,这种量叫做**数量**;另一种量不仅有数值大小而且还有方向,例如位移、速度、加速度、力等,这种既有大小又有方向的量叫做**向量**(或矢量).

向量可用几何方法或坐标方法来表示.下面先介绍**向量的几何表示法**.

由于向量既有大小又有方向,因而它可用一条有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示:线段的长度表示向量的大小,叫做**向量的模**,记作$|\overrightarrow{AB}|$;从$A$到$B$的方向表示**向量的方向**,$A$叫做**起点**,$B$叫做**终点**(见图7.4).

对于向量的起点和终点,如果对调它们的位置,那就得到与原来向量大小相等、方向相反的另一向量.与向量$\overrightarrow{AB}$大小相等、方向相反的向量叫做$\overrightarrow{AB}$的**负向量**,记为$-\overrightarrow{AB}$.显然$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

在数学中,对于向量所考虑的只是它的大小和方向,因此凡是长度相等、方向相同的有向线段都表示**相同的向量**.例如,在图7.5中,$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$长度相等、方向相同,因此它们表示相同的向量,记为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.由此可见,将一向量平行移动之后,与原来向量仍然相同,因此,以后必要时可将向量在空间平行移动,即每一向量的起点可取在空间任意点处.

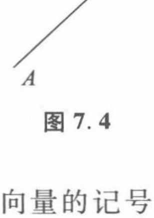


图7.4

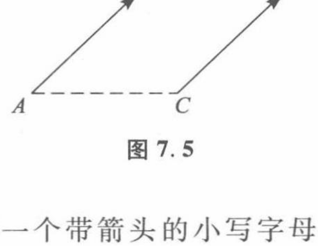


图7.5

为方便起见,向量的记号还可用一个带箭头的小写字母,如$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$等来表

示；书本上还常用一个黑体的小写字母，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等来表示向量.

**2. 向量的加减法**

如果一质点接连进行了两次位移 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，那么合起来的位移是什么呢？设质点原来在 $A$ 点，作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，那么质点经过第一次位移 $\boldsymbol{a}$ 之后就到达了 $B$ 点；再作向量 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，那么质点经过第二次位移 $\boldsymbol{b}$ 之后就到达了 $C$ 点，所以两次位移 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 加起来的合位移就是 $\overrightarrow{AC}$，简记为 $\boldsymbol{c}$（见图 7.6）. 这种合成方法叫做**三角形法则**.

根据上面位移的合成方法，我们抽象出向量加法的定义.

**定义 1**　给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，得有向折线 $ABC$，以折线的起点 $A$ 为起点，折线的终点 $C$ 为终点的向量，记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

求向量的和的方法叫做**向量的加法**. 上面定义的加法，称为按三角形法则的加法（参考图 7.6）. 还有一种称为按**平行四边形法则**的加法：以 $A$ 为起点，作两向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，再以它们为邻边作一平行四边形 $ABCD$（见图 7.7），那么以 $A$ 为起点的对角线向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 不难看出，按三角形法则和按平行四边形法则所作的向量加法，其结果是一致的.

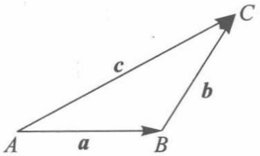


图 7.6

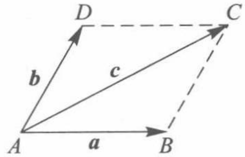


图 7.7

如果一个向量的起点与终点重合，我们就称这个向量为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的模为 0，方向任意.

向量加法像实数加法一样满足下列**加法运算法则**

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}.$$

这些运算法则可按加法定义作图证明（参考图 7.8 和图 7.9）.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

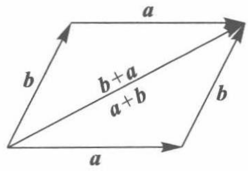


图 7.8

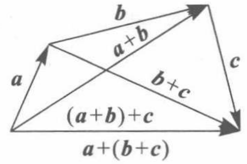


图 7.9

**定义 2**　给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如果有一向量 $\boldsymbol{c}$,使得

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},$$

则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差. 记作

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

求向量的差的方法叫做**向量的减法**. 由上面定义,得向量减法的几何作图法如下:从一点 $O$ 作两向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,那么以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 $B$ 为起点,$\boldsymbol{a}$ 的终点 $A$ 为终点的向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 的差(见图 7.10).

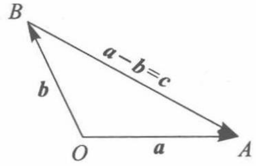


图 7.10

不难验证,向量的减法也像实数减法一样有下面等式

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

其中 $-\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的负向量.

**3. 数乘向量**

如果说“一个力扩大三倍”,那么,这就表示力的方向不变,而大小扩大了三倍. 仿此给出实数与向量相乘(简称数乘向量)的定义.

**定义 3**　给定数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$,数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模是

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|;$$

它的方向是:当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,方向任意(由于是零向量).

数乘向量满足下列运算法则

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},$$
$$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{a},$$
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

这几个法则,请读者根据定义加以验证.

模为 1 的向量叫做**单位向量**. 设 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量,那么与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向而模为 1 的向量就称为沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位向量,简称 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^0$. 由数乘向量的定义,显然有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\tag{1}$$

即

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0.$$

这样,每一非零向量都可以分解成它的模与它的单位向量的乘积. 它的模表示向量的大小;它的单位向量表示向量的方向.

**4. 向量的坐标表示**

由于后面要以向量为工具来研究空间的平面与直线,因而在此还要介绍向量的坐标表示法.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,沿 $x$ 轴,$y$ 轴,$z$ 轴的正向,取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,叫做**基本向量**. 给定向量 $\boldsymbol{a}$,由于向量可以平行移动,不妨把 $\boldsymbol{a}$ 的起点放在坐标原点 $O$,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,这时 $\boldsymbol{a}$ 的终点 $A$ 完全由 $\boldsymbol{a}$ 确定. 设终点 $A$ 的坐标为$(a_x,a_y,a_z)$,过 $A$ 作 $xOy$ 平面的垂线,与 $xOy$ 平面相交于点 $P$,再过 $P$ 作 $x$ 轴的垂线,与 $x$ 轴相交于点 $Q$(见图 7.11). 于是

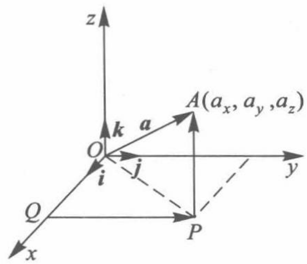

图 7.11

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PA}.$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴正向的三个单位向量,因而有

$$\overrightarrow{OQ}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{QP}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{PA}=a_z\boldsymbol{k},$$

将它们代入上面的等式得向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

有时也记作

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\tag{2}$$

其中$(a_x,a_y,a_z)$称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**. 可以看出,当向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点时,向量的坐标与其终点的坐标是一样的. 于是基本向量的坐标为

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0)\quad ,\boldsymbol{k}=(0,0,1).\tag{3}$$

现在用向量的坐标表示来进行向量的加减法与数乘向量的运算. 设 $\lambda$ 为常数,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量,其坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),$$

即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,　$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 根据向量加减法和数乘向量所满足的运算

法则,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_x\boldsymbol{i}\pm b_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}\pm b_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\pm b_z\boldsymbol{k} \\ &= (a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k};\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}.$$

因此得到向量加减法和数乘运算的**坐标运算规律**如下:

$$(a_x,a_y,a_z)\pm(b_x,b_y,b_z)=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),$$

$$\lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

**例 1**　已知两点 $P_1,P_2$,它们的坐标分别为$(a_1,b_1,c_1)$,$(a_2,b_2,c_2)$,求向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标.

**解**　根据题意作两点对应的向量$\overrightarrow{OP_1}$与$\overrightarrow{OP_2}$,因而$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}$. 于是

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(a_2,b_2,c_2)-(a_1,b_1,c_1)=(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1).$$

这个结果表明,如果**向量的起点不在坐标原点时,那么该向量的坐标是其终点坐标减去起点坐标之差**.

**5. 向量的方向余弦**

已知向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,下面利用向量的坐标计算它的模与方向. 如果将 $\boldsymbol{a}$ 的起点放在坐标原点(见图 7.12),那么它的终点 $A$ 的坐标也就是$(a_x,a_y,a_z)$. 根据空间两点的距离公式,可知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OA}|=|OA|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{4}$$

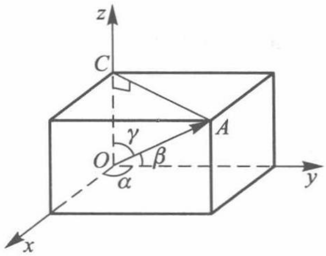


图 7.12

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可由该向量与三坐标轴正向的夹角 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$ 来确定(见图 7.12),或由这三个角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 来表示. $\alpha,\beta,\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**;$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则(参考图 7.12,其中角$\angle OCA=\frac{\pi}{2}$)

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{5}$$

显然有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{|\boldsymbol{a}|^2}=1. \tag{6}$$

这就是说,**任一非零向量的方向余弦的平方和等于** 1.

由式(5)可知,$\boldsymbol{a}$ 的单位向量

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma). \tag{7}$$

考虑两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与 $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 平行,则它们的单位向量相同或方向相反. 于是

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^0=|\boldsymbol{b}|(\pm\boldsymbol{a}^0)=\pm|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^0=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\pm\frac{|a|}{|b|}.$$

这表示它们的坐标成比例. 其中,分母为零时,规定分子也为零.

反之,如果这两向量的坐标成比例

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda,$$

则

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=(\lambda b_x,\lambda b_y,\lambda b_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)=\lambda\boldsymbol{b}.$$

当 $\lambda>0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反,故它们平行. 综上所述,我们得到了一个重要结论.

**定理**　两非零向量平行的充分必要条件是它们的坐标成比例.

**例 2**　设向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$,求 $\boldsymbol{a}$ 的模,方向余弦以及平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

**解**　$\boldsymbol{a}$ 的模是

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3};$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

平行于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是

$$\pm\boldsymbol{a}^0=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

## 7.3　向量的数量积与向量积

### 1. 两向量的数量积

为了引出两向量的数量积的定义,我们先考虑一个物理问题. 用绳子拉小车(见图 7.13),设绳子的拉力为 $\boldsymbol{f}$,小车的位移为 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 $\theta$. 这时,力 $\boldsymbol{f}$

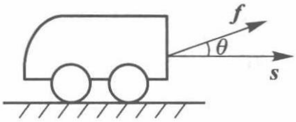

图 7.13

所作的功,等于 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向的分力的大小乘车子移动的距离. $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 方向分力的大小是 $|\boldsymbol{f}|\cos\theta$,车子移动的距离是 $|\boldsymbol{s}|$. 因此,力 $\boldsymbol{f}$ 所作的功是

$$W=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

像这样,已知两向量,求它们的模以及夹角余弦的乘积,在很多方面经常遇到. 因此数学中把这种运算抽象为两向量的数量积.

**定义 1** 给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 $\theta$,称实数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(简称**内积**或**点积**),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,也就是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{1}$$

向量的数量积满足下列运算法则:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a};$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c};$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}).$$

基本向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 具有下列性质:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1;$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

现在根据数量积的运算法则与基本向量的性质,来推导数量积的坐标表示式. 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_y\boldsymbol{j})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

于是得到数量积的坐标表示式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2}$$

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,由数量积定义可知

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

因此,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 交角的余弦的坐标表示式为

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{3}$$

由式(3)可以证明如下重要结论.

**定理** 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 均为非零向量,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

**例 1**　在 $xOy$ 平面上求一单位向量，使它与向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1,5)$ 垂直.

**解**　设所求向量为 $(x,y,0)$，则 $x,y$ 满足

$$\begin{cases}-2x+y=0,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

由上解出 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，因而所求向量为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \frac{2}{\sqrt{5}},\quad 0\right)\text{或}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\quad -\frac{2}{\sqrt{5}},\quad 0\right).$$

**2. 两向量的向量积**

在定义向量积之前，先引入二阶和三阶行列式概念，目的是使向量积运算的表示比较简洁.

由四个实数构成的形如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

的式子定义为数值 $a_1b_2-a_2b_1$，称该式为**二阶行列式**，记为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

利用二阶行列式的定义，将九个实数排成三行三列所构成的式子称为**三阶行列式**，它对应一个实数，记为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

下面考虑一个物理问题. 将棍子的一个端点 $O$ 固定，有一个力 $\boldsymbol{f}$ 作用在它的另一端点 $P$ 上（见图 7.14）. 力的作用使 $OP$ 绕 $O$ 点转动. 力学中用力矩表示 $\boldsymbol{f}$ 对 $OP$ 转动作用的大小. 力矩是一个向量，记作 $\boldsymbol{m}$. 力矩 $\boldsymbol{m}$ 的大小等于力 $\boldsymbol{f}$ 在垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 的方向上的分力的大小乘 $|\overrightarrow{OP}|$，即

$$|\boldsymbol{m}|=|\overrightarrow{OP}|\,|\boldsymbol{f}|\sin\theta,$$

其中 $\theta$ 是向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 之间的夹角；力矩 $\boldsymbol{m}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 所构成的平面，其指向按 $\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{m}$ 满足右手法则，像力矩这样由两个向量确定另一个向量的关系，在数学中把它抽象为一种向量运算，称为**向量积**.

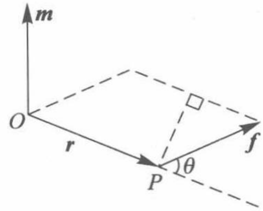

图 7.14

**定义 2**　给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 $\theta$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com