中学数学通用教案设计精编 之三

主编 毛永聪 李浩原

普九义务教材

通用教案设计精编

卷

华语教学出版社

普九义务教材通用 教案设计 精编(中学卷)

●主编　毛永聪　李靖明

中学数学通用教案设计精编

之三

华语教学出版社

☆目☆录☆

复数的模与辐角主值的复习深化教案设计

复数的模与辐角的主值，是复数的重要概念，对于理解复数的几何意义和进行运算都起着重要的作用。尽管学生有所认识，但是由于综合运用各科知识的能力较差，所以解题容易出错。本设计以一题多解的形式，探讨一下怎样深化复数的模与辐角主值的复习教学。

【题目】 设复数 $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$(0\leqslant\theta<\pi,\ \theta\neq\pi/2)$、$z_2=z_1i+1$，$z_1$，$z_2$ 分别对应复平面上的点 A、B，O 为坐标原点，$\angle AOB=\alpha$ $(0\leqslant\alpha<\pi)$，求角 α 的大小。

一、应用三角公式化复数为三角式

解法一（分析：因为复数 z_1、z_2 分别对应复平面上的点 A，B 所以$\angle AOB$ 可以用 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的差来表示。关键是把 z_2 化为三角式并且判断 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的大小。）

$$\because z_1=\cos\theta+i\sin\theta,\ (0\leqslant\theta<\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2}) \quad ①$$

$$\therefore z_2=z_1i+1=(\cos\theta+i\sin\theta)i+1$$
$$=1-\sin\theta+i\cos\theta=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad ②$$

1°，$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)>0$，这时，②式是 z_2 的三角形式，$\arg z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$，并且 $\arg z_2>\arg z_1$，

$$\therefore \alpha=\arg z_2-\arg z_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}。$$

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)<$

0，

$\therefore z_2=-\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\left[\cos\ (\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\ +i\sin\ (\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\right]$，

又$\because \frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{7\pi}{4}$，$\therefore \arg z_2=\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}>\arg z_1$，$\therefore \alpha=\arg z_2-\arg z_1=\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\theta=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}$。

这种用复数的辐角主值的差来确定夹角 α 的方法，思路清晰，但是将 z_2 化为三角形式是解答本题的前提；合理地分 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 两个区间，判断 $\cos\ (\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})$ 的值的符号则是关键。因此，只有熟练地应用三角变换公式，记住复数三角式的特点，并且善于讨论参数的范围，才能正确作出解答。

二、应用复数除法法则

解法二（分析：若 $\arg z_2>\arg z_1$，则由复数除法的几何意义可知：$\alpha=\arg\frac{z_2}{z_1}$。）

由解法一中的①式与②式知道：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad ③$$

1°，当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)>0$，所以③式是$\frac{z_2}{z_1}$的三角形式，且 $0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \alpha=\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)<0$，

$$\therefore \frac{z_2}{z_1}=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad ④$$

所以④式是$\frac{z_2}{z_1}$的三角形式，且$\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\pi$，

$$\therefore \alpha=\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}。$$

这种由复数的商的辐角主值来确定夹角α的方法，是建立在对于复数相除的几何意义有着深刻理解的基础上的。与解法一相比较，思路要复杂些，因为两个复数的辐角主值的差是通过两个复数的商的辐角主值来体现的。这样，对于③式来说，不仅要判断$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$的值的符号，还要分析$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$的范围，没有较强的分析能力与扎实的基础知识是容易弄错的。

另解：若从z_1/z_2入手，则由于

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad ⑤$$

1°，当$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，同以前讨论⑤式是$\frac{z_1}{z_2}$的三角形式。

但是$-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}<0$，可知$\arg z_1<\arg z_2$，根据复数相除的几何意义，可得$\alpha=-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，同以前讨论，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right] \qquad ⑥$$

虽然⑥式是$\frac{z_1}{z_2}$的三角形式，但是$\pi<\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$，超出了$0\leqslant\alpha<\pi$的范围，于是可以把⑥式化为：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)\right],$$

$\because -\pi<\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}<-\frac{3\pi}{4}$，同上分析有

$$\alpha=-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}。$$

由以上的两种求商的不同解法可知，只要对复数相除的几何意义以及辐角主值范围有透彻的理解，都能够求出α的大小。同时，通过逆向思维，加深了对复数主值范围的理解，使感性知识上升为理性知识。

三、应用向量加法法则

解法三：(分析：$\because |z_1|=1$，$\arg z_1=\theta$，$0\leqslant\theta<\pi$，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$，$|z_1 i|=|z_1|=1$，$\therefore z_2=z_1 i+1$ 可以运用向量加法的平行四边形法则作出菱形，易知z_2对应的向量$\overrightarrow{OB}$相应于菱形的对角线OB，又因为$\arg(z_1 i)=\theta+\frac{\pi}{2}$，所以$\arg z_2$就可以求出来了。)

$\because z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$0\leqslant\theta<\pi$，且$\theta\neq\pi/2$。

$z_2=z_1 i+1$，

$\therefore |z_1|=1$，$|z_1 i|=1$。

1°，当$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，如图1。

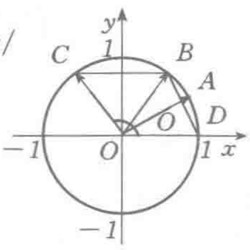

图1

$\because |z_1|=|z_1 i|1$，$\therefore z_1$与$z_1 i$分别对应

的点 A 与 C 都在单位圆上，并且$\angle xOA=\theta$，$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$\angle xOC=\theta+\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{2}\leqslant\angle xOC<\pi$。

作菱形 ODBC，则$OB=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$。即 $z_2=z_1i+1$。$\therefore \angle DOB=\frac{1}{2}\angle DOC=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$，所以 $\arg z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$。显然由于$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$，因此，$\overrightarrow{OB}$必然落在$\angle AOC$ 的内部，可知 $\arg z_2>\arg z_1$。

$\therefore \alpha=\arg z_2-\arg z_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，如图 2，点 A，C 分别对应的复数为 z_1，z_1i。$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，则 $\arg(z_1i)=\theta+\frac{\pi}{2}$。同理，作菱形 OCBD，则$\overrightarrow{OB}$对应的复数是：

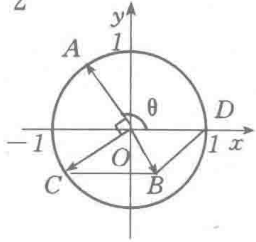

图2

$z_2=z_1i+1$，$\therefore \angle COB=\frac{1}{2}[2\pi-\arg(z_1i)]=\frac{1}{2}\left[2\pi-(\theta+\frac{\pi}{2})\right]=\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

所以 $\alpha=\angle AOB=\angle AOC+\angle COB=\frac{\pi}{2}+(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

这种应用向量的有向性来确定夹角 α 的方法，要求学生对复数的几何意义理解清楚，对向量加法法则运用熟悉，作图准确，并且对 θ 的分区合理。这样，既加深了对数形结合的认识，又提高了解题的技巧。

四、应用余弦定理

解法四（分析：因为$\angle AOB$ 是$\triangle AOB$ 的内角，所以，只要求出

各边的长度，即各相应向量所对应的复数的模，则能应用余弦定理求解。)

$\because z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$(0\leqslant\theta<\pi,\ \theta\neq\pi/2)$，

$\therefore z_2=z_1i+1=1-\sin\theta+i\cos\theta$。

$z_2-z_1=1-\sin\theta-\cos\theta+i\ (\cos\theta-\sin\theta)$。

$\therefore |z_1|=1$。

$$\therefore |z_2|=\sqrt{(1-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{2\ (1-\sin\theta)}。$$

$$|z_2-z_1|=\sqrt{(1-\sin\theta-\cos\theta)^2+\ (\cos\theta-\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{3-2\ (\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$\therefore \cos\alpha=\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2|OA|\cdot|OB|}$$

$$=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2-|z_2-z_1|^2}{2|z_1||z_2|}$$

$$=\frac{1+2\ (1-\sin\theta)\ -3+2\ (\sin\theta+\cos\theta)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\theta}}$$

= [illegible] sθ / [illegible] $1-\sin\theta$　⑦

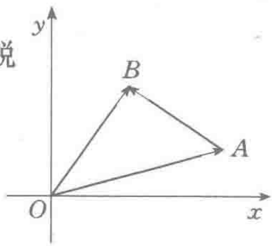

图3

1°，[illegible] $\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\cos\theta>0$，α为锐角，则⑦[illegible]

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{[illegible]\sin\theta)\ (1+\sin\theta)}{2\ (1-\sin\theta)}}$$

= [illegible] $\frac{\text{-}\sin\theta}{2}$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\ (\frac{\pi}{2}-\theta)}{2}}=\cos\ (\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})，$$

此时 $0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$\cos\theta<0$，则$\cos\alpha<0$，α为钝角，那么⑦式化为：

$$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{2}}$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left(\because -\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<0,\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)>0\right)$$

$$=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\pi\right)$$

所以$\alpha=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

这种应用余弦定理来确定夹角α的方法，学生容易接受，但是在求$|AB|$即$|z_2-z_1|$时，容易算错。此外，有的学生演算到⑦式再也不懂得如何做下去了。说明他们对于角θ，α的范围与关系认识不清，三角函数式的变换能力差，需要进一步落实双基与加强知识迁移能力的培养。

五、应用两条直线的夹角公式

解法五：(分析：因$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的方向可以用直线OA，OB的斜率表示，所以∠AOB就可以用两条直线的夹角公式求解。)

$\because z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$(0\leqslant\theta<\pi$，$\theta\neq\pi/2)$，与$z_2=z_1i+1=1-\sin\theta+i\cos\theta$分别对应复平面上的点A与B。

$\therefore k_{OA}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=tg\theta$；$k_{OB}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$。

$$\therefore tg\alpha=\frac{k_{OB}-k_{OA}}{1+k_{OB}\cdot k_{OA}}=\frac{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-tg\theta}{1+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\cdot tg\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \qquad ⑧$$

1°，当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<0$，由 $0\leqslant\alpha<\pi$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}+\pi=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\left(\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\pi\right)$。

这种解法，以平面解析几何中两条直线的夹角公式为基础，以三角变换为工具，脉络清楚，把复数、三角、解析几何的知识有机地结合起来，得到很好的效果。

从以上的五个方面，可以看出，对于复数的模与辐角的主值范围的复习教学，单凭定义上的理解是不够的。若将其与三角、解析几何等有关知识联系起来，综合运用其内涵与外延，那么，学生对于复数的模与辐角主值概念的理解与应用将达到了一个新的境界。这样对于拓宽学生的解题思路，提高其分析问题与解决问题的能力都将起到积极的作用。

复数的模与辐角内容分析及教案设计

一、内容分析

复数的模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，它分别与复数代数形式表示的实虚部、向量形式表示的乘除运算以及复数本身表示的互为共轭复数的积等都是有机联系着的。要求学生能够“掌握复数的代数、几何、三角表示及其转换。”

复数没有大小，但复数的模与辐角主值有大小。所以复数的模与辐角主值常与函数的最值相结合，在求最值时，除了代数、三角的常规方法外，还需注意几何法及不等式$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$的运用。

复数与复平面上的点以及原点为始点的向量之间具有一一对应的关系，因此复数的向量表示及其几何意义与解析几何中点的坐标、距离等问题相互联系，有些复数模的方程的几何意义表示曲线，求满足某种条件的复数，实际上是求曲线交点所对应的复数，往往通过数形结合加以解决。

总之，复数内容具有综合性；解决复数问题的方法具有选择性，这两者往往与复数的模及辐角有机相联，既体现了综合运用基本知识及其基本技能，又有效地发展逻辑思维及综合分析问题的能力。

二、教学方案

课题：复数的模与辐角。

课型：复习课。

教学目的：使学生掌握复数的模与辐角及其在代数、几何、三角形式相互转换方面的运用。

教学方法：程序教学法。

（一）引入

1. 师：前面我们复习了复数的三角形式，大家知道，模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，那么请同学们考虑：它们与复数代数形式表示的实、虚部以及向量表示的乘除运算是否有联系，有什么联系？

生：有 $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 中 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，$r=a^2+b^2$，乘除运算可以表示成复平面上向量的旋转与伸缩。

师：对，另外模与复数本身表示的互为共轭复数的积等都有一定的联系：$z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$，即“模方公式”。

2. 师：下面请做练习：

(1) 若虚数 $z=a+bi$ (a，$b\in R$，$b\neq0$)，则$|z^2|$、$|z|^2$、z^2的关系是（　　）。

A. 互不相等　　B. $|z^2|\neq|z|^2=z^2$

C. $|z^2|=|z|^2\neq z^2$　　D. $|z^2|=|z|^2=z^2$

（2）设复数 z 的辐角主值是 0，则 z^2 的辐角主值是（ ）。

A. 2θ　　B. $2\theta-2\pi$

C. $2\pi-\theta$　　D. 2θ 或 $2\theta-2\pi$

检查学生答案后提问：那么“复数的模”与“实数的绝对值”以及“辐角”与“辐角主值”各有什么关系呢？

生：（教师帮助概括）对于 $z=a+bi$（a，$b\in R$）来说，当 $b=0$ 时，则 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模就是 $|a|$，这与实数意义上的绝对值一致，与 $b\neq0$ 时的几何意义亦相同，都表示其对应的点到坐标原点的距离，因此，复数的模是实数绝对值概念的扩充，但实数中绝对值的性质对于复数模来讲未必都成立，例如 $|z|=\pm z$、$|z|^2=z^2$，在复数范围内不成立。

$\arg z=\arg z+2k\pi$（$k\in R$），其中 $\arg z\in[0, 2\pi)$，被某一非零复数唯一确定，但并非一一对应。

下面来进一步探求解决有关复数模与辐角问题的基本思路与方法。

（二）授课

题 1　若 $|z|=1$，$\arg z=\theta$，则 $\dfrac{z+\bar{z}}{1+z^2}$ 的辐角主值为（　）。

A. 2θ　　B. $2\theta-2\pi$

C. $2\pi-\theta$ D. $2\pi-\theta$ 或 0

解：$\because \dfrac{z+\bar{z}}{1+z^2}=\dfrac{z+\dfrac{1}{z}}{1+z^2}=\dfrac{1}{z}=$（$|z|=1$ 时，$\bar{z}=\dfrac{1}{z}$），

$\therefore \arg\dfrac{z+\bar{z}}{1+z^2}=\arg\bar{z}=2\pi-\theta$ 或 0，故选（D）。

强调：对于非零复数 z，$\arg z$ 与 $\arg\bar{z}$ 之间有如下关系：

$$\arg z+\arg \bar{z}=\begin{cases}0 & (当\ z\in R),\\ 2\pi & (当\ z\in C\ 且\ z\notin R^{+},\ z\neq 0)。\end{cases}$$

题 2　设复数α、β为实系数二次方程 $x^2+x+p=0$ 的两根，且 $|\alpha-\beta|=3$，那么p等于（　　）。

A. -2　B. -0.5　　C. 2.5　D. 1

解：设 $\alpha=a+bi$ （a，$b\in R$），则 $\beta=a-bi$，

$\because |\alpha-\beta|=3$，

$\therefore |b|=1.5$，而 $-1=\alpha+\beta=2a$，$\therefore a=-0.5$，

$\therefore p=\alpha\beta=(-0.5)^2+1.5^2=2.5$，故选（C）。

强调：实系数一元n次方程的虚根成对出现且共轭。

说明：以上两题的解法可简捷地归纳为“共轭配对”。

题 3　方程 $z^2=\bar{z}$ 的解为______。

分析：本题即教材第222页复习题八第14题②的变形，原题中有“z是虚数”的条件，则 $y\neq 0$，$\therefore z=\omega$ 及 $\omega^2=\omega$，可以设 $z=x-yi$（x，$y\in R$）代入后用复数相等的条件，解方程组得x、y后确定z，现解法如下：

解：两边取模得 $|z|^2=|\bar{z}|$，即 $|z|^2=|z|$，解得 $|z|=0$ 或 $|z|=1$；当 $|z|=0$ 时，$z_1=0$，当 $|z|=1$ 时，将原方程两边同乘以z，得 $z^2=z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，故得 $z_2=1$，$z_3=\omega$，$z_4=\bar{\omega}=\omega^2$，因此，0，1，ω，$\omega^2$ 为原方程的根，(其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$)。

说明：本题采用“合理取模”，使复数化为实数，又在新的层次上，再将实数化为复数，相互转化的工具是“模方公式”。

但一般 $z_1=z_2$ 与 $|z_1|=|z_2|$ 不等价(充分不必要)，如 $x+yi=1+2i$，$|x+yi|=|1+2i|$，前者仅表示点（1，2），而后者表示以原点为圆心，5为半径的圆，不过本例是对同一复数z而言的，属等价变形，否则需将结果进行检验以舍去增解。

题 4　已知 z_1、$z_2\neq 0$，且 $z_1^2-2z_1z_2+2z_2^2=0$，设 z_1、z_2 在复平面上所对应的点是 Z_1、Z_2，O是原点，则 $\triangle OZ_1Z_2$，是

______三角形。

解：原方程即 $(\frac{z_1}{z_2})^2-2(\frac{z_1}{z_2})+2=0$，解得$\frac{z_1}{z_2}=1\pm i=2(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4})$，这就是说将向量$\overrightarrow{OZ_2}$旋转 45°，模扩大到原来的 2 倍，即可得到向量$\overrightarrow{OZ_1}$，连结 Z_1Z_2，显然为等腰直角三角形。

说明：本题在方程变换的基础上，由复数的几何意义得出结论，解题中采用了“动静结合”的观点与方法。

指出：（板书）本课题的思路与方法：

1. 共轭配对，2. 合理取模，3. 动静结合。

下面继续说明以上方法在解题中的运用。

题 5　求复数 $z=1+(\frac{\sqrt{3}+i}{2})^7$ 的模及辐角主值。

解：（由学生自己完成）

$$\because z=1+(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^7$$

$$=1+\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$=2\cos^2\frac{7\pi}{12}+2\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}i$$

$$=-2\cos\frac{7\pi}{12}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}),$$

$$\therefore |z|=|-2\cos\frac{7\pi}{12}|=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},$$

$$\arg z=\frac{19\pi}{12}$$

说明：本题首先求出 z 的三角形式以便确定模和辐角，但应“合理取模”，这关系到辐角主值确定的正确与否。

题 6　已知$|z|=1$，求$|z-(2+2i)|$的最值。

分析一：若设 $z=x+yi$ $(x, y\in R)$，据条件$|z|=1$，则得 x、y 的关系式 $x^2+y^2=1$，同样可得$|z-(2+2i)|$用 x，y 的表达式，将“已

知”和“所求”联系起来考虑，用代数法求最值。

解法一（代数法）：设 $z=x+yi$ $(x, y\in R)$，

则 $x^2+y^2=1$

$\therefore |z-(2+2i)|=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{9-4(x+y)}$，

$\because x^2+y^2\geqslant 2xy$，

则 $2xy\leqslant 1$，$(x+y)^2\leqslant 2$，$|x+y|\leqslant\sqrt{2}$，

$\therefore |z-(2+2i)|_{max}=\sqrt{9+4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+1$，

$|z-(2+2i)|_{min}=\sqrt{9-4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1$

指出：将等式代为不等式，从而运用不等式法求最值。

分析二：复数既可表示成代数形式，又可表示成三角形式，那么是否可以用三角法求解呢？

解法二（三角法）：设 $z=\cos\theta-i\sin\theta$，则 $|z-(2+2i)|=$

$\sqrt{(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta-2)^2}=$

$\sqrt{9-4(\sin\theta+\cos\theta)}=\sqrt{9-4\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$。

$\because |\sin(\theta+\frac{\pi}{4})|\leqslant 1$，

$\therefore |z-(2+2i)|_{max}=2\sqrt{2}+1$，　$|z-(2+2i)|_{min}=2\sqrt{2}-1$。

指出：利用正弦函数的有界性，把等式转化为不等式，从而解决了求最值问题。

分析三：可以根据复数的几何表示，用“数形结合”来解。

解法三：（几何法）$\because |z|=1$，$\therefore$ 复数 z 在复平面内对应点在单位圆上，$\because |z-(2+2i)|$ 在几何上表示单位圆周上的点 M 与定点 P (2, 2) 的距离，从圆形的几何性质知 $|PM|_{max}=2\sqrt{2}+1$，$|PM|_{min}=2\sqrt{2}-1$。

分析四：以上三种解法从总体上讲还是常规解法，如果从深一点层次去仔细观察，原式表示两个复数的差的模，那么关于两个复数差的