DX

重点疑难 破解指南
会考高考 助您成功

名师导学 新教纲 新教材

DQ

导学大全

DXDQ DXDQ DXDQ DXDQ DXDQ DXDQ DXDQ DXDQ

高中

数学

第三册

上海远东出版社

高中数学导学大全

（第三册）

陈振宣　杨象富　主编

上海远东出版社

责任编辑　曹兴根
封面设计　汤智勇　赵小卫

高中数学导学大全
（第三册）
陈振宣　杨象富　主编
上海远东出版社出版发行
（上海冠生园路 393 号　邮政编码 200233）
新华书店经销　上海新华印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 15　千字 345
1997 年 8 月第 1 版　　1997 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—21000
ISBN 7—80613—599—5/G・533　定价：17.00 元

前　言

在学习数学知识时，如何深入领会教科书中的数学思想精髓？如何在解题练习中演算得法，事半功倍，从而在多类考试中具有竞争力？当前在由应试教学向素质教学的转轨中，如何着眼于能力培养？显然，同学们除了认真学习教科书之外，还必须有合适的强化“三基”训练的辅导读物相伴随.

目前，全国正在深入进行中学课程改革与教材建设.我们按国家教委颁布的教学大纲，参考九年义务教育四年制初级中学数学教科书，全日制普通高级中学数学教科书和上海市及部分省市新教材，编写了与此相匹配的本套丛书（初中四册，高中三册），可供我国各地区学生使用.

本套丛书内容以基础知识、基本技能为主体.既照顾到知识点的整体覆盖，又做到重点内容突出，并加以具体指导，使之能为同学们提供最优化的学习方法，帮助同学们提高思维能力和综合解题能力，取得最佳的学习效果.同时，本丛书也是教师准备教案、布置学生作业、帮助学生复习迎考的实用参考书.

丛书各册编排以章、节、目为单位，与教材完全同步.设有“教纲要求”，“重点、难点及学习指导”，“范例精选”，“达纲五星级同步测试题”与“阶段测试”或期中、期末试卷，并附参考答案或提示.

每一册各节内容由以下部分组成：

一、教纲要求　明确教学大纲中每节内容的具体教学目标，大多用了解、理解、掌握和灵活运用来阐述从低到高达纲的

四个层次．其具体含义为：(1)了解：对知识的含义有感性的、初步的认识，能够说出这一知识是什么，能够(或会)在有关的问题中识别它．(2)理解：对概念和规律(定律、定理、公式、法则等)达到了理性认识，知道它是怎样得出来的，它与其他概念和规律之间的联系，有什么用途．(3)掌握：在理解的基础上，通过练习，形成技能，能够(或会)用它去解决一些问题．(4)灵活运用：指能够综合运用知识并达到熟练灵活的程度，从而形成了能力．

二、重点、难点及学习指导　除了指出本节重点与难点以外，还对重点与难点作了简明扼要的分析，启发同学们将知识进行疏理、归纳、巩固与应用．目的是帮助同学们进一步掌握这些重点或难点的内容．

三、范例精选　选用例题的标准是不求难、不求偏，着重于配合重点内容，在每一道范例之后，都有“评析”、“说明”等栏，既有就题论题的分析，也有据此例的结论、方法进一步引申而作的点评．

四、达纲五星级同步测试题　选用题目涉及的内容不仅有完整的覆盖面，而且数量充足．类型有判断题、选择题、填空题、解答题、证明题等，注重选题的基础性及典型性，绝大部分内容适合大多数同学的水平．其次，注重选题的难易层次性，在每道习题前标有不同的星级，以示其难易程度，星级越高，说明题目难度越大．四星级以上的习题供同学们开展课外活动研究或供学有余力的同学选用．同时，也注重了选题的应用性，有的内容涉及操作及识图、画图；有的内容涉及日常生活或生产实际应用．此外，还对解题所需的时间作了约略规定，供同学们参考．

五、参考答案　对于有一定难度或技巧的题目，除了给出答案外，还作了一些提示或给出完整的解答过程，供同学们解题时参考．

六、数学高考的要求、题型与复习指导 为指导高中学生通过系统复习，全面总结高中阶段数学知识，提高学生的基本技能，帮助学生顺利地通过会考、高考，特请全国优秀教师精心编写了此章，书后还附有理科、文科模拟试卷，便于同学们复习后进行自我测试。

参加本书撰稿的有：潘亚奎·代数第一章；胡庆彪·代数第二章；陈永箴·代数第三章、平面解析几何第四章；王永利·代数第六章；邵振平·代数第七章；章志强·代数第九章；贝跃敏·立体几何第一章；柴盛楣·立体几何第二章；姚国超·微积分；项宁·文科模拟试卷之二；陈永莉·平面解析几何第一章；杨象富·代数第四、五章、数学高考的要求、题型与复习指导、理科模拟试卷及文科模拟试卷之一；陈振宣·代数第八章、平面解析几何第二、三章.

目　　录

代　　数

立 体 几 何

平面解析几何

微　积　分

代　　数

第一章　集合、映射与函数

一、教纲要求

1. 理解集合、子集、交集、并集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

2. 了解映射的概念，在此基础上加深对函数概念的理解.

3. 理解函数的单调性和奇偶性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性和奇偶性的方法.

4. 了解反函数的概念及互为反函数的函数图象间的关系，会求一些简单函数的反函数.

二、重点、难点及学习指导

1. 重点：有关集合的基本概念，映射、函数与反函数的概念.

2. 难点：(1)有关集合的各个基本概念的涵义以及相互之间的区别和联系；(2)映射的概念以及用映射来刻画函数的概念；(3)反函数的概念与求法；(4)一些代数命题的证明.

3. 学习指导：(1)注意结合实例；(2)运用对比方法，比较几个意义相近或有从属关系的概念的异同；(3)结合直观图形或函数图象来说明较抽象的概念和性质；(4)重视分析及综合能力的培养，理清推理的层次.

三、范例精选

例 1 （选择题，1995 年全国高考题）

(1) 已知全集 $I=\{0,-1,-2,-3,-4\}$，集合 $M=\{0,-1,-2\}$，$N=\{0,-3,-4\}$，则 $\overline{M}\cap N$ 等于 （ ）.

(A) $\{0\}$ (B) $\{-3,-4\}$

(C) $\{-1,-2\}$ (D) $\varnothing$

(2) 已知 I 为全集，集合 $M\subset I$，$N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则 （ ）.

(A) $\overline{M}\supseteq\overline{N}$ (B) $M\subseteq\overline{N}$ (C) $\overline{M}\subseteq\overline{N}$ (D) $M\supseteq\overline{N}$

解 (1) $\overline{M}=\{-3,-4\}$，$\overline{M}\cap N=\{-3,-4\}$，故应选(B).

(2) 满足 $M\cap N=N$ 的情况有两种：$M\supset N$ 或 $M=N$.

如果 $M\supset N$，有 $\overline{M}\subset\overline{N}$；如果 $M=N$，有 $\overline{M}=\overline{N}$. 因此应有 $\overline{M}\subseteq\overline{N}$，故选(C).

评析 正确掌握有关的符号语言，是解决本题的关键.

例 2 设 $A=\{x\,|\,x=2k+1,k\in Z\}$，$B=\{x\,|\,x=4k\pm1,k\in Z\}$（特殊集合 R、Z、N、Q、C 国家标准为 $\mathbf{R}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{N}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{C}$.），求证 $A=B$.

证明 根据集合相等的意义，只要证明

$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

(1) 设 $a\in A$，即 $a=2k+1$，$k\in Z$. 若 k 是偶数，即 $k=2k_1$，$k_1\in Z$，则 $a=4k_1+1$，$k_1\in Z$，故 $a\in B$；若 k 是奇数，即 $k=2k_1+1$，$k_1\in Z$，则 $a=4k_1+3=4(k_1+1)-1$，$(k_1+1)\in Z$，故 $a\in B$. 这就证明了 $A\subseteq B$.

(2) 设 $b\in B$，即 $b=4k+1$ 或 $b=4k-1$，$k\in Z$. 若 $b=4k+1$，则 $b=2(2k)+1$，$2k\in Z$，故 $b\in A$；同理可证 $(4k-1)\in A$. 这就证明了 $A\supseteq B$.

由(1)和(2)，得 $A=B$.

评析 事实上，这里的 A、B 都是全体奇数的集合，只是表示形式不同. 同样可以证明：

$\{x|x=2k,k\in Z\}=\{x|x=4k\pm 2,k\in Z\}$，

$\{x|x=3k+1,k\in Z\}=\{x|x=3k-2,k\in Z\}$等.

例 3 在下列集合 A 到集合 B 的对应中，是映射的为 ( ).

(A) $A=B=N$，对应法则 f： $x\to|x-3|$

(B) $A=R$，$B=\{0,1\}$，对应法则

$$f:\quad x\to\begin{cases}1 & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

(C) $A=B=R$，对应法则 f： $x\to\pm\sqrt{x}$

(D) $A=[1,2]$，$B=[a,b]$，f： $x\to y=(b-a)x+2a-b$

解 对照映射的定义，看 A 中的“任一”元素，是否在 B 中有“唯一”的元素与之对应.

对(A)，当 $x=3$ 时，$|x-3|=0$. 即 A 中有一个元素 3，在 B 中没有元素和它对应，故不是映射；

对(B)，A 中的 $x=0$ 对应着 0 或 1(不是“唯一”的)，故也不是映射；

对(C)，A 中的每一个正实数 a 都与 B 中的两个实数 $\pm\sqrt{a}$ 相对应，故也不是映射；

(D)是映射，证明如下：

任取 $x\in A$，即 $1\leqslant x\leqslant 2$，则

$$\begin{aligned}a&=(b-a)\cdot 1+2a-b\leqslant(b-a)x+2a-b\\&\leqslant(b-a)\cdot 2+2a-b=b.\end{aligned}$$

这说明按对应法则 f，存在唯一的 $y\in B$. 故应选(D).

评析 “映射”的概念比较抽象但很重要，其要点在“任一”、

“唯一”四字. 学习数学必须把搞清概念放在首位. 概念未搞清就一头坠入题海，学习会事倍功微. 对比较抽象的概念，应该用“心锤”反复敲打，细细品味，以求对概念的实质心领神会，能一语道破. 应该是以概念指导解题，在解题中加深对概念的理解.

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$；(2) $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$； (4) $y=\sqrt{|x-2|-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+7}}$.

解 (1) 由 $-x^2+3x-2\geqslant 0$， 即 $x^2-3x+2\leqslant 0$，
得 $1\leqslant x\leqslant 2$.

$\therefore$ 函数的定义域为$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

(2) 由$\begin{cases}x+1\neq 0,\\|x|-x>0,\end{cases}$ 解得 $x\neq -1$ 且 $x<0$.

$\therefore$ 函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

(3) 由$\begin{cases}1+\dfrac{1}{x}\neq 0,\\x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\neq -1$ 且 $x\neq 0$.

$\therefore$ 函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(4) 由$\begin{cases}|x-2|-1\geqslant 0,\\3x+7\neq 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant 1,\\x\neq -2\dfrac{1}{3},\end{cases}$

可得函数的定义域为

$$\left(-\infty,-2\frac{1}{3}\right)\cup\left(-2\frac{1}{3},1\right]\cup[3,+\infty).$$

例 5 已知函数 $y=f(x)$，$x\in F$，那么集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in F\}\cap\{(x,y)\mid x=1\}$中所含元素的个数是 ( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 0 或 1 (D) 1 或 2

解　交集中的元素是实数对(x,y)，即直角坐标平面上的点.

如果$1\in F$，由于$y=f(1)$是唯一确定的，因此交点的个数是1；

如果$1\notin F$，由于$f(1)$没有定义，这时的交点个数是0.

因此，应选(C).

评析　正确认识集合语言和全面理解函数的定义，是解答本题的两个关键.

从函数图象的观点看，本题是要确定函数$y=f(x)(x\in F)$的图象与直线$x=1$的交点个数. 这里的关键是要注意到1是否属于函数的定义域F.

例6　求下列函数的值域：

(1) $f(x)=2x^2-6x+c,\quad x\in[1,3],\quad c$为已知实数；

(2) $y=2x+\sqrt{2x-1}$；

(3) $y=2x+\sqrt{1-2x}$；

(4) $y=x^4+\dfrac{1}{x^4}-1$；

(5) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$.

解　(1) $\because\ f(x)=2x^2-6x+c=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+c-\dfrac{9}{2}$，

$\dfrac{3}{2}\in[1,3]$，故当$x=\dfrac{3}{2}$时，$f(x)$有最小值$c-\dfrac{9}{2}$；而当$x=3$时，$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$最大，故$f(x)$有最大值$c$.　$\therefore$ 函数的值域为$\left[c-\dfrac{9}{2},c\right]$.

(2) 由$2x-1\geqslant 0$，得函数的定义域为$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. 而$2x$与

$\sqrt{2x-1}$同为增函数，故函数 $y=2x+\sqrt{2x-1}$也是增函数，且无上界.

当 $x=\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=1$. 故所求值域为$[1,+\infty)$.

(3) 由于 $2x$ 为增函数，而 $\sqrt{1-2x}$为减函数，因此本题不能用(2)的思想方法去解. 为了去掉根式，可用换元法.

设 $\sqrt{1-2x}=t\geqslant 0$， 则 $1-2x=t^2$， $2x=1-t^2$.

$\therefore\ y=1-t^2+t\quad (t\geqslant 0)$，

即 $y=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$.

当 $t=\frac{1}{2}\left(\text{即 } x=\frac{3}{8}\quad \text{且}\quad 1-2x\geqslant 0\right)$时，$y_{\max}=\frac{5}{4}$. 故所求值域为$\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

(4) $\because\ x^4+\frac{1}{x^4}-1=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+1$，

故当且仅当 $x^2=\frac{1}{x^2}$， 即 $x=\pm 1$ 时，$y_{\min}=1$.

$\therefore$ 函数的值域为$[1,+\infty)$.

(5) 由所给函数式，得

$$(2y-1)x^2+2(y+1)x+(y+3)=0.$$

当 $y\neq\frac{1}{2}$时，因为 $x\in R$，必须且只须

$$\Delta=4(y+1)^2-4(2y-1)(y+3)\geqslant 0,$$

即 $(y+4)(y-1)\leqslant 0$，所以$-4\leqslant y\leqslant 1\ \left(y\neq\frac{1}{2}\right)$.

若 $y=\frac{1}{2}$，由原式可知只要 $x=-\frac{7}{6}$即可.

$\therefore$ 函数的值域为$[-4,1]$.

评析 (1) 配方法是求函数值域的常用方法. 其他的方法

还有利用函数的单调性、换元法和判别式法等方法.

(2) 第(3)题不能用第(2)题的方法,但第(2)题却可用第(3)题的换元法(请读者一试).

(3) 有人把第(4)题的函数,配方成

$$y=x^4+\frac{1}{x^4}-1=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-3,$$

而错误地认为值域是$[-3,+\infty)$. 其实,$x^2+\frac{1}{x^2}=0$ 在实数范围内是不能满足的.

(4) 解第(5)题时,对 $y\neq\frac{1}{2}$与 $y=\frac{1}{2}$的分别讨论,值得注意.

例 7 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\left\{x \middle| x<-2 \text{ 或 } x>-\frac{1}{2}\right\}$,求不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集.

解 由已知条件,得

$$\begin{cases} a<0, \\ -\frac{b}{a}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}, \\ \frac{c}{a}=(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1. \end{cases} \quad \text{可取} \quad \begin{cases} a=-2, \\ b=-5, \\ c=-2. \end{cases}$$

于是,不等式 $ax^2-bx+c>0$ 即 $-2x^2+5x-2>0$,亦即$(2x-1)(x-2)<0$,故所求解集为$\left\{x \middle| \frac{1}{2}<x<2\right\}$.

评析 如果能注意到方程 $ax^2+bx+c=0$与 $ax^2-bx+c=0$的根互为相反数,并且 $a<0$,则可直接写出所求解集.

例 8 已知一元二次方程

$$2x^2+(7-3m)x+\frac{1}{2}m-10=0$$