



现代物理基础丛书

75

高能物理实验统计分析

朱永生 著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代物理基础丛书 75

高能物理实验统计分析

朱永生 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍高能物理实验统计分析的相关知识,包括高能物理实验测量的统计性质,高能物理实验分析概述及其要素,参数的点估计和区间估计,多个测量值的合并估计,假设检验和统计显著性,盲分析等内容.讨论实验分析中的一些困难问题和近期国际上发展起来的新方法.书中分析高能物理实验统计分析的许多实例,特别是北京正负电子对撞机上工作的北京谱仪的许多物理结果.书末附有必要的数理统计表,可供本书涉及的数据分析问题使用.

本书对于从事粒子物理和核物理、粒子和核天体物理、宇宙线物理和宇宙学、探测器研究的数据分析工作者有参考意义,可供实验物理工作者和大专院校相关专业师生、理论物理研究人员、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高能物理实验统计分析/朱永生著. —北京:科学出版社, 2016
(现代物理基础丛书)

ISBN 978-7-03-047213-7

I. ①高… II. ①朱… III. ①高能物理学—实验—统计分析 IV. ①
O572-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 018085 号

责任编辑: 钱 俊 刘信力 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷 印张: 23

字数: 447 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代物理基础丛书》编委会

主 编 杨国桢

副主编 阎守胜 聂玉昕

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 牧 王鼎盛 朱邦芬 刘寄星

杜东生 邹振隆 宋菲君 张元仲

张守著 张海澜 张焕乔 张维岩

侯建国 侯晓远 夏建白 黄 涛

解思深

前 言

高能物理, 或称粒子物理, 是研究基本粒子性质及其相互作用的科学. 基本粒子间的相互作用导致粒子间的反应和 (不稳定) 粒子的衰变, 粒子衰变和粒子反应都是随机现象. 利用探测装置测量粒子的性能参数涉及诸多随机过程. 因此, 实验分析人员不但需要熟谙粒子物理、粒子探测器的知识, 还需要了解概率统计方面的知识并正确地应用于实验分析中去.

本书对高能物理实验的统计分析作一简明、扼要的介绍. 重点讨论实验分析的基本概念和原理、实验分析的一般步骤和方法. 第 1 章讨论实验测量的统计性质, 这是对实验进行统计分析的物理和数学基础. 第 2、3 两章阐述高能物理实验分析的一般步骤和必须处理的关键要素. 第 4、5 两章讨论与实验结果直接相关的待测参数的估计, 特别是区间估计的问题. 第 6 章阐述多次测量结果的合并方法, 这是高能物理实验必须处理的重要问题. 第 7 章简要介绍实验分析中常用的几种假设检验方法, 并重点阐述统计显著性的概念. 第 8 章讨论盲分析方法, 目的是避免研究者的人为倾向造成的对于实验真实结果的偏离. 所有这些内容的理解和掌握对于实验分析和实验结果的正确性都具有典型意义和关键作用. 书末附有高能物理实验统计分析常用的数理统计表, 可供本书涉及的许多数据分析问题使用.

本书力求反映国际上近期发展起来的处理实验分析中一些困难问题的新概念和新方法, 例如, 3.10 节“信号分布和本底分布的拟合”, 5.5 节“接近物理边界的参数置信区间”, 5.6 节“贝叶斯信度区间”, 第 6 章“多个测量值的合并估计”和第 8 章“盲分析”等内容.

本书大量引用近期国际、国内高能物理实验的结果, 特别是北京谱仪合作组的实验结果. 理论与实验的紧密结合是本书的一大特色.

作者希望通过阅读本书, 已经具有粒子物理、粒子探测器和概率统计基础知识的人员, 能够清晰地理解粒子物理实验统计分析的基本原理, 掌握分析流程的步骤并正确地处理相关的关键问题, 得到正确的实验结果.

20 世纪 80 年代末, 北京正负电子对撞机 (Beijing Electron Positron Collider, BEPC) 和北京谱仪 (Beijing Spectrometer, BES) 的建成, 是中国高能加速器实验物理的真正开端. 在北京谱仪上进行实验工作的研究组是以谱仪的名称命名的, 简称 BES 合作组, 它是由多国物理学家组成的国际合作研究组, 我国物理学家在其中占有主导性的地位. 北京谱仪自 1989 年建成并成功地实现实验取数至今已逾 25 年, 其间经历了 BESII, BESIII 的升级、改造, 获取了 τ -粲能区海量的高能物理实

验数据, 获得了大量居于当时世界领先水平的物理成果. 其中, τ 轻子质量的精确测量、2~5 GeV 能区 R 值的精确测量、共振态 $X(1835)$ 的实验观察、 σ 粒子的实验确定、新共振态 $Z_c^\pm(3900)$ 和 $Z_c^\pm(4025)$ 的发现, 更是引起国际高能物理界广泛瞩目的重大成就. 作为北京谱仪的建造者和 BES 合作组的成员之一, 作者亲身经历了中国高能物理实验队伍从国际高能物理界的新成员演变为一支具有国际重要影响队伍的全过程. 十分自然, 本书从 BES 实验的物理成果中吸取了许多素材. 因此作者感谢 BES 合作组, 特别是曾经与之一起工作和具体讨论实验分析问题的许多同事, 包括中国科学院高能物理研究所的研究员苑长征、何康林、莫晓虎、荣刚、陈江川, 副研究员王至勇、王平、李刚、王亮亮, 博士毕业后赴国外深造或到其他科学教育机构任职的柳峰、秦纲、王文峰、马连良、焦建斌、杜书先、边渐鸣、李蕾、李春花等诸位同仁. 需要特别提及和感谢张闯研究员关于 BEPC 性能的讨论并提供了 BEPC 的运行参数; 平荣刚副研究员阅读了关于布雷特-维格纳共振公式和事例产生子的有关内容并提出了有益的建议; 与中国科学院大学吕晓睿副教授和刘晓霞硕士研究生关于分支比合并估计的讨论是富有启发性的.

作者感谢中国工程院院士、中国高等科学技术中心学术主任叶铭汉研究员, 中国科学院院士、中国科学技术大学赵政国教授和中国科学院大学物理学院副院长郑阳恒教授对于本书的热情鼓励和积极推荐, 以及科学出版社编辑钱俊等的大力支持和辛勤、细致的工作.

限于本人学术水平和视野, 疏漏不足在所难免, 诚恳欢迎专家和读者批评指正.

朱永生

2015 年 10 月于北京

目 录

前言

第 1 章 高能物理实验测量的统计性质	1
1.1 指数分布物理量	1
1.1.1 不稳定粒子的衰变时间	1
1.1.2 不稳定粒子的飞行距离	2
1.2 二项分布物理量	3
1.2.1 探测器计数 (I), 探测效率	3
1.2.2 粒子反应产物的不对称性 (I)	4
1.3 多项分布物理量, 直方图数据 (I)	6
1.4 泊松分布物理量	8
1.4.1 泊松分布, 泊松过程	8
1.4.2 放射性衰变规律	9
1.4.3 粒子反应事例数	12
1.4.4 探测器计数 (II)	14
1.4.5 粒子反应产物的前后不对称性 (II)	16
1.4.6 直方图数据 (II)	17
1.5 正态分布物理量	18
第 2 章 高能物理实验分析概述	20
2.1 实验数据	20
2.1.1 原始数据获取	20
2.1.2 实验数据集	21
2.2 实验分析的一般步骤	23
2.2.1 事例判选, 特征变量和数据矩阵	24
2.2.2 事例判选的一般步骤	28
2.2.3 事例判选的截断值分析法	31
2.2.4 截断值判选法用于实验分析实例	40
2.2.5 候选信号事例分布的分析和拟合	45
2.2.6 系统误差分析	49
第 3 章 高能物理实验分析的一些要素	52
3.1 误差, 统计误差和系统误差	52

3.1.1	误差的定义	52
3.1.2	统计误差的确定	54
3.1.3	系统误差的来源和归类	58
3.1.4	各类系统误差的确定	59
3.1.5	误差的合并	64
3.2	效率及其误差	67
3.2.1	探测器探测效率	67
3.2.2	粒子径迹探测效率	68
3.2.3	事例判选效率	70
3.3	粒子鉴别	71
3.3.1	用于带电粒子鉴别的特征变量	71
3.3.2	带电粒子鉴别的 χ^2 方法	76
3.3.3	带电粒子鉴别的似然函数方法	77
3.3.4	带电粒子鉴别的神经网络方法	78
3.4	实验分布	84
3.4.1	实验分辨函数	85
3.4.2	探测效率	91
3.4.3	考虑实验分辨和探测效率的实验分布	93
3.4.4	复合概率密度	94
3.4.5	几种特殊的概率密度	96
3.5	共振态和不可探测粒子的重建与寻找	99
3.5.1	不变质量谱	99
3.5.2	达里兹图	101
3.5.3	反冲质量谱	103
3.5.4	丢失质量谱	104
3.5.5	束流约束质量谱	104
3.5.6	特征变量 U_{miss}	106
3.6	运动学拟合	109
3.6.1	存在不可测变量的运动学拟合	111
3.6.2	无不可测变量的运动学拟合	116
3.6.3	运动学拟合中的自由度	117
3.6.4	运动学拟合用于粒子鉴别	119
3.7	布雷特-维格纳共振公式	120
3.8	信号效率的确定, 事例产生子	123
3.8.1	信号效率的确定	123

3.8.2 事例产生子	124
3.9 数据控制样本	126
3.10 信号分布和本底分布的拟合	130
3.10.1 一维分布	130
3.10.2 多维分布	134
第 4 章 参数估计	144
4.1 估计量的性质	144
4.2 期望值和方差的估计	145
4.3 极大似然估计	146
4.3.1 参数及其方差的极大似然估计	146
4.3.2 直方图数据的极大似然估计	148
4.3.3 广义极大似然估计	148
4.4 最小二乘估计	149
4.4.1 参数及其方差的最小二乘估计	149
4.4.2 直方图数据的最小二乘估计	151
4.4.3 约束的最小二乘估计	152
第 5 章 区间估计, 置信区间和置信限	154
5.1 经典置信区间	154
5.1.1 置信区间的 Neyman 方法	154
5.1.2 正态估计量的 Neyman 置信区间	157
5.1.3 泊松观测值的 Neyman 置信区间	158
5.2 利用似然函数作区间估计, 似然区间	161
5.2.1 单个参数的似然区间	162
5.2.2 由 Bartlett 函数求置信区间	165
5.2.3 多个参数的似然域	167
5.3 最小二乘法求置信区间	169
5.3.1 单个参数的置信区间	170
5.3.2 多个参数的置信域	171
5.4 Neyman 区间、似然区间和 Bartlett 区间的对比	172
5.5 接近物理边界的参数置信区间	178
5.5.1 经典方法的困难	178
5.5.2 F-C 方法	182
5.5.3 改进的 F-C 方法	186
5.5.4 系统误差的考虑	188
5.6 贝叶斯信度区间	188

5.6.1	先验密度	189
5.6.2	系统误差的处理, 冗余参数	190
5.6.3	贝叶斯区间估计	191
5.7	二项分布参数的区间估计	197
5.7.1	二项分布参数 p 的置信区间	198
5.7.2	由泊松期望值比 λ 推断 p 的置信区间	203
5.8	衰变分支比的估计	204
5.8.1	分支比估计的最小二乘法	205
5.8.2	分支比估计的极大似然法	205
5.8.3	信度区间和上限的确定, 系统误差的考虑	208
5.8.4	小结	211
第 6 章	多个测量值的合并估计	212
6.1	多个测量值的极大似然合并估计	212
6.1.1	各实验似然函数已知时的合并估计	212
6.1.2	各实验似然函数未知时的合并估计	215
6.2	多个测量值的最小二乘合并估计	220
6.3	分支比多个测量值的合并估计	225
6.3.1	合并估计的最小二乘法	227
6.3.2	合并估计的极大似然法	228
6.3.3	信度区间和上限的确定, 系统误差的考虑	231
6.3.4	小结	233
第 7 章	假设检验和统计显著性	234
7.1	似然比检验	234
7.2	拟合优度检验	236
7.2.1	皮尔逊 χ^2 检验	236
7.2.2	柯尔莫哥洛夫检验	238
7.2.3	斯米尔诺夫-克拉默-冯·迈希斯检验	242
7.3	信号的统计显著性	243
7.3.1	实验 P 值	244
7.3.2	信号的统计显著性	245
第 8 章	盲分析	252
8.1	为什么需要盲分析	252
8.2	盲分析需遵循的原则	253
8.3	盲分析方法及实例	254
8.3.1	信号盲区方法 —— 稀有衰变和寻找新共振态的盲分析	254

8.3.2 改善分支比测量精度的盲分析·····	258
8.3.3 隐蔽参数法——参数精确测量的盲分析·····	259
8.3.4 隐蔽不对称性分布和不对称参数法——不对称性测量盲分析·····	260
8.4 结语和讨论·····	262
第 9 章 关于粒子表 ·····	264
9.1 数据的选择和处理·····	264
9.2 均值与拟合·····	265
9.2.1 误差处理·····	266
9.2.2 无约束求平均·····	266
9.2.3 约束拟合·····	268
9.3 舍入·····	270
9.4 讨论·····	270
参考文献·····	273
附表·····	278
索引·····	347
《现代物理基础丛书》已出版书目·····	353

第 1 章 高能物理实验测量的统计性质

高能物理, 或称粒子物理, 是研究基本粒子性质及其相互作用的科学. 基本粒子间的相互作用导致粒子间的反应和 (不稳定) 粒子的衰变. 利用探测装置研究粒子衰变和粒子反应是粒子物理实验的基本形态.

粒子衰变和粒子反应都是随机现象. 例如, 著名的 J/ψ 粒子的衰变方式超过 100 种^[1], 它们的末态是各不相同的. 对于 J/ψ 粒子的一次衰变, 究竟衰变到哪一种末态是完全不确定的; 即使衰变到一种特定的末态, 其中的各个末态粒子的方向、能量、动量也是不确定的, 而是服从某种分布. 粒子反应就其随机性特征而言与粒子衰变相同, 不过形态更为复杂.

随机性特征不但反映在基本粒子衰变和反应的物理规律上, 同时也反映在探测装置对于粒子性质的测量结果上. 例如, 一个电磁量能器 (EMC) 测量一束单能电子束的能量, 测量的结果不是单一值, 而是一个有一定宽度的某种分布, 这是由于测量过程包含了许多随机过程. 这种现象是各种探测器普遍存在的.

因此, 实验测量同时涉及粒子物理物理规律的随机性以及探测装置测量过程的随机性. 这样, 研究随机现象的数学分支之一——概率论和数理统计必定在实验数据分析中起到重要作用. 实验分析人员不但需要熟谙粒子物理、粒子探测器的知识, 还需要了解概率统计方面的知识并灵活地应用于实验分析中去. 概率论和数理统计及其在数据分析中的应用方面的书籍浩如烟海, 文献 [2]~[10] 列出了我们推荐的一些书籍, 它们的内容可能更适合于粒子物理实验分析工作的需要.

由于实验测量同时涉及粒子物理物理规律的随机性以及探测装置测量过程的随机性, 所以实验测量获得的结果往往都是随机变量, 它们服从相应的概率分布. 本章叙述粒子物理实验中若干重要且经常用到的物理量及其概率分布.

1.1 指数分布物理量

1.1.1 不稳定粒子的衰变时间

不稳定粒子 (或核) 从产生到发生衰变的时间间隔称为它的衰变时间. 粒子物理知识告诉我们, 衰变时间是一个随机变量, 在时刻 0 产生的一个不稳定粒子在时刻 t 发生衰变的概率密度为指数分布

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1.1.1)$$

其中, 参数 τ 是衰变时间 t 的期望值, 即 $\tau = E(t)$, 称为粒子 (或核) 的平均寿命或寿命. 衰变时间的概率密度也可写成另一种形式

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1.1.2)$$

其中, 参数 $\lambda \equiv 1/\tau$ 称为粒子 (或核) 的衰变常数, 它表示单位时间内发生衰变的平均次数. 在时间间隔 $[0, t]$ 内不发生任何衰变的概率是

$$1 - F(t) \equiv 1 - \int_0^t f(t) dt = e^{-\lambda t}. \quad (1.1.3)$$

假定在时刻 T_1 有 $N_1(T_1)$ 个不稳定粒子, 若 N_1 充分大, 在时刻 $T_2 (> T_1)$ 由式 (1.1.3) 立即知道不稳定粒子个数 $N_2(T_2)$ 为

$$N_2(T_2) = N_1(T_1) e^{-\lambda(T_2 - T_1)}.$$

将 N_1, N_2 对时间求导数, 移项后, 得

$$\frac{dN_2/dt}{dN_1/dt} = e^{-\lambda(T_2 - T_1)},$$

于是得到寿命 τ 的表达式

$$\lambda = \tau^{-1} = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{dN_1/dt}{dN_2/dt} \right), \quad (1.1.4)$$

dN/dt 为单位时间内粒子衰变的次数, 称为衰变率. 因此, 用探测器测量任意两时刻 T_1, T_2 的衰变率, 即可求出粒子的寿命.

1.1.2 不稳定粒子的飞行距离

由于不稳定粒子衰变时间是一个随机变量, 所以不稳定粒子从产生时刻 (设定为 0) 到发生衰变的时刻 t 之间飞行的距离 l 也是一个随机变量, 飞行距离 l 与衰变时间 t 之间的关系为

$$l = t \cdot c\beta\gamma, \quad (1.1.5)$$

式中, β 是粒子速度; $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ 是洛伦兹因子. 飞行距离 l 的概率密度也具有指数分布的形式:

$$f(l) = \frac{1}{l_a} e^{-l/l_a}, \quad 0 \leq l < \infty, \quad (1.1.6)$$

其中, $l_a = \tau \cdot c\beta\gamma$ 是粒子寿命值对应的飞行距离.

1.2 二项分布物理量

1.2.1 探测器计数 (I), 探测效率

用探测器对粒子作计数, 当一个粒子穿过探测器时, 测量结果只可能是记到一次计数, 或者没记到计数, 没有其他可能. 这相当于概率论中的一次伯努利试验: 随机试验可能的结果只有两种, 即“成功”对应于探测器测得一次计数; “失败”对应于探测器没记到计数. 用随机变量 X 表示伯努利实验的结果, $X = 1$ 表示成功, $X = 0$ 表示失败, 于是 X 的概率分布为

$$P(X = r) = p^r(1-p)^{1-r}, \quad r = 0, 1; 0 < p < 1, \quad (1.2.1)$$

称随机变量 X 服从伯努利分布或 $(0, 1)$ 分布. 伯努利分布的期望值和方差为

$$E(X) = \sum_{i=1}^2 x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, \quad (1.2.2)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^2 [x_i - E(X)]^2 p_i = (1-p)^2 \cdot p + (-p)^2 \cdot (1-p) = p(1-p), \quad (1.2.3)$$

其中, p 是一次伯努利试验中试验成功的概率. 在用探测器对粒子作计数的情形下, 就是当一个粒子穿过探测器时测得一个计数的概率, 这称为探测器的探测效率.

当 n 个粒子穿过探测器时, 设探测器记到 r 次计数, 则 r 是一个随机变量, 它可以视为 n 个伯努利分布随机变量之和

$$r = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

当 n 个粒子穿过探测器, 探测器记到 r 次 ($0 \leq r \leq n$) 计数的概率等于

$$B(r; n, p) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, 1, \cdots, n, \quad (1.2.4)$$

该分布称为二项分布, 它的期望值和方差为

$$\mu \equiv E(r) = np, \quad V(r) = np(1-p). \quad (1.2.5)$$

一个粒子穿过探测器时得到一次计数的概率称为探测效率 ε , 显然它就等于二项分布的参数 p . 探测效率 ε 是未知的, 实验中依靠有限次的测量来测量, 即 $\varepsilon = r/n$. 当 n 足够大时, $\varepsilon \approx p$, 即概率 p 用频率 r/n 作为近似. 有限次测量确定的 ε 是有偏差的, 由式 (1.2.5) 知 ε 的方差为

$$V(\varepsilon) = V\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n} \approx \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}, \quad (1.2.6)$$

所以探测效率的标准偏差 (standard deviation, 简称标准差, 即方差的平方根) 为

$$\sigma_{\varepsilon} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{n}} = \sqrt{\frac{r}{n^2} \left(1 - \frac{r}{n}\right)}. \quad (1.2.7)$$

对于确定的 n 值, σ_{ε} 有如下性质: $\varepsilon = 0.5$ 时, σ_{ε} 达到极大值 $0.5/\sqrt{n}$; σ_{ε} 对于 $\varepsilon = 0.5$ 为对称分布; 当 ε 接近 0 或 1 时, σ_{ε} 达到极小. 为了能实验地测定 ε , 探测器计数 r 最小需等于 1, 即 $\varepsilon_{\min} = 1/n$, 此时

$$\sigma_{\varepsilon_{\min}} = \sigma_{\varepsilon=1/n} \approx \frac{1}{n},$$

探测效率的相对标准差则为

$$R = \frac{\sigma_{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}. \quad (1.2.8)$$

当 $\varepsilon = \varepsilon_{\min} \approx 1/n$ 时, $R = R_{\max} \approx 1$; 随着 ε 的增大, R 迅速下降.

图 1.1 显示了探测效率 ε 与其标准差 σ_{ε} 和测量次数 n 之间的函数关系, 以及探测效率的相对标准差 R 与探测效率 ε 和测量次数 n 之间的函数关系.

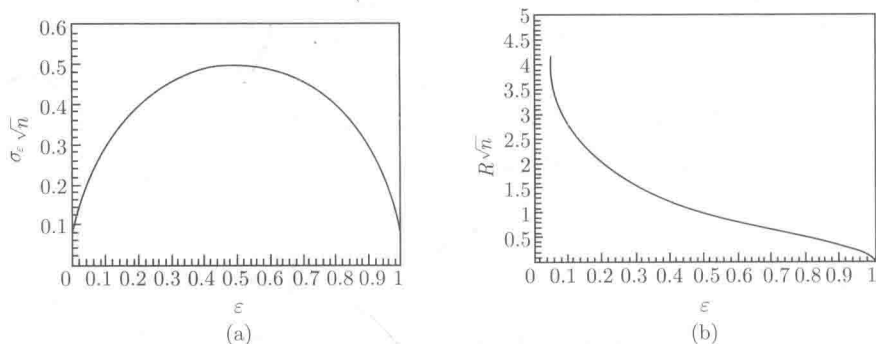


图 1.1 $\sigma_{\varepsilon}\sqrt{n}$ (a) 和 $R\sqrt{n}$ (b) 与探测效率 ε 间的关系

1.2.2 粒子反应产物的不对称性 (I)

一对相向飞行的高能正负电子 (能量相等) 对撞时, 产生下述粒子反应:



末态 μ^+ 、 μ^- 粒子方向相反, μ^+ 与 e^+ 之间的夹角 θ (称为极角) 是一随机变量. θ 落在 $(0, \pi/2)$ 区间内的事例称为前向事例, 落在 $(\pi/2, \pi)$ 区间内的事例称为后向事例 (图 1.2). 设共测量了 N 个 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 事例, 其中前向事例数和后向事例数

分别记为 F 和 B , $F + B = N$, 不对称性 r 定义为

$$r = \frac{F - B}{F + B}. \quad (1.2.9)$$

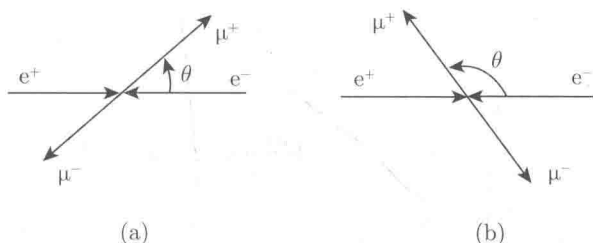


图 1.2 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应中的前向事例 (a) 和后向事例 (b)

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反应中前向事例和后向事例数之间的比例是由该反应的物理规律 (反应截面的角分布) 确定的, 但对于单个事例, 究竟是前向事例还是后向事例却是随机的. 由于事例只有两种可能结果, 又作了 N 次独立的测量, 所以前向事例数 F 服从参数 N, p 的二项分布, p 为一次 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 事例是前向事例的概率, 在 N 个 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 事例中出现 F 次前向事例的概率为

$$C_N^F p^F (1-p)^B, \quad B = N - F,$$

于是不对称性 $r = \frac{F - B}{F + B} = \frac{F - (N - F)}{N} = \frac{2}{N}F - 1$. 显然 r 也是一个随机变量, 它的数学期望和方差等于

$$\begin{aligned} E(r) &= E\left(\frac{2}{N}F\right) - E(1) = \frac{2}{N} \cdot Np - 1 = 2p - 1, \\ V(r) &= V\left(\frac{2}{N}F - 1\right) = \frac{4}{N^2}V(F) = \frac{4p(1-p)}{N}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

当测量事例数 N 足够大时, 一次试验中前向事例的出现概率 p 可用频率 F/N 作为近似, 所以

$$\begin{aligned} E(r) &\approx \frac{2}{N}F - 1 = \frac{F - B}{F + B}, \\ V(r) &\approx \frac{1}{N} \cdot \frac{4F}{N} \cdot \frac{B}{N} = \frac{4FB}{N^3}, \\ \sigma(r) &\approx \frac{2}{N} \sqrt{\frac{FB}{N}}, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

其中, $\sigma(r)$ 是随机变量 r 的标准差. 由 $\sigma(r)$ 的表达式可以求得 $\sigma(r)$ 达到一定精度所要求收集的事例数; 或者反过来, 由收集到的事例数求出前后不对称性的标准差.

粒子物理实验中,不但存在反应事例的几何空间不对称性,还存在反应事例的其他物理空间(如动量空间、自旋空间)的不对称性,这种不对称性往往与某种物理守恒律的破坏相联系.例如,对 $\psi' \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ 反应事例可以定义不对称性 A_{CP} :

$$A_{CP} = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}, \quad (1.2.12)$$

式中, N_+ 为 $q > 0$ 事例数; N_- 为 $q < 0$ 事例数. $q = (p_Z^+ - p_Z^-)(\mathbf{p}^+ \times \mathbf{p}^-)_Z$, $\mathbf{p}^+$ 为 π^+ 动量, Z 为 $\pi^+\pi^-$ 系统的方向. $A_{CP} \neq 0$ 表示该反应存在 CP 破坏, A_{CP} 的大小指示出 CP 破坏的程度. 利用不对称性来检验对称性破坏在粒子物理中具有普遍性,因而在数据分析中有重要应用. 这些不对称性都具有式 (1.2.9) 和式 (1.2.12) 类似的形式,在事例总数为已知常数的情形下,它们都是服从二项分布的随机变量.

1.3 多项分布物理量,直方图数据 (I)

在二项分布中,一次随机试验的结果只有两种.一般地,设一次随机试验 E 的结果有 l 种,即 $A_1, \dots, A_l$,一次试验中出现事件 A_j 的概率为

$$P(A_j) = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

显然应满足

$$\sum_{j=1}^l p_j = 1.$$

作 n 次独立的随机试验 E , 事件 A_j 出现 r_j 次 ($j = 1, 2, \dots, l$) 的概率分布可表示为

$$M(\mathbf{r}; n, \mathbf{p}) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_l!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_l^{r_l}, \quad (1.3.1)$$

称为随机变量 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_l)$ 的参数 n 和 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ 的多项分布. 这 l 个 r_j 值并不全都独立,它们必须满足下述条件:

$$\sum_{j=1}^l r_j = n. \quad (1.3.2)$$

显而易见,二项分布是 $l=2$ 的多项分布之特例.

多项分布的期望值和方差为

$$\begin{aligned} E(r_j) &= np_j, \quad j = 1, 2, \dots, l, \\ V(r_j) &= np_j(1 - p_j), \quad j = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$